Journal

für die

reine und angewandte Mathematik.

In zwanglosen Heften.

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Herausgegeben

von

A. L. Crelle.

Mit thätiger Beförderung hoher Königlich-Preufsischer Behörden.

Vierzehnter Band,

in vier Heften.

Mit drei Kupfertafeln.

Berlin, 1835.

Bei G. Reimer.

Et se trouve à Paris chez Mr. Bachelier (successeur de Mme Ve Courcier), Libraire pour les Mathématiques etc. Quai des Augustins No. 55.

Inhaltsverzeichnifs
des vierzehnten Bandes, nach den Gegenständen.

Reine Mathematik.

1. Analysis.

Nr. der Abhandlung.		Heft.	Seite.
1.	De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione, quae ad numerum parem pertinet, Commentatio. Auct. *Joan. Theoph. Sanio*, prof. math. Regiomontano.	I.	1
2.	Dato systemate n aequationum linearium inter n incognitas, valores incognitarum per integralia definita $(n-1)$tuplicia exhibentur. Scr. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.	I.	51
4.	Über den Steinerschen Satz von den Primzahlen im vierten Hefte des 13ten Bandes dieses Journals. Von Demselben.	I.	64
7.	Beweis dreier Lehrsätze, mitgetheilt von Steiner, Bd. 13. S. 361 und 362, nebst zwei anderen Aufgaben. Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.	I.	76
12.	Über unendlich verschiedene Entwickelungen der Potenzen der Cosinus und Sinus. Von Herrn Dr. *E. E. Kummer* zu Liegnitz.	II.	110
13.	Über die Integration der Differentialgleichungen von der Form $dz = Hdx+Kdy+Ldp+Mdq+Ndr+$ etc. Von Herrn *Joseph L. Raabe*, Prof. der Math. zu Zürich.	II.	123
14.	Integralia elliptica tertiae speciei reducendi methodus simplicior, quae simul ad ipsorum applicationem facillimam et computum numericum expeditum perducit. Sectionum conico-sphaericarum quadratura et rectificatio. Auct. Dr. *Chr. Gudermann*, prof. math. Monast. Guestph. . .	II.	169
16.	Continuatio hujus Dissert.	III.	185
15.	Methodus nova et simplex computandi valores integralium $\int_0^{\varphi} P\partial\varphi$, et iteratorum $\iint P\partial\varphi^2$, $\iiint P\partial\varphi^3$ etc., in quibus P est functio qualiscunque quantitatis $\sin\varphi$ sive $\cos\varphi$ per series rapide convergentes. Eodem auct.	II.	182
17.	Über das Rationalmachen algebraischer Gleichungen. Von Herrn Prof. Dr. *Förstemann* zu Danzig.	III.	236
18.	Summenrechnung der durch einfache Functionen erzeugten Reihen. Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg. (Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI., No. 24. Band XII., und No. 22., 23. und 24. Band XIII.) .	III.	262
23.	Fortsetzung dieser Abhandlung.	IV.	330
19.	De compositione numerorum e cubis integris positivis. Auctore *Zornow*, in Gymnasio Kneiphofiano Regiomontano magistro superiore. . . .	III.	276
20.	Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum, inter duas variabiles propositarum. Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.	IV.	281
22.	Über die Auflösung der numerischen Gleichungen mit Einer Unbekannten. Von Herrn Dr. *Dirksen*, Prof. ord. an der Universität zu Berlin. (Ein Auszug aus einer, am 7. Mai d. J. in der Königl. Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)	IV.	316

Nr. der Abhandlung. Heft. Seite.

2. Geometrie.

3. Zur Theorie der Curven. Von Herrn *C. G. J. Jacobi*, Prof. ord. an der Universität zu Königsberg in Pr. . . . . I. 56
5. Zur Theorie des Kreises. . . . . I. 66
6. Von der Lage der Ebenen und Linien im Raume. Von Herrn Prof. *Koppe* zu Soest in Westphalen. . . . . I. 70
8. Einfache Construction der Tangente an die allgemeine Lemniscate. Von dem Herrn Prof. Dr. *Steiner* zu Berlin. . . . . I. 80
9. Beiträge zur Discussion des Eulerschen Lehrsatzes von Polyëdern, in Beziehung auf die neulich bemerkten Ausnahmen desselben. Von Herrn *L. C. Schulz v. Strasznicki*, o. ö. Prof. der Mathematik am k. k. Lyceum zu Laibach. . . . . II. 83
11. Nova curvas investigandi methodus. Auct. Dr. *A. Tellkampf*, prof. in Gymn. Hammonensi. . . . . II. 93

3. Mechanik.

21. Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpuncte nicht paralleler Kräfte. Von Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin. . . . . IV. 289

Aufgaben und Lehrsätze.

10. Lehrsätze und Aufgaben, erstere zu beweisen, letztere aufzulösen. Vom Herrn Prof. Dr. *Steiner*. . . . . I. 88

Druckfehler-Verzeichnifs. . . . . IV. 380

1.

De functionum ellipticarum multiplicatione et transformatione, quae ad numerum parem pertinet, commentatio.

(Auct. *Joan. Theoph. Sanio*, prof. math. Regiomontano.)

Introductio.

Abel et *Jacobi*, viri clarissimi, qui functionum, quae ab ill^mo *Legendre* ellipticae appellatae sunt, theoriam novis fundamentis superstruxerunt, formulas generales de transformatione et multiplicatione, quae ad numerum imparem quemcunque pertinet (vid. *Jacobi* Fundam. n. pag. 18), jam diu proposuerunt; formulas vero ad casum, quo numerus ordinis par est, pertinentes, etsi non prorsus silentio praeterierunt, tamen, quum intelligerent, eas ex transformatione secundi ordinis, quoties oporteat, repetita et transformationibus imparis ordinis componi posse, non accuratius prosecuti sunt. Quum autem formulae, illi casui accommodatae, multa quidem ratione formulis ab illis viris cll. datis similes, tamen multa alia propria habeant, eas eruere operae pretium visum est. Quamquam deinde Cl. *Ivory*, Anglicus geometra, formulas transformationis et imparis et paris ordinis primarias deduxit, atque demonstravit (vid. „*Philosophical transactions*" anni 1831 pag. 350), tamen, quum quaestionem tantum ad transformationes reales restrinxerit, nonnulla non satis illustraverit (ex. gr. cur functio $\left[1-\sin^2 \mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)\right]$ quadratum completum sit) atque multa transformationis ad parem ordinem pertinentis propria non commemoraverit, hoc scriptum edere, haud prosus inutile nobis visum est.

Significationes et formulas, quas e Cl^i *Jacobi* scriptis notas supponimus, hic breviter in conspectum ponere placet.

Si integrale ellipticum primae speciei

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2 \sin^2 \varphi)}} = u$$

ponimus, angulus φ, qui pendet ab ipso u et modulo $\varkappa$, amplitudo ipsius u nominatur, seu brevius scribitur: $\mathrm{am}(u, \varkappa)$, ita ut sit:

$$\sin\varphi = \sin\mathrm{am}(u, \varkappa)$$
$$\sqrt{(1-\sin^2\varphi)} = \cos\mathrm{am}(u, \varkappa).$$

Ipsum u argumentum dicitur harum functionum $\sin\mathrm{am}(u, \varkappa)$, $\cos\mathrm{am}(u, \varkappa)$ etc., quas Cl. *Jacobi* ellipticas appellavit, ita ut, posito $\sin\mathrm{am}(u, \varkappa) = x$, sit

$$u = \mathrm{arg.}\sin\mathrm{am}\, x.$$

Modulus, a quo pendet amplitudo, sive uncis inclusus, ut antea, addetur, sive in margine adjicietur; quum vero in seqq. nullus additus erit, modulum $\varkappa$ mente suppleas.

Porro, si expressionem

$$\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)} = \frac{\partial(\mathrm{am}\, u)}{\partial u}$$

signo $\Delta\,\mathrm{am}\, u$ designamus, invenitur:

1. $\dfrac{\partial.\sin\mathrm{am}\, u}{\partial u} = \cos\mathrm{am}\, u\,\Delta\,\mathrm{am}\, u,$

2. $\dfrac{\partial.\cos\mathrm{am}\, u}{\partial u} = -\sin\mathrm{am}\, u\,\Delta\,\mathrm{am}\, u,$

3. $\dfrac{\partial(\Delta\,\mathrm{am}\, u)}{\partial u} = -\varkappa^2\sin\mathrm{am}\, u\cos\mathrm{am}\, u.$

Integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)}} = k$$

ponatur, atque eadem functio, quae ad moduli, quod dicitur, complementum $\varkappa' = \sqrt{(1-\varkappa\varkappa)}$ pertinet,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{\sqrt{(1-\varkappa'\varkappa'\sin^2\varphi)}} = k'.$$

Cum Cl^mo *Jacobi* deinde $(k-u)$ vocabimus complementum ipsius u, atque complementi amplitudinem brevius $\mathrm{coam}\, u$ scribemus, ita ut sit:

$$\mathrm{am}(k-u) = \mathrm{coam}\, u.$$

Ex qua significatione manant formulae (*Jac.* fund. pag. 31):

4. $\sin\mathrm{coam}\, u = \dfrac{\cos\mathrm{am}\, u}{\Delta\,\mathrm{am}\, u},$ 5. $\cos\mathrm{coam}\, u = \dfrac{\varkappa'\sin\mathrm{am}\, u}{\Delta\,\mathrm{am}\, u},$

6. $\Delta\,\mathrm{coam}\, u = \dfrac{\varkappa'}{\Delta\,\mathrm{am}\, u},$ 7. $\mathrm{tang}\,\mathrm{coam}\, u = \dfrac{1}{\varkappa'\,\mathrm{tang}\,\mathrm{am}\, u},$

Substitutione facta $\sin\varphi = i\,\mathrm{tang}\,\psi$, ubi $i = \sqrt{-1}$, facile reperies:

$$\int_0^{\varphi} \frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)}} = i\int_0^{\varphi} \frac{\partial\psi}{\sqrt{(1-\varkappa'\varkappa'\sin^2\psi)}}$$

unde fluit, si ponitur $\psi = \mathrm{am}(u.\varkappa')$

$$\varphi = \mathrm{am}(iu, \varkappa);$$

ergo

8. $\sin\mathrm{am}\, iu = i\,\mathrm{tang\,am}(u, \varkappa')$;

9. $\mathrm{tang\,am}\, iu = i\sin\mathrm{am}(u, \varkappa')$;

10. $\cos\mathrm{am}\, iu = \frac{1}{\cos\mathrm{am}(u, \varkappa')}$;

11. $\Delta\,\mathrm{am}\, iu = \frac{1}{\sin\mathrm{coam}(u, \varkappa')}$;

12. $\sin\mathrm{coam}\, iu = \frac{1}{\Delta\,\mathrm{am}(u, \varkappa')}$;

13. $\mathrm{tang\,coam}\, iu = \frac{-i}{\varkappa'\sin\mathrm{am}(u, \varkappa')}$;

14. $\sin\mathrm{am}(u + ik') = \frac{1}{\varkappa\sin\mathrm{am}\, u}$; $\sin\mathrm{am}\, ik' = \pm i.\infty$;

15. $\cos\mathrm{am}(u + ik') = \frac{-i\varkappa'}{\varkappa\cos\mathrm{coam}\, u}$;

16. $\Delta\,\mathrm{am}(u + ik') = -i\cot\mathrm{am}\, u$;

17. $\mathrm{tang\,am}(u + ik') = \frac{i}{\Delta\,\mathrm{am}\, u}$;

18. $\sin\mathrm{coam}(u + ik') = \frac{1}{\varkappa\sin\mathrm{coam}\, u}$;

et aliae.

Functiones ellipticae sunt dupliciter periodicae, i. e. non mutantur

I. $\sin\mathrm{am}\, u$ et $\sin\mathrm{coam}\, u$, si augeatur argumentum u quantitate $4k$ vel $2ik'$.

II. $\cos\mathrm{am}\, u$ et $\cos\mathrm{coam}\, u$, - - - - - - - - - - $4k$ - $2k + 2ik'$,

III. $\Delta\,\mathrm{am}\, u$ et $\Delta\,\mathrm{coam}\, u$, $\mathrm{tang\,am}\, u$ et $\mathrm{tang\,coam}\, u$ - - - - - - - - - - $2k$ - $4ik'$.

Quantitates $4k$ et $2ik'$ vel potius k et ik', et generalius $\omega = ak + bik'$, $i\omega' = ck + dik'$, ubi a, b, c, d numeri sunt integri, indices periodi functionis $\sin\mathrm{am}\, u$ appellabimus, si quidem $\sin\mathrm{am}\, u$, argumento u mutato in $u + 2\omega$ vel $u + 2i\omega'$, aut omnino aut quantitate non mutatur. E binis indicibus periodi permulti alii deduci possunt; nam e formulis

$$\sin\mathrm{am}(u + 2\omega) = \sin\mathrm{am}\, u, \qquad \sin\mathrm{am}(u + 2i\omega') = \sin\mathrm{am}\, u$$

sequitur $\sin\mathrm{am}(u + 2p\omega + 2p'i\omega') = \sin\mathrm{am}\, u$, ubi p et p' numeri integri quilibet sunt. Si vero inter numeros a, c, e, d, relatio valet: $ad - bc = \pm 1$, indices ω et $i\omega'$ conjugatos vocabimus, e quibus ambobus indices reliqui omnes componi possint.

Formulae *Eulerianae* de functionum ellipticarum additione fundamentales sunt:

19. $\sin\mathrm{am}(u \pm v) = \frac{\sin\mathrm{am}\, u\cos\mathrm{am}\, v\,\Delta\,\mathrm{am}\, v \pm \cos\mathrm{am}\, u\,\Delta\,\mathrm{am}\, u\sin\mathrm{am}\, v}{1 - \varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\, u.\sin^2\mathrm{am}\, v.}$,

20. $$\cos\mathrm{am}(u\pm v) = \frac{\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v \pm \sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\,\Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,v}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

21. $$\Delta\mathrm{am}(u\pm v) = \frac{\Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,v \pm \varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{am}\,v\cos\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,v}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,v},$$

unde fluunt multae aliae, (vid. Fund. pag. 32, 33) et hae (pag. 37)

22. $$-\frac{\sin\mathrm{am}(u+\alpha)\sin\mathrm{am}(u-\alpha)}{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,\alpha},$$

23. $$\frac{[1\pm\varkappa\sin\mathrm{am}(u+\alpha)][1\pm\varkappa\sin\mathrm{am}(u-\alpha)]}{\Delta^2\mathrm{am}\,\alpha} = \frac{[1\pm\varkappa\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{coam}\,\alpha]^2}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,\alpha},$$

24. $$\frac{[1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(u+\alpha)\sin^2\mathrm{am}\beta][1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}(u-\alpha)\sin^2\mathrm{am}\,\beta]}{[1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\beta)][1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}(\alpha-\beta)]} = \left(\frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\,\beta}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}\right)^2$$

[cf. *Jac.* Fund. §. 54. pag. 156. form. (5.)].

Si porro integrale ellipticum secundae speciei

$$\int_0^{\varphi}\sqrt{(1-\varkappa^2\sin^2\varphi)}.\partial\varphi = \int_0^{u}\Delta^2\mathrm{am}\,u\,.\,\partial u = E(u)$$

ponitur, invenire licet:

25. $$E(u+\alpha)+E(u-\alpha) = 2E(u) - \frac{2\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,\alpha},$$

[cf. *Jac.* Fund. pag. 138. Diar. *Crell.* vol. IV. tom. 4. pag. 376.],

26. $$E(u+\omega) = E(u)+E(\omega)-\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{coam}\,u,$$

ubi $\omega = (2p+1)k+2p'ik'$, p et p' numeri integri quilibet. Integrale $\int_0^u E(u)\,\partial u$ appellatur $\log\Omega(u)$, sive

$$\Omega(u) = e^{\int_0^u E(u)\,du}, \text{ ubi } e = 2{,}71828\ldots.$$

et derivatur formula (vid. l. l. pag. 378)

27. $$\frac{\Omega(u+\alpha)\Omega(u-\alpha)}{\Omega^2(u)\Omega^2(\alpha)} = 1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,\alpha.$$

Ab hac functione $\log\Omega(u)$ pendet integrale:

$$\Pi(u,\alpha,\varkappa) = \varkappa^2\sin\mathrm{am}\,\alpha\cos\mathrm{am}\,\alpha\,\Delta\mathrm{am}\,\alpha\int_0^u\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u\,\partial u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\,\alpha},$$

quod secundum eam, quam Cl. *Legendre* instituit, distributionem integralium ellipticorum ad speciem tertium pertinet; nam valet aequatio:

28. $$\Pi(u,a) = uE(a)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)}.$$

E functionum ellipticarum indole dupliciter periodica fluunt theoremata sequentia, quae, mutatis mutandis, jam a Cl^mo *Abel* partim demon-

strata, partim inde facile deducta, (in Diar. *Crell.* vol. II. pag. 112 seqq.; vol. IV. pag. 259. seqq.) sine demonstratione huc apponere satis habemus.

Quae et alia quo facilius signis exprimere possimus, in hac tota commentatiuncula literis p, p', q, q' numeros integros quoslibet et pares et impares, sed literis m et m' nihil nisi pares, μ et μ' nihil nisi impares numeros designabimus. His semel pronuntiatis, numerorum significationem singulis casibus repetamus non oportet.

Th. I. $\operatorname{sin\,am} u \pm \operatorname{sin\,am} a = 0$ si argumentum $u = \pm(-1)^p a + 2pk + 2p'ik'$,
$\operatorname{sin\,coam} u - \operatorname{sin\,coam} a = 0$ - - - $u = \pm a + 2mk + 2p'ik'$,
$\operatorname{sin\,coam} u + \operatorname{sin\,coam} a = 0$ - - - $u = \pm a + 2\mu k + 2pik'$.

II. $\operatorname{cos\,am} u - \operatorname{cos\,am} a = 0$ - - - $u = \pm a + 2(p+p')k + 2(p-p')ik'$,
$\operatorname{cos\,am} u + \operatorname{cos\,am} a = 0$ - - - $u = \pm a + 2pk + 2(p+u)ik'$,
$\operatorname{cos\,coam} u \pm \operatorname{cos\,coam} a = 0$ - - - $u = \pm(-1)^{p+p'} a + 2pk + 2p'ik'$.

III. $\left.\begin{matrix}\Delta\operatorname{am} u - \Delta\operatorname{am} a = 0\\ \Delta\operatorname{coam} u - \Delta\operatorname{coam} a = 0\end{matrix}\right\}$ - - - $u = \pm a + 2pk + 2mik'$,
$\left.\begin{matrix}\Delta\operatorname{am} u + \Delta\operatorname{coam} a = 0\\ a\operatorname{coam} u + \Delta\operatorname{coam} a = 0\end{matrix}\right\}$ - - - $u = \pm a + 2pk + 2\mu ik'$.

IV. $\operatorname{tang\,am} u \mp \operatorname{tang\,am} a = 0$ - - - $u = \pm(-1)^p a + 2pk + 2p'ik'$.

V. $\operatorname{sin\,am}(2pk + \mu ik') = \infty$ vel $= \pm i \cdot \infty$
$\operatorname{cos\,am}(2pk + \mu ik') = \infty$
$\Delta\operatorname{am}(2pk + \mu ik') = \infty$.

Ubi his in aequationibus sinistra parte singulum signum positum est, in valore argumenti u ambo signa posita simul valent: ubi vero et sinistra et dextra parte signa dupla inveniuntur, signum superius sinitra etiam in valore argumenti u superiori, inferius inferiori respondet.

Neque inveniri possunt ulli alii valores argumenti u, qui substituti aequationibus illis satisfaciant.

§. 1.

De functionum elllipticarum multiplicatione, quae ad numerum parem pertinet.

His adjuvantibus theorematis, functiones ellipticae sive functiones trigonometricae amplitudinis, quarum argumentum numero n pari multiplicatum est, eisdem argumenti simplicis functionibus facile exprimuntur. Sed antea demonstrandum est theorema, quo forma functionum inquirendarum constituitur.

Theorema VI. Si ponitur $\operatorname{sinam} u = x$, $\operatorname{sinam} nu = x_n$, atque n numerus quicunque integer par est, functiones x_n, $\sqrt{(1-x_n^2)}$, $\sqrt{(1-x^2x_n^2)}$ rep. formam induunt:

1. $\frac{x\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,U_{nn-4}}{V_{nn}}$, 2. $\frac{U'_{nn}}{V_{nn}}$, 3. $\frac{U''_{nn}}{V_{nn}}$,

si autem n est numerus quicunque impar, eaedem functiones resp. formam accipiunt:

1. $\frac{x\,U_{nn-1}}{V_{nn-1}}$, 2. $\sqrt{(1-xx)}\frac{U'_{nn-1}}{V_{nn-1}}$, 3. $\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\frac{U''_{nn-1}}{V_{nn-1}}$

ubi U, U', U'', V significant functiones elementi x integras rationales pares, singulas ejus ordinis, qui numeris appositis indicatur [v. *Abel* in Diar. *Crell.* vol. IV. pg. 258].

Nam ponamus

$$\sin\mathrm{am}\,p\,u = x_p = \frac{A_p}{D_p},\quad \sqrt{(1-x_p^2)} = \frac{B_p}{D_p},\quad \sqrt{(1-\varkappa^2x_p^2)} = \frac{C_p}{D_p},$$

ubi A_p, B_p, C_p, D_p significent functiones integras ipsius $x = \sin\mathrm{am}\,u$, ex theoremate *Euleriano* de functionum ellipticarum additione [vid. Introd. form. 18., 19., 20.] facile derivantur formulae sequentes:

$$x_{2p} = \frac{A_{2p}}{D_{2p}} = \frac{2A_p.B_p.C_p.D_p}{D_p^4-\varkappa^2A_p^4};\qquad \sqrt{(1-x_{2p}^2)} = \frac{B_{2p}}{D_{2p}} = \frac{B_p^2D_p^2-A_p^2C_p^2}{D_p^4-\varkappa^2A_p^4};$$

$$\sqrt{(1-\varkappa^2x_{2p}^2)} = \frac{C_{2p}}{D_{2p}} = \frac{C_p^2D_p^2-\varkappa^2A_p^2B_p^2}{D_p^4-\varkappa^2A_p^4}$$

atque e formula:

$$x_{p+q}.x_{p-q} = \frac{x_p^2-x_q^2}{1-\varkappa^2x_p^2.x_q^2},$$

$$x.x_{2p-1} = \frac{x.A_{2p-1}}{D_{2p-1}} = \frac{A_p^2D_{p-1}^2-D_p^2A_{p-1}^2}{D_p^2D_{p-1}^2-\varkappa^2A_p^2A_{p-1}^2},$$

$$\sqrt{(1-xx)}.\sqrt{(1-x_{2p-1}^2} = \sqrt{(1-xx)}.\frac{B_{2p-1}}{D_{2p-1}} = \frac{D_p^2.B_{p-1}^2-A_p^2.C_{p-1}^2}{D_p^2D_{p-1}^2-\varkappa^2A_p^2A_{p-1}^2},$$

$$\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}.\sqrt{(1-\varkappa^2x_{2p-1}^2)} = \sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}.\frac{C_{2p-1}}{D_{2p-1}} = \frac{D_p^2C_{p-1}^2-\varkappa^2A_p^2B_{p-1}^2}{D_p^2D_{p-1}^2-\varkappa^2A_p^2A_{p-1}^2}.$$

Jam potest demonstrari, formas functionum argumenti et $(2p-1)u$ et $2pu$ propositas valere, si eaedem valeant resp. pro argumentis pu et $(p-1)u$, sive p numerus impar sive par est. Si enim ordines expressionum A_p, B_p, C_p, D_p, A_{p-1}, B_{p-1}, C_{p-1}, D_{p-1} computaveris, reperies casibus ambobus:

1. $A_{2p} = x\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,U_{4pp-4}$, $D_{2p} = V_{4pp}$, $B_{2p} = U'_{4pp}$, $C_{2p} = U''_{4pp}$.

atque, posito brevitatis causa $(2p-1) = \mu$,

2. $A_\mu = x.U_{\mu\mu-1}$, $D_\mu = V_{\mu\mu-1}$, $B_\mu = \sqrt{(1-xx)}U'_{\mu\mu-1}$, $C_\mu = \sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}U''_{\mu\mu-1}$.

Termini, in quibus potestas est summa ipsius x, evanescere non possunt; nam functiones D_p^4, $B_p^2D_p^2$, $C_p^2D_p^2$, si p numerus par est, ordinis majoris, si p impar, ordinis minoris reperiuntur, quam illae resp. $\varkappa^2A_p^4$, $A_p^2C_p^2$,

$\varkappa^2 A_p^2 B_p^2$; functiones item $D_p^2 A_{p-1}^2$, $D_p^2 B_{p-1}^2$, $D_p^2 C_{p-1}^2$ casu primo ordinis majoris, casu secundo ordinis minoris sunt quam functiones resp. $A_p^2 D_{p-1}^2$, $A_p^2 C_{p-1}^2$, $\varkappa^2 A_p^2 B_{p-1}^2$.

Restat, ut probemus, functiones A_{2p}, B_{2p}, C_{2p} cum ipsa D_{2p}, atque A_μ, B_μ, C_μ cum ipsa D_μ nullum habere factorem communem, si quidem A_p, B_p, C_p, D_p et A_{p-1}, B_{p-1}, C_{p-1}, D_{p-1} nullum habeant.

Jam ponamus, expressionibus $A_{2p} = 2 A_p B_p C_p D_p$ et $D_{2p} = D_p^4 - \varkappa^2 A_p^4$ esse factorem communem, eum in una vel altera functionum A_p, B_p, C_p, D_p contineri elucet. Sed fugere non potest, quem habeant $D_p^4 - \varkappa^2 A_p^4$ et A_p, aut $D_p^4 - \varkappa^2 A_p^4$ et D_p factorem communem, eundem esse ipsius A_p et D_p, quas nullum habere statuimus. E causis eisdem tum $D_{2p} = D_p^4 - \varkappa^2 (D_p^2 - B_p^2)^2$ et B_p, tum $D_{2p} = D_p^4 - \frac{1}{\varkappa^2}(D_p^2 - C_p^2)^2$ et C_p factorem communem habere nequeunt, quem eundem non habeant resp. aut D_p et B_p aut D_p et C_p. Itaque apparet, fractionem $\frac{A_{2p}}{D_{2p}}$, ergo etiam et $\frac{B_{2p}^2}{D_{2p}^2} = \frac{D_{2p}^2 - A_{2p}^2}{D_{2p}^2}$ et $\frac{C_{2p}^2}{D_{2p}^2} = \frac{D_{2p}^2 - \varkappa^2 A_{2p}^2}{D_{2p}^2}$ in expressiones simplicissimas redactas esse, si fractiones $\frac{A_p}{D_p}$, $\frac{B_p}{D_p}$, $\frac{C_p}{D_p}$ divisore communi careant.

Si porro in functione:

$$x \cdot x_{2p-1} = \frac{x A_{2p-1}}{D_{2p-1}} = \frac{A_p^2 D_{p-1}^2 - D_p^2 A_{p-1}^2}{D_p^2 D_{p-1}^2 - \varkappa^2 A_p^2 A_{p-1}^2}$$

numerator cum denominatore factorem haberet communem, hoc ipso factore $= 0$ posito, prodiret tales valor ipsius x, quali efficiantur

$$\text{et } A_p^2 D_{p-1}^2 - D_p^2 A_{p-1}^2 = 0 \quad \text{et } D_p^2 D_{p-1}^2 - \varkappa^2 A_p^2 A_{p-1}^2 = 0,$$

sive

$$x_p^2 = x_{p-1}^2 \quad \text{et} \quad 1 - \varkappa^2 x_p^2 x_{p-1}^2 = 0,$$

unde sequeretur $x_p^2 = \pm \frac{1}{\varkappa}$. Sed valent quoque formulae:

$$x_{2p-1} = \frac{x_p \cdot \sqrt{(1-x_{p-1}^2)} \cdot \sqrt{(1-\varkappa^2 x_{p-1}^2)} + x_{p-1} \cdot \sqrt{(1-x_p^2)} \cdot \sqrt{(1-\varkappa^2 x_p^2)}}{1 - \varkappa^2 x^4 x_p^2 \cdot x_{p-1}^2}$$

$$= \frac{x_p^2 - x_{p-1}^2}{x_p \sqrt{(1-x_{p-1}^2)} \cdot \sqrt{(1-\varkappa^2 x_{p-1}^2)} - x_{p-1} \cdot \sqrt{(1-x_p^2)} \cdot \sqrt{(1-\varkappa^2 x_p^2)}},$$

ergo, quia $x_p^2 = x_{p-1}^2$

$$x_p^2 (1-x_{p-1}^2)(1-\varkappa^2 x_{p-1}^2) = 0 = x_{p-1}^2 (1-x_p^2)(1-\varkappa^2 x_p^2),$$

quod est absurdum, quia ex hox valor $x_p^2 = \pm \frac{1}{\varkappa}$ sequi non potest. Functiones igitur A_{2p-1} et D_{2p-1}, ergo etiam $B_{2p-1}^2 = D_{2p-1}^2 - A_{2p-1}^2$ et $C_{2p-1}^2 = D_{2p-1}^2 - \varkappa^2 A_{2p-1}^2$ cum ipsa D_{2p-1}^2 factorem communem non habent.

Qum igitur formae expressionum $\sin\mathrm{am}\,2pu$, $\cos\mathrm{am}\,2pu$, $\Delta\mathrm{am}\,2pu$, $\sin\mathrm{am}(2p-1)u$, $\cos\mathrm{am}(2p-1)u$, $\Delta\mathrm{am}(2p-1)u$ propositae valeant, si eaedem valent pro functionibus argumenti pu et $(p-1)u$, atque functiones argumenti $2u$ et $3u$ ex theoremate *Euleriano* ejusdem formae reperiantur, illae formae propositae valent in universum, quicunque sunt numeri $2p$ et $2p-1$.

Secundum theorema I., posito $\sin\mathrm{am}\,u = x$, $\sin\mathrm{am}\,nu = y$, si n numerus integer par est, $y = 0$ fieri videmus omnibus casibus, quibus argumentum $nu = mk + m'ik'$, sive $u = \frac{mk+m'ik'}{n}$, ubi m, m' numeri sunt quicunque pares, valore 0 non excluso, et positivi et negativi; itaque y talem esse functionem ipsius x, qualis evanescat pro valoribus ipsius $x = \sin\mathrm{am}\frac{mk+m'ik'}{n}$. Ex quibus valoribus innumeris, quorum multi inter se aequales reperiuntur, illos solos eligamus, qui non signo solum contrario sed quantitate inter se discrepent. Itaque satis habemus, investigare ipsius x valores, in quibus m et m' numeri sunt positivi. Sed quia

$$x = \sin\mathrm{am}\frac{(2pn+m)k+(2p'n+m')ik'}{n} = (-1)^p \sin\mathrm{am}\frac{mk+m'ik'}{n};$$

pro quoque valore ipsius x, cujus argumentum numeros m et m' ipsi $2n$ aut aequales aut eo majores implicat, semper datur alius illi aut omnino aut quantitate aequalis, cui insunt numeri m et m' ipso $2n$ minores. Porro ex his aequationibus:

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2n-m)k+(2n-m')ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{mk+m'ik'}{n};$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2n-m)k+m'ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{mk+(2n-m')ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{mk-m'ik'}{n};$$

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{mk}{n}+ik'\right) = \sin\mathrm{am}\left(\frac{mk}{n}-ik'\right);$$

$$\sin\mathrm{am}\left(k+\frac{m'ik'}{n}\right) = \sin\mathrm{am}\left(k-\frac{m'ik'}{n}\right)$$

satis elucet, quoniam valores ipsius x tantummodo quantitate diversos eligimus, numeros m et m' ipsum n non superantes poni posse, dummodo, ubi est numerus $m = 2, 4, 6, \ldots n-2$, numero m' valores $0, \pm 2, \pm 4, \ldots \pm(n-2), +n$ aut $-n$, ubi vero $m = 0$ vel $m = n$, ipso m' valores tantum positivos tribuamus. Ex quibus $\frac{n^2}{2}+2$ valoribus ipsius x postquam eos quatuor, in quibus m et $m' = 0$ vel $= n$ inter se conjun-

guntur, rejecimus, reliquos $\frac{n^2-4}{2}$ omnes quantitate diversos esse contendimus. Nam ponamus, illorum valorum duos esse aequales:

$$\text{sin am}\frac{mk+m'ik'}{n} = \pm \text{sin am}\frac{m''k+m'''ik}{n},$$

quorum in argumentis m, m', m'', m''', numeri sunt pares ex illis enumeratis ipsum n non superantibus, ipsum $\frac{m''k+m'''ik'}{n}$ formam habere $\pm\frac{mk+m'ik'}{n}+2qk+2q'ik'$, sive

$$m''k+m'''ik' = \pm mk \pm m'ik'+2nqk+2nq'ik'$$

esse oportet.

Hinc sequitur, si quidem m et m'', m' et m''' inter se diversi sunt, ergo numeri q et q' meram cifram superant, numerorum $m''=\pm m+2nq$, $m'''=\pm m'+2nq'$ semper certe unum ipso n majorem esse debere, ut evadat $\text{sin am}\frac{mk+m'ik'}{n} = \pm \text{sin am}\frac{m''k+m'''ik'}{n}$; binos igitur valorum, quos enumeravi, esse quantitate diversos, nec signo solo discrepare.

Quum vero sit $y=\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}.\frac{U_{nn-4}}{V_{nn}}$ functionem parem U_{nn-4} evanescere videmus pro eisdem ipsius x valoribus, quibus $y=0$ fit, nisi forte pro illis aut $x.\sqrt{(1-x^2)}.\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}$ evanescat, aut V_{nn} in infinitum abeat. Fit autem $x\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2xx)}=0$ pro ipso $x=\text{sin am}\frac{mk+m'ik'}{n}$, ubi $m=0$, $m'=0$, aut $m=\pm n$, $m'=0$, aut $m=n$, $m'=\pm n$; fit porro $V_{nn}=\infty$ pro $x=\infty$ sive pro $x=\text{sin am}\,ik'$, id est pro $m=0$, $m'=n$. Valores igitur quatuor supra rejecti factorem $\frac{x\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2xx)}}{V_{nn}}$ evanescentem reddunt; sed quum restant $\frac{n^2-4}{2}$ quantitate diversi, pro quibus U_{n-4} evanescere elucet, si illis signum et positivum et negativum tribuimus, invenimus functionem parem:

$$U_{nn-4} = A.\Pi\left(1-\frac{x^2}{\text{sin}^2\,\text{am}\frac{mk\pm m'ik'}{n}}\right)\text{*)}.$$

Numeris m, m' tribuuntur valores 0, 2, 4, ... $n-2$, n; valores tamen $m=\begin{cases}0\\n\end{cases}$, $m'=\begin{cases}0\\n\end{cases}$ inter se conjuncti excluduntur, atque ambo simul va-

*) Π et signum multiplicatorium, et postea Σ summatorium, saepius a Geometris usitata.

lent signa, nisi sit $m = 0$, vel $m = n$, vel $m' = n$. A est quantitas constans, quam e consideratione speciali determinare convenit.

Jam investigemus, quomodo functio V_{nn} exprimi possit. Quum autem sit $y = \frac{x\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}.U_{nn-4}}{V_{nn}}$, satis apparet, $y = \infty$ nullis fieri casibus, nisi quibus functio V_{nn} evanescat, ideoque fore, ut radices aequationis $V_{nn} = 0$ omnes cum iis ipsius x valoribus conveniant, quibus $y = \sin\mathrm{am}\, nu = \pm\infty$ efficiatur. Ex th. V. $\sin\mathrm{am}\, nu = \infty$ fit pro argumento $nu = mk + \mu ik'$, sive $u = \frac{mk+\mu ik'}{n}$, neque argumenta plura inveniri possunt, si m numerum quemque parem, μ imparem significat. Inde sequitur, functionem ipsius x, y, in infinitum abire pro omnibus valoribus ipsius $x = \sin\mathrm{am}\frac{mk+\mu ik'}{n}$. Quorum, si quidem nonnisi quantitate diversos eligimus, ex aequatione

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2np+m)k+(2np'+\mu)ik'}{n} = (-1)^p \sin\mathrm{am}\frac{mk+\mu ik'}{n}$$

rejiciendus est quisque, in quo numeri m et μ ipsum $2n$ superant aut adaequant, atque adeo, quia

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2n-m)k+(2n-\mu)ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{mk+\mu ik'}{n},$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2n-m)k+\mu ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{mk-\mu ik'}{n},$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{mk+(2n-\mu)ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{mk-\mu ik'}{n};$$

numeros m et μ ipsum n non superare, statuere licet, dummodo ipsi μ pro $m = 2, 4, 6, \ldots n-2$ valores et positivos et negativos ± 1, ± 3, $\pm 5, \ldots \pm(n-1)$, pro $m = 0$ et $m = n$ valores tantum positivi tribuamus. Quum vero restantes $\frac{nn}{2}$ valores ipsius x, pro quibus V_{nn} evanescit, omnino quantitate differre eodem, quam antea, modo facile probetur, neque plures diversi reperiantur; si tribuimus illis et signum positivum et negativum, invenimus functionem parem:

$$V_{nn} = \Pi\left(1 - \frac{xx}{\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}}\right)$$

ubi numeris m et μ valores sunt antea enumerati. Constans non est adscripta, quod constans A, supra adjecta, ipsi functioni $y = \frac{x\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2 xx)}\,U_{nn-4}}{V_{nn}}$

apta determinabitur. Quum enim y formam habeat $Ax\frac{f(x^2)}{F(x^2)}$, facile invenitur differentiatione:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=A\frac{f(x^2)}{F(x^2)}+\frac{2Ax^2}{F(x^2)}\cdot\frac{\partial f(x^2)}{\partial(x^2)}-\frac{2Ax^2f(x^2)}{F(x^2)F(x^2)}\cdot\frac{\partial F(x^2)}{\partial(x^2)}$$

et quia functiones $f(x^2)$ et $F(x^2)$ pro valore $x=0$ unitatem adaequant, functiones autem $\frac{\partial f(x^2)}{\partial(x^2)}$ et $\frac{\partial F(x^2)}{\partial(x^2)}$ in infinitum non abeunt, erit $A=\frac{\partial y}{\partial x}$, si, differentiatione facta, ipsa $x=0$ ponitur. Sed constat

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{n\sqrt{(1-yy)}\sqrt{(1-\varkappa^2yy)}}{\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2xx)}},$$

quia $\frac{\partial \sin\operatorname{am}u}{\partial u}=\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u$; ergo, quum functio y simul cum ipsa x evanescat, $A=n$.

Denominatori functionis y aliam formam induere licet; est enim secundum formulam (introd. 13.)

$$\sin\operatorname{am}(u\pm ik')=\frac{1}{\varkappa\sin\operatorname{am}u},$$

$$\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{\mu ik'}{n}}\right)=\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin\operatorname{am}\frac{\mu ik'}{n}\right),$$

$$\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\left(k+\frac{\mu ik'}{n}\right)}\right)=\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\left(k+\frac{\mu ik'}{n}\right)\right),$$

$$\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}}\right)=\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{mk\mp\mu ik'}{n}\right).$$

Quibus reductionibus adhibitis, evadit:

$$\text{I.}\quad y=\frac{n\varkappa\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2xx)}\,\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{mk\pm m'ik'}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}\right)}.$$

Numeri m et m' habent valores 0, 2, 4, 6, ... $n-2$, n, numerus μ vero 1, 3, 5, ... $n-1$; valores tamen $m=\begin{cases}0\\n\end{cases}$, $m'=\begin{cases}0\\n\end{cases}$ inter se conjungi nequeunt, atque valent ambo simul signa, nisi est $m=0$, aut $m=n$, aut $m'=n$.

Functionum deinde $\sqrt{(1-yy)}=\frac{U'_{nn}}{V_{nn}}$, $\sqrt{(1-\varkappa^2yy)}=\frac{U''_{nn}}{V_{nn}}$ numeratores solos erui opus est, quia denominator idem est V_{nn}.

Ex theor. II. pro $a = k$ sequitur, functionem $\sqrt{(1-yy)} = \cos\mathrm{am}\, nu$ evanescere pro valore argumenti $u = \frac{\mu k + m i k'}{n}$ sive pro $x = \sin\mathrm{am}\frac{\mu k + m i k'}{n}$, si numeris μ et m omnes, quos licet, valores tribuas. Quibus e valoribus ipsius x si diversos tantum eligere placet, omitti possunt omnes, in quibus μ vel $m \geqq n$ reperiuntur, quia est:

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2np+\mu)k+(2np'+m)ik'}{n} = (-1)^p \sin\mathrm{am}\frac{\mu k + m i k'}{n}$$

atque adeo per aequationes:

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2n-\mu)k+(2n-m)ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{\mu k + m i k'}{n},$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{(2n-\mu)k+mik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{\mu k - m i k'}{n},$$

$$\sin\mathrm{am}\frac{\mu k+(2n-m)ik'}{n} = \sin\mathrm{am}\frac{\mu k - m i k'}{n}$$

pro μ et m omnes numeros ipso n non majores ponere licet, sed ubi $m < n$, et positivos et negativos. Itaque de omnibus ipsius x valoribus $\frac{nn}{2}$ relinquuntur, quos inter se omnes quantitate differre, facile, ut antea, monstratur. Quorum nullus quum in infinitum abeat, et omnes functionem $\cos\mathrm{am}\, nu = \frac{U'_{nn}}{V_{nn}} = 0$ efficiant, eisdem ipsam $U'_{nn} = 0$ fieri satis elucet. Ergo ponimus:

$$U'_{nn} = \Pi\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu k \pm m i k'}{n}}\right)$$

et

$$\text{II.} \quad \sqrt{(1-yy)} = \cos\mathrm{am}\, nu = \frac{\Pi\left(1 - \frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu k \pm m i k'}{n}}\right)}{\Pi\left(1 - \varkappa^2 x^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{mk \pm \mu i k'}{n}\right)};$$

Numero m tribuendi sunt valores 0, 2, 4, ... n, numero μ vero 1, 3, 5, ... $n-1$; pro valore $m = n$, in denominatore etiam pro $m = 0$, unum tantum signum valet.

Constantem adscribi non opus est, quia posito $x = 0$, utraque aequationis pars $= 1$ redditur.

Prorsus eodem modo, quum e theor. III., posito $a = k \pm ik'$, sequatur, functionem $\sqrt{(1-\varkappa^2 yy)} = \Delta\,\mathrm{am}\, nu = \frac{U''_{nn}}{V_{nn}}$ evanescere pro ipsius

u valoribus $\frac{\mu k+\mu' ik'}{n}$ sive pro $x = \sin am \frac{\mu k+\mu' ik'}{n}$; tota valorum multitudo reducitur in $\frac{nn}{2}$ omnino diversos et finitos, in quibus numerus $\mu = 1, 3, 5, \ldots n-1$, $\mu' = \pm 1, \pm 3, \ldots \pm(n-1)$, qui et ipsam $U''_{nn} = 0$ efficiunt. Unde ponere licet:

$$U''_{nn} = \Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 am \frac{\mu k \pm \mu' ik'}{n}}\right)$$

sive reductionibus adhibitis facilibus per aequationem

$$\sin am (u \pm ik') = \frac{1}{\varkappa \sin am u},$$

$$U''_{nn} = \Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 am \frac{\mu k \pm \mu' ik'}{n}\right);$$

ergo

$$\text{III.} \quad \sqrt{(1-\varkappa^2 y y)} = \Delta am\, nu = \frac{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 am \frac{\mu k \pm \mu' ik'}{n}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 am \frac{mk \pm \mu ik'}{n}\right)}.$$

Numero m tribuuntur valores $0, 2, 4, \ldots n$, numeris μ et μ' valores $1, 3, 5, \ldots n-1$; in denominatore pro $m = 0$ et $m = n$ unum tantum signum valet.

Factorem constantem adjiciendum unitati aequalem esse, posito $x = 0$, satis apparet.

Corollarium. His in formulis omnibus si parte dextra pro signo sin am, sin coam ponitur, numeri m, m', μ' μ', valores eosdem retinent.

§. 2.

Brevitatis causa in seqq. signis multipl. Π_1, Π_2, Π_3, Π_0, alicui functioni praefixis indicabimus, numeris m, m', μ, μ', quorum nonnullos functio ita designata implicat, eosdem tribuendos esse valores, quos habent resp. in functionis U_{nn-4}, U'_{nn}, U''_{nn}, V_{nn}. Itaque erit:

$$\text{I.} \quad y = \frac{n x \sqrt{(1-x x)} \sqrt{(1-\varkappa^2 x x)}\, \Pi_1\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 am \frac{mk \pm m' ik'}{n}}\right)}{\Pi_0\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 am \frac{mk \pm \mu ik'}{n}}\right)},$$

$$\text{II.} \quad \sqrt{(1-y y)} = \frac{\Pi_2\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 am \frac{\mu k \pm mik'}{n}}\right)}{\Pi_0\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 am \frac{mk \pm \mu ik'}{n}\right)},$$

$$\textbf{III.}\quad \sqrt{(1-\varkappa^2 yy)} = \frac{\Pi_3\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{\mu k \pm \mu' i k'}{n}\right)}{\Pi_0\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{mk \pm \mu i k'}{n}\right)}.$$

Significatio similis in seqq. est signis summatoriis Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_0.

Quum per formulam $\sin \mathrm{am}\,(v + ik') = \frac{1}{\varkappa}$ facile inveniantur expressiones:

$$\Pi_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{mk \pm m' i k'}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\varkappa^{\frac{nn}{2}-2}},$$

$$\Pi_0 \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{mk \pm \mu i k'}{n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\varkappa^{\frac{nn}{2}}};$$

ex aequatione (I.) sequitur:

$$0 = \Pi_0\left(x^2 - \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{mk \pm \mu i k'}{n}\right)^2 - \frac{n}{\varkappa^4 y^2} x^2 (1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)\,\Pi_1\left(x^2 - \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{mk \pm m' i k'}{n}\right)^2.$$

Cujus aequationis $n\,n^{\mathrm{ti}}$ ordinis si investigantur radices, quantitate innota posita x^2, una extemplo emergit, atque satis nota est: $x^2 = \sin^2 \mathrm{am}\,u$, quippe qua in suppositione valeat aequatio I.; sed magno sine studio cognoscitur, illius aequationis radices esse omnes quoque eos $\sin^2 \mathrm{am}$; qui, argumentis numero n multiplicatis, ipsi y^2 aequantur; ergo ex theor. I. radices continentur in formula:

$$x^2 = \sin^2 \mathrm{am}\left((-1)^p u + \frac{2pk + 2p' i k'}{n}\right)$$

si tribuuntur numeris p, p' successive valores 0, 1, 2, ... $n-1$. In hos enim semper reduci possunt omnes alii $\sin^2 \mathrm{am}$, in quibus p, p' vel negativi vel ipso n majores ponuntur; neque harum radicum bini inter se aequales sunt, nisi pro valoribus specialibus ipsius u. Nam si ponimus ex. gr.

$$x^2 = \sin^2 \mathrm{am}\left((-1)^q u + \frac{2qk + 2q' i k'}{n}\right) = \sin^2 \mathrm{am}\left((-1)^p u + \frac{2pk + 2p' i k'}{n}\right),$$

ubi literae p, p', q, q' numeros designant ipso n minores, oportet esse:

$$(-1)^q u + \frac{2qk + 2q' i k'}{n} = (-1)^p u + \frac{2pk + 2p' i k'}{n} + 2rk + 2r' i k',$$

sive

$$(-1)^q nu + 2qk + 2q' i k' = (-1)^p nu + 2(p + nr)k + 2(p' + nr')ik',$$

unde

$$q = p + nr, \quad q' = p' + nr'.$$

Sed quemcunque valorem positivum vel negativum numeris r, r' tribuamus, nunquam reperiuntur numeri q et q' positivi ipsum n non superan-

tes. Quibus omnibus collectis, sequitur aequatio identica:

$$1.\quad \Pi_0\left(x^2-\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n_i}\right)^2-\frac{n^2}{\varkappa^4y^2}x^2(1-xx)(1-\varkappa^2xx)\Pi_1\left(x^2-\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm m'ik'}{n}\right)^2$$
$$=\Pi\left[x^2-\sin^2\mathrm{am}\left((-1)^pu+\frac{2pk+2p'ik'}{n}\right)\right]$$

cujus in utraque parte potestas maxima in unitatem ducta est. Inde concludere licet, coefficientes utriusque partis, qui in easdem ipsius x^2 potestates ducti sunt, aequales esse, ex. gr. coefficientes potestatum $(x^2)^0$, sive terminos constantes:

$$2.\quad \Pi\sin^2\mathrm{am}\left((-1)^pu+\frac{2pk+2p'ik'}{n}\right)=\Pi_0\sin^4\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}=\frac{1}{\varkappa^{nn}}$$

Sed haec formula nihil novi suppeditat, quia in utraque ejus parte per formulam $\mathrm{sin\,am}\,v\,.\,\mathrm{sin\,am}(v+ik')=\frac{1}{\varkappa}$ bini factores $=\frac{1}{\varkappa}$ facile inveniuntur.

Coefficientes deinde potestatum et x^{2nn-2} et x^2 in utraque parte aequationis 1. inter se comparati efficiunt:

$$a)\quad \Sigma\sin^2\mathrm{am}\left((-1)^pu+\frac{2pk+2p'ik'}{n}\right)=\frac{n^2}{\varkappa^2y^2}+2\Sigma_0\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu k\pm\mu ik'}{n},$$

$$b)\quad \Sigma\frac{1}{\sin^2\mathrm{am}\left((-1)^pu+\frac{2pk+2p'ik'}{n}\right)}=\frac{n^2}{y^2}+2(-1)^{\frac{n}{2}}\varkappa^{\frac{nn}{2}}\Sigma_0\frac{1}{\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}}$$

sive:

$$\Sigma\sin^2\mathrm{am}\left((-1)^pu+\frac{2pk+2p'ik'}{n}\right)=\frac{n^2}{\varkappa^2y^2}+2(-1)^{\frac{n}{2}}\varkappa^{\frac{nn}{2}}\Sigma_0\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n},$$

unde sequitur:

$$3.\quad \Sigma_0\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}=0,$$

$$4.\quad \Sigma\sin^2\mathrm{am}\left((-1)^pu+\frac{2pk+2p'ik'}{n}\right)=\frac{n^2}{\varkappa^2y^2},$$

$$\left.\begin{matrix}p\\p'\end{matrix}\right\}=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ n-1,$$

sive, si mutatur u in $u+\frac{ik'}{n}$, et peraguntur transformationes faciles,

$$5.\quad n^2y^2=n^2\sin^2\mathrm{am}\,nu=\Sigma\sin^2\mathrm{am}\left(u\pm\frac{mk\pm\mu ik'}{n}\right).$$

Numero m tribuuntur valores 0, 2, 4, ... n, numero μ vero 1, 3, 5 ... ... $n-1$. Signa $\pm$, $\pm$, nisi $m=0$ aut $m=n$ valent omnimodis inter se conjuncta; pro $m=0$ et $m=n$ signa $\pm$ priora valent, aut posteriora.

E formula 4. pro valoribus argumenti u singularibus fluunt hae:

$$6. \quad \Sigma_2 \sin^2 \mathrm{am} \frac{\mu k \pm m i k'}{n} = \frac{nn}{2\varkappa^2},$$

$$7. \quad \Sigma_3 \sin^2 \mathrm{am} \frac{\mu k \pm \mu' i k'}{n} = \frac{nn}{2}.$$

Corollarium. Quum e formula 3. sequatur haec:

$$\Sigma_0 \left(\frac{1}{\sin^2 \mathrm{am} \frac{mk \pm \mu i k'}{n}} \right) = 0$$

atque expressiones:

$$-\varkappa^2 \Sigma_0 \sin^2 \mathrm{am} \frac{mk \pm \mu i k'}{n}$$

et

$$-\varkappa^{nn-2} \Pi_0 \sin^2 \mathrm{am} \frac{mk \pm \mu i k'}{n} . \Sigma_0 \frac{1}{\sin^2 \mathrm{am} \frac{mk \pm \mu i k'}{n}}$$

coefficientes sint resp. potentiarum x^2 et x^{nn-2} in functione V_{nn}, hac in denominatore functionis y termini potestatum x^2 et x^{nn-2} desunt.

Quo alio modo functiones $\sin \mathrm{am}\, nu = y$, $\cos \mathrm{am}\, nu$, $\Delta \mathrm{am}\, nu$ per duas transformationes n^{ti} ordinis componi possint, in plagulis posterioribus ostendetur.

Nunc vero nonnulla adjicienda sunt de multiplicatione integralium ellipticorum secundae et tertiae speciei.

§. 3.

E formula 5. §^{i} 2. sequitur haec:

$$n^2 \Delta^2 \mathrm{am}\, nu = \Sigma \Delta^2 \mathrm{am} \left(u \pm \frac{mk \pm \mu i k'}{n} \right),$$

quae per du multiplicata et insuper integrata inter limites 0 et u, praebet hanc aliam de multiplicatione functionis $E(u)$ (vid. introd. fin.), quod ex tribus generibus integralium ellipticorum secundum est:

$$1. \quad nE(nu) = \Sigma \left[E\left(u \pm \frac{mk \pm \mu i k'}{n} \right) \right].$$

Numero m tribuuntur valores $0, 2, 4, 6, \ldots n$, numero μ vero $1, 3, 5, \ldots \ldots n-1$. Signa $\pm$, $\pm$ valent, nisi $m = 0$ aut $m = n$, omnimodo inter se conjuncta, pro $m = 0$ et $m = n$ signa $\pm$ priora valent, signum vero solum $+$ posterius.

Haec formula, advocata illa (introd. 25.)

$$E(u+\alpha) + E(u-\alpha)$$
$$= 2E(u) - 2\varkappa^2 \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, u \, \Delta \mathrm{am}\, u \frac{\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha},$$

hanc formam induit:

$$2. \quad nE(nu) = n^2E(u) - 2\varkappa^2 \operatorname{sin\,am} u \operatorname{cos\,am} u \,\Delta\operatorname{am} u\, \Sigma_0 \frac{\sin^2 \operatorname{am} \frac{mk \pm \mu ik'}{n}}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} \frac{mk \pm \mu ik'}{n}} \text{ *).}$$

E quibus duabus expressionibus functionis $E(nu)$, integratione facta, eruere licet expressiones functionis $\Omega(nu)$ sive formulas de multiplicatione functionis $\Omega(u)$ (vid. introd. fin.), ad quam Cl. *Jacobi* integralia tertiae speciei elliptica reduxit:

$$3. \quad \Omega(nu) = \frac{\Pi\left[\Omega\left(u \pm \frac{mk \pm \mu ik'}{n}\right)\right]}{\Pi\left[\Omega^2\left(\frac{mk \pm \mu ik'}{n}\right)\right]}.$$

Valent numeri m, μ et signa $\pm$ perinde atque in formula (1.)

$$\frac{\Omega(nu)}{\Omega^{nn}(u)} = \Pi_0\left(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} \frac{mk \pm \mu ik'}{n}\right).$$

Quarum expressionum unam ex altera quoque deducere licet ope formulae gravissimae:

$$\frac{\Omega(u+\alpha).\Omega(u-\alpha)}{\Omega^2(u).\Omega^2(\alpha)} = 1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} \alpha.$$

His praemissis formulis, facile conflatur multiplicatio integralis elliptici, quod ad tertiam speciem pertinet:

$$\Pi(u, a, \varkappa) = \varkappa^2 \operatorname{sin\,am} a \operatorname{cos\,am} a \,\Delta\operatorname{am} a \int_0^u \frac{\sin^2 \operatorname{am} u \,\partial u}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} u}.$$

E formula enim (introd. 28.) sequitur:

$$\Pi(nu, na) = nuE(na) + \tfrac{1}{2} \log \frac{\Omega n(u-a)}{\Omega n(u+a)}$$

sive, substitutis ipsorum $\Omega n(u-a)$ et $\Omega n(u+a)$ valoribus,

$$5. \quad \Pi(nu, na) = nuE(na) + \frac{nn}{2} \log \frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + \tfrac{1}{2}\Sigma_0 \log \left\{ \frac{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(u-a) \sin^2 \operatorname{am} \frac{mk \pm \mu ik'}{n}}{1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}(u+a) \sin^2 \operatorname{am} \frac{mk \pm \mu ik'}{n}} \right\}$$

vel alio modo:

$$6. \quad \Pi(nu, na) = nuE(na) + \tfrac{1}{2}\Sigma \log \frac{\Omega\left(u \pm \frac{mk \pm \mu ik'}{n} - a\right)}{\Omega\left(u \pm \frac{mk \pm \mu ik'}{n} + a\right)}.$$

---

*) De significatione Σ_0 et Π_0 vid. init. §i 2.

Numero m valores sunt: 0, 2, 4, ... n, numero μ: 1, 3, 5, ... $n-1$. Signa $\pm$, $\pm$ omnimodis inter se conjunguntur; si vero $m=0$ et $m=n$, signa $\pm$ tantum priora valent, signum $+$ solum posterius.

Inde fluunt, prout functiones Ω numeratoris et denominatoris termini extremi combinantur:

$$7.\quad \Pi(nu,na)+n^2uE(a)-nuE(na)=\Sigma\left[\Pi\left(u\pm\frac{mk\pm\mu ik'}{n},a\right)\right],$$

$$8.\quad \Pi(nu,na)=\Sigma\left[\Pi\left(u,a\pm\frac{mk\pm\mu ik'}{n}\right)\right].$$

Ex qua postrema vel alio modo obtinemus:

$$9.\quad \Pi(nu,na)-nn\Pi(u,a)=u\Sigma_0\frac{\partial\log}{\partial a}\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\Sigma_0\log\left(\frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(u-a)\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,(u+a)\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}}\right).$$

§. 4.

De functionum ellipticarum transformatione paris ordinis.

Integrale ellipticum

$$\int_0^y\frac{\partial y}{\sqrt{(1-yy)}\sqrt{(1-\lambda^2yy)}}$$

transformari posse in aliud ejusdem formae

$$\int_0^x\frac{\partial x}{M\sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2xx)}}$$

per substitutionem rationalem:

$$y=\frac{x(a+a'x^2+a''x^4+\ldots+a^{(m-1)}.x^{2m-2})}{1+b'x^2+b''x^4+\ldots+b^{(m)}x^{2m}}.$$

cujus dignitas maxima x^{2m} exponentem habet numerum parem, jam Cl. *Jacobi* in libro suo, quem inscripsit Fundamenta nova etc. generaliter demonstravit. Sed per sequentia elucebit, functionis illius y naturam multa ratione esse diversam a natura ejus functionis rationalis, quam ad numerum imparem pertinentem ille tractavit; aliam tamen inveniri posse irrationalem, ad numerum parem respicientem, cujus natura cum illa Fundamentorum substitutione magis conveniat. Hujus, quam inquisituri sumus, functionis exemplum, quod ad numerum parem 2 pertinet, jam perdiu exstat, illa substitutio *Landeniana*. Quum hanc substitutionem irrationalem generaliter adhiberi posse ostenderimus, formulas ipsas ad eam pertinentes proponemus et demonstrabimus.

Designentur signis U_p, V_q **functiones argumenti** x **rationales** p^{ti} **et** q^{ti} **ordinis, altera par, altera impar; sit porro**

$$y = \frac{U}{V} = \frac{\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}}{\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}} \frac{U_p}{V_q}$$

efficitur integrale ellipticum:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4)}} = \frac{V\partial U - U\partial V}{\sqrt{Y}}$$

ubi $Y = AV^4 + BV^2U^2 + CU^4$ **functio par est** $(4p+4)^{ti}$ **ordinis, si** $q \leqq p$ **esse ponimus.**

Functio autem $V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}$ **reperitur:**

$$V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{(\alpha+\beta x^2)(\alpha'+\beta' x^2)\left(V_q\frac{\partial U_p}{\partial x} - U_p\frac{\partial V_q}{\partial x}\right) + (\alpha'\beta - \beta'\alpha)xV_qU_p}{\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}}.$$

Substitutione igitur illa $y = \frac{U}{V}$ **expressio**

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(A+By^2+Cy^4)}}$$

transibit in aliam similem

$$\frac{\partial x}{M'\sqrt{(A'+B'x^2+C'x^4)}}$$

vel potius in

$$\frac{\partial x}{M\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}}$$

M **significante functionem ipsius** x **rationalem, si illa**

$$Y = AV^4 + BV^2U^2 + CU^4 = T^2,$$

quadratum completum, evadit. Ut vero haec functio $(4p+4)^{ti}$ **ordinis argumenti** x, **vel** $(2p+2)^{ti}$ **ipsius** x^2, **factores, respectu ipsius** x^2 **lineares, omnes duplices habeat, inter coefficientes ejus** $(p+1)$ **aequationes conditionales intercedere oportet. Constantium autem, quae in functionibus** U **et** V **reperiuntur, numerus est** $\frac{p+q+1}{2}+5$, **vel potius** $\frac{p+q+1}{2}+2$; **quia non mutatur** y, **si, quoties alter factor numeratoris aut denominatoris per unam aliquam constantium dividatur, per eandem alter multiplicatur; vel si functiones** U_p **et** V_q **per unam aliquam constantium simul dividuntur. Qui numerus numerum** $(p+1)$ **aequationum conditionalium vel aequat vel superat pro valoribus ipsius** q: **1)** $q = p-3$, **2)** $q = p-1$, **hisque casibus resp. evadit 1)** $p+1$, **2)** $p+2$. **Sed casum priorem rejiciendum esse, facile infra cognoscetur; casu autem secundo, quum numerus constantium**

numerum conditionum unitate superet, unam aliquam constantium ad arbitrium determinare licet.

Ut deinde videamus, num functio rationalis:

$$M = \frac{T}{\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right).\sqrt{(\alpha+\beta x^2).\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}}}$$

$$= \frac{T}{(\alpha+\beta x^2)(\alpha'+\beta' x^2)\left(V_q\frac{\partial U_p}{\partial x} - U_p\frac{\partial V_q}{\partial x}\right)+(\alpha'\beta-\beta'\alpha)x\,V_q\,U_p};$$

ut in ordinis imparis transformatione rationali, quantitas constans fiat, faciamus, functionibus U, V non esse factorem communem, quippe quo adjecto fractio $y = \frac{U}{V}$ minime mutetur. Resolvamus deinde functionem $A+By^2+Cy^4$ in duos factores, ita ut sit:

$$A+By^2+Cy^4 = A(1-a^2y^2)(1-c^2y^2)$$

sive

$$Y = AV^4+BV^2U^2+CU^4 = A(V^2-a^2U^2)(V^2-c^2U^2).$$

Quam functionem y si factor quis bis metitur, idem etiam unum aut alterum factorum $V^2-a^2U^2$, $V^2-c^2U^2$, bis metiatur, necesse est; nam factor quisque, qui functionibus et $V^2-a^2U^2$ et $V^2-c^2U^2$ communis esset, ipsis U^2 et V^2 communis esse deberet, quas nullum communem habere posuimus. Jam vero dantur aequationes:

$$U\frac{\partial U}{\partial x}(V^2-a^2U^2) - U^2\left(V\frac{\partial V}{\partial x} - a^2U\frac{\partial U}{\partial x}\right) = UV\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

$$U\frac{\partial U}{\partial x}(V^2-c^2U^2) - U^2\left(V\frac{\partial V}{\partial x} - c^2U\frac{\partial U}{\partial x}\right) = UV\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right)$$

ex quibus cognoscitur, qui factor unam aut alteram functionum $V^2-a^2U^2$, $V^2-c^2U^2$ bis, ideoque earum differentiale semel metiatur, eundem metiri expressionem

$$\left(V\frac{\partial U}{\partial x} - U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}.$$

Nam illi dextrae partis functioni $\frac{U.V}{\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}} = U_pV_q$ factorem cum una aut altera functionum $V^2-a^2U^2$, $V^2-c^2U^2$ communem esse non posse, satis elucet.

Quum igitur complexum factorum ipsam $Y = A(V^2-a^2U^2)(V^2-c^2U^2)$ bis metientium $= T$ posuerimus, ipsum T metietur expressionem:

$$\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}$$
$$=(\alpha+\beta x^2)(\alpha'+\beta' x^2)\left(V_q\frac{\partial U_p}{\partial x}-U_p\frac{\partial V_q}{\partial x}\right)+(\alpha'\beta-\beta'\alpha)x V_q U_p.$$

Quae quum pro valore $q=p-1$ fiat functio par $2(p+1)^{ti}$ ordinis ipsius x, atque ejusdem ordinis sit ipsum T, functionem rationalem:

$$\frac{T}{(\alpha+\beta x^2)(\alpha'+\beta' x^2)\left(V_q\frac{\partial U_p}{\partial x}-U_p\frac{\partial V_q}{\partial x}\right)+(\alpha'\beta-\beta'\alpha)x V_q U_p}=M$$

constantem fieri videmus.

Si numerus $q<p-1$ esset, functio

$$\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}.\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}$$

ordinis minoris evasisset, quam ipsa est T, quae illam metiri debet. Itaque evictum est, casum illum $q=p-3$ esse rejiciendum.

Eadem de causa functionum U_p, V_q utramque parem facere nequimus; hoc enim casu, etiam si $q=p$ ponamus,

$$\left(V\frac{\partial U}{\partial x}-U\frac{\partial V}{\partial x}\right)\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}$$

functio impar evadit $(2p+1)^{ti}$ ordinis, ergo minoris, quam ipsa est T.

His argumentis omnibus collectis, satis apparet, expressionem

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(A+By^2+C^4)}}$$ substitutione $$y=\frac{\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}}{\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}}\frac{U_p}{V_{p-1}}$$

transformari posse in hanc aliam

$$\frac{\partial x}{M\sqrt{(\alpha+\beta x^2)}\sqrt{(\alpha'+\beta' x^2)}}$$

ubi M est quantitas constans; atque insuper y unam constantem arbitrariam involvere.

Casum, quo p numerus par est, quippe qui suppeditet transformationem, quae facile e casu altero derivatur, missum faciamus. Casu autem altero supponamus, functionem $A+By^2+Cy^4$ formae esse $(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)$, atque adhibeamus illam constantem arbitrariam, ut eandem accipiat formam expressio $\left(1+\frac{\beta}{\alpha}x^2\right)\left(1+\frac{\beta'}{\alpha'}x^2\right)$, sive ut fiat aut $\frac{\beta}{\alpha}=-1$ aut $\frac{\beta'}{\alpha'}=-1$.

Tum hunc in modum exhiberi potest

Theorema.

Substitutione

$$y=\frac{U}{V}=\frac{\sqrt{(1-xx)}}{\sqrt{(1-z^2xx)}}\,\frac{U_\mu}{V_{\mu-1}}=\frac{\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-z^2x^2)}}\cdot\frac{x\left(a+a'x^2+a''x^4+\ldots+a^{\left(\frac{\mu-2}{2}\right)}x^{\mu-1}\right)}{1+b'x^2+b''x^4+\ldots+b^{\left(\frac{\mu-1}{2}\right)}x^{\mu-1}}$$

ubi μ numerus est integer impar, expressio

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}}$$

semper transformari potest in hanc

$$\frac{\partial x}{M.\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-z^2x^2)}}$$

ubi constans $\frac{1}{M}=\frac{\partial y}{\partial x}$ pro ipso $x=0$, est $=a$, coefficienti primae dignitatis x in functione U_μ, atque z^2 quantitas constans, quae simul cum μ constantibus functionum U_μ, $V_{\mu-1}$ ita determinanda est, ut fiat:

$$V^2-U^2=(1-z^2x^2)V_{\mu-1}^2-(1-x^2)\,U_\mu^2=AA,$$
$$V^2-\lambda^2U^2=(1-z^2x^2)V_{\mu-1}^2-\lambda^2(1-x^2)U_\mu^2=BB.$$

Signa A et B significant functiones ipsius x^2 rationales integras. Nec non valet theorema, si radicalium $\sqrt{(1-xx)}$, $\sqrt{(1-z^2x^2)}$ loca inter se commutantur.

Quam transformationem exhibitam ad numerum parem $(\mu+1)$ pertinere (cf. *Jac.* Fund. pag. 18), jam e numeratoris ordine, sed magis postea cognoscetur.

§. 5.

Jam demonstremus, si n est numerus par quilibet, index $\omega=ak+2bik'$, cujus numeri integri a impar, $2b$ par factorem communem non habeant, qui et ipse numerum n metiatur, posito $\sin\mathrm{am}\,u=x$, atque

1. $$y=\frac{U}{V}=\frac{x\sqrt{(1-x^2)}}{M\sqrt{(1-z^2x^2)}}\,\frac{\Pi\left(\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}\right)}{\Pi\left(1-z^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right)}$$

sive secundum formulam (introd. 21.)

$$y=(-1)^{\frac{n}{2}-1}\,\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\sin\mathrm{am}\,(u+\omega)\,\Pi\sin\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)}{\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n}};$$

deduci posse tum functiones $\sqrt{(1-y^2)}$ et $\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}$, tum formulam

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

si literae λ atque M significant resp. expressiones:

$$\lambda = \varkappa^n \Pi \sin^4 \mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n}; \qquad M = (-1)^{\frac{\alpha-1}{2}} \frac{\Pi \sin^2 \mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n}}{\Pi \sin^2 \mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}.$$

Et hoc loco et in seqq. ubique, nisi aliud diserte ponimus, litera m in functionibus signo multipl. Π aut summat. Σ praefixo designatis valores habebit $2, 4, 6, \ldots . n-2$, litera μ vero valores $1, 3, 5, \ldots . n-1$; signa $\pm$ ambo simul valent, ita ut numerus factorum aut summandorum duplicetur.

Annotatio. Formam functionis y secundam atque expressiones moduli λ et constantis M, quae prorsus conveniant cum formulis pro transformatione ordinis imparis respondentibus, signis aliis ab ipso electis exhibitas, pro numero n quocunque, et impari et pari, primus proposuit Cl. *Abel.* [vid. *Beiträge zu No.* 138. *der astronom. Nachrichten ann.* 1828.]

Ex ipsa forma functionis y secunda cognoscitur, y unitati aequalem fieri pro valore argumenti $u = \frac{\omega}{n}$, atque functionem y^2, si $u + \frac{2\omega}{n}$ vel $u + \frac{2p\omega}{n}$ loco ipsius u ponitur, immutatam manere. Hinc colligere licet, A designante quantitatem quamcunque constantem, $A^2 - y^2$ fnnctionem esse rationalem fractam, quae, argumento u abeunte in $u + \frac{2p\omega}{n}$, minime mutetur. Huic functioni ipsius x denominator cum ipsa y^2 idem est, quadratum VV; numerator, functio variabilis x^2 n^{ti} ordinis, si evanescere eum ponamus pro valore $x^2 = \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha$, evanescet etiam pro valoribus:

$$x^2 = \sin^2 \mathrm{am}\left(\alpha + \frac{2\omega}{n}\right), \quad \sin^2 \mathrm{am}\left(\alpha + \frac{4\omega}{n}\right), \quad \ldots . \quad \sin^2 \mathrm{am}\left(\alpha + \frac{2(n-1)}{n}\omega\right).$$

Si enim in functione $\frac{V^2A^2 - U^2}{V^2}$, $u + \frac{2p\omega}{n}$ pro ipso argumento u variabilis $x^2 = \sin^2 \mathrm{am}\,u$ substituimns, hanc functionem non mutatam evanescere oportet pro eodem valore $u = \alpha$, i. e. pro valore $x^2 = \sin^2 \mathrm{am}\left(\alpha + \frac{2p\omega}{n}\right)$.

Hae autem radices omnes aequationis $V^2A^2 - U^2 = 0$ in universum inter se diversae erunt. Nam ponamus, esse pro quoque valore ipsius α: $\sin^2 \mathrm{am}\left(\alpha + \frac{2p\omega}{n}\right) = \sin^2 \mathrm{am}\left(\alpha + \frac{2p'\omega}{n}\right)$, ubi p et p' numeri sunt integri diversi $< n$; sequitur

$$\sin\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2p\omega}{n}\right) = \pm\sin\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2p'\omega}{n}\right)$$

ergo

$$\alpha+\frac{2p\omega}{n} = \alpha+\frac{2p'\omega}{n}+2qk+2q'ik'$$

sive

$$\frac{p-p'}{n}.\omega = qk+q'ik'.$$

Quum vero $p-p'<n$ esse constat, atque numeros coefficientes indicis ω factorem cum ipso n communem non habere positum sit, $\frac{p-p'}{n}\omega = qk+q'ik'$ esse nequit. Sed si valores ipsius α speciales inveniri possint, pro quibus radicum illarum complures congruant; bono jure concludemus, aequationem $V^2A^2-U^2=0$ habere radices complures aequales.

Nam patet formulam valere, si loco radicum aequalium statuamus radices quantitate infinite parva inter se diversas.

Quum series radicum hoc quoque modo repraesentari possit:

$$x^2 = \sin^2\mathrm{am}\,\alpha,\quad \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2\omega}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{4\omega}{n}\right),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{n-2}{n}\omega\right)$$

$$= \sin^2\mathrm{am}(\alpha+\omega),\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha-\frac{2\omega}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha-\frac{4\omega}{n}\right),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha-\frac{n-2}{n}\omega\right)$$

sive

$$\sin^2\mathrm{am}\,\alpha,\quad \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2\omega}{n}\right),\quad \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{4\omega}{n}\right),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{n-2}{n}\omega\right),$$

$$\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\omega),\ \sin^2\mathrm{am}\left(-\alpha+\frac{2\omega}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(-\alpha+\frac{4\omega}{n}\right),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}\left(-\alpha+\frac{n-2}{2}\omega\right);$$

casus ille specialis evenit, si reperiatur:

$$\sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2p\omega}{n}\right) = \sin^2\mathrm{am}\left(-\alpha+\frac{2p'\omega}{n}\right)$$

ubi numeri p et p' sunt integri ipsum $\frac{n}{2}$ non superantes; unde sequitur:

$$\alpha+\frac{2p\omega}{n} = -\alpha+\frac{2p'\omega}{n},\quad \alpha = \frac{p'-p}{n}\omega.$$

Quum vero casu, quo p' et p ambo numeri sunt pares, una e radicum multitudine $x^2=0$ esse debeat, atque functionem y^2 simul cum x^2 evanescere cognoverimus, omnibus casibus, quibus quantitas A^2 a nihilo diversa, alterum numerorum p et p' imparem esse oportet. Ergo pro valore $\alpha=\frac{2r+1}{n}\omega$ duae radices aequales existunt; atque tunc etiam binas aequales obvenire, sine negotio intelligitur.

Casus deinde exstat secundus, quo radices aequales offeruntur. Is quidem, quo reperiatur:

$$\sin\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2p\omega}{n}\right)=\sin\mathrm{am}\left(\alpha-\frac{2p\omega}{n}\right).$$

Cui aequationi satisfieri videmus valore $\alpha=\mu k+mik'$, ubi μ numerum imparem, m parem significat. Hoc igitur casu radices numero $\frac{n}{2}-1$ reperiunt alias sibi aequales, sed $\sin^2\mathrm{am}\,\alpha$ evadit $=1$, $\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\omega)=\frac{1}{x^2}$.

Qua in solutione aequationis $V^2A^2-U^2=0$ quum ad formam indicis ω non respexerimus, sed uno solo proprio: „y^2 non mutari, si ponatur $u+\frac{2p\omega}{n}$ loco u;" nixi simus, eadem valebit pro indice $\omega_2=2ak+bik'$, ubi b numerus est impar. De hoc vero postea.

Radices igitur aequationis $V^2A^2-U^2=0$ omnes in universum inter se discrepare demonstravimus; neque plures diversae inveniuntur; si enim in serie illa valorum longius progrediaris, illae n, quas enumeravi, radices eaedem semper redeunt, quia $\sin^2\mathrm{am}$ est functio periodica, indice 2ω. Itaque ponere licet:

$$A^2-y^2=\frac{A^2\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2\omega}{n}\right)}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2(n-1)}{n}\omega\right)}\right)}{(1-\varkappa^2x^2)\left[\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{2\omega}{n}\right)\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{4\omega}{n}\right)\cdots\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{n-2}{n}\omega\right)\right]^2}.$$

Quum enim functio y^2 simul cum ipsa x^2 evanescat, constans in posteriori parte adjecta A^2 esse oportet. Argumentum α adhuc innotum ab ipso valore constantis A^2 pendere patet, atque pro unoquoque singulatim eruitur.

Pro valore $A^2=1$ ipsum $\alpha=\frac{\omega}{n}$ jam inventum est, quia valor $x=\sin\mathrm{am}\frac{\omega}{n}$ ipsam y unitati aequalem reddit. Quo casu radices aequationis $V^2-U^2=0$

$$\sin^2\mathrm{am}\frac{\omega}{n},\quad \sin^2\mathrm{am}\frac{3\omega}{n},\quad \sin^2\mathrm{am}\frac{5\omega}{n},\quad \ldots\quad \sin^2\mathrm{am}\frac{2n-1}{n}\omega$$

binas aequales evadere jam vidimus,

$$\sin^2\mathrm{am}\frac{2n-1}{n}\omega=\sin^2\mathrm{am}\frac{\omega}{n},\quad \sin^2\mathrm{am}\frac{2n-3}{n}\omega=\sin^2\mathrm{am}\frac{3\omega}{n},\quad \ldots$$

$$\sin^2\mathrm{am}\frac{n+1}{n}\omega=\sin^2\mathrm{am}\frac{n-1}{n}\omega.$$

Unde sequitur, functionem V^2-U^2 quadratum esse completum, atque

$$2.\quad \sqrt{(1-yy)} = \frac{\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am}\frac{\mu\omega}{n}}\right)}{\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{m\omega}{n}\right)}.$$

Ex qua formula facile deducitur tertia, monstrato, quod idem valet pro transformatione ordinum imparium, theoremate (cf. *Jac.* Fund. pag. 20, 42): „Si substituimus $\frac{1}{\varkappa x}$ loco x, functio y abit in $\frac{1}{\lambda y}$, ubi λ est quantitas constans." Quod theorema generalius ita exhibitur: Si substituimus $\sin\operatorname{am}(u+i\omega')$ loco $x=\sin\operatorname{am}u$, functio y evadit $\frac{1}{\lambda y}$ pro indice conjugato $i\omega'=mk+\mu' ik'$, sed $\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\lambda y}$ pro indice conjugato $i\omega'=\mu k+\mu' ik'$.

Substitutione peracta reperimus: $y=\frac{U}{V}$ evasisse

$$\frac{\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{m\omega}{n}\right)}{\varkappa^n M\,\Pi\sin^4\operatorname{am}\frac{m\omega}{n}.\,x\sqrt{(1-x^2)}\,\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{m\omega}{n}}\right)}$$

$$= -\frac{V}{M^2.\varkappa^n\,\Pi\sin^4\operatorname{am}\frac{m\omega}{n}.\,U} = \frac{1}{\lambda y}$$

si ponitur:

$$\lambda = M^2\varkappa^n\,\Pi\sin^4\operatorname{am}\frac{m\omega}{n} = \varkappa^n\,\Pi\sin^4\operatorname{am}\frac{\mu\omega}{n}.$$

Itaque, posito $\frac{1}{\varkappa x}$ loco x, abit quadratum formulae 2. in hanc:

$$1-\frac{1}{\lambda^2y^2} = -\frac{\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{\mu\omega}{n}\right)^2}{\lambda^2.U^2}$$

quae ducta in $\lambda^2y^2=\frac{\lambda^2U^2}{V^2}$ praebet:

$$3.\quad \sqrt{(1-\lambda^2y^2)} = \frac{\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{\mu\omega}{n}\right)}{\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{m\omega}{n}\right)}.$$

Sed quum intellexerimus in antecedentibus, si functiones $U=x\sqrt{(1-x^2)}\,U'$, $V=\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,V'$ ita determinentur, ut sit

$$V^2-U^2 = (1-\varkappa^2x^2)\,V'V' - x^2(1-x^2)\,U'U' = AA,$$
$$V^2-\lambda^2U^2 = (1-\varkappa^2x^2)\,V'V' - \lambda^2x^2(1-x^2)\,U'U' = BB,$$

ubi sunt U', V', A, B, functiones integrae rationales pares, posito

$y = \frac{U}{V} = \frac{x\sqrt{(1-x^2)}\,U'}{\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}\,V'}$, fore:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

$\frac{1}{M}$ significante quantitatem constantem, coefficientem dignitatis x^0 in functione U'; sequitur, e formulis propositis (1.), (2.), (3.) atque valoribus ipsorum M et λ, quibus est forma praescripta, fluere idem:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

Posito igitur $x = \sin\mathrm{am}\, u$, unde $\int_0^x \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}} = u$, fit:

$$\int_0^y \frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{u}{M}, \qquad y = \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right).$$

Quum functio $y = 1$ pro valore $x = \sin\mathrm{am}\frac{4p+1}{n}\omega$ inventa sit, atque non mutetur, si argumentum $\frac{u}{M}$ quantitate $\frac{2\omega}{nM}$ augetur, erit

$$\Lambda = \frac{\omega}{nM}$$

si litera Λ indicem periodi functionis $\sin\mathrm{am}(v, \lambda)$ designamus.

Coroll. I. Ex hac relatione inter transcendentes Λ et ω plane intelligitur, transformationem modo propositam ad numerum integrum n parem pertinere, in functione igitur y radicale numeratoris $\sqrt{(1-x^2)}$ ad ordinem transformationis complendum et ipsum esse adnumerandum. Hanc transformationem primam appellare convenit, quippe quae cum illa prima Cl. *Jacobi*, Fund. pag. 50 exposita plane congruat.

Coroll. II. Facile est intellectu, functiones

$$\sqrt{(1-y^2)} = \cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \quad \text{atque} \quad \sqrt{(1-\lambda^2 y^2)} = \Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$$

sub forma, illi formulae

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \sqrt[n]{\left(\frac{\varkappa^n}{\lambda}\right)} \sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+\omega) \prod \sin\mathrm{am}\left(u \pm \frac{m\omega}{n}\right)$$

respondente, exhiberi non posse; itaque moduli λ complementum λ' minus eleganter, quam casu, quo n numerus est impar, exprimitur formula:

$$\lambda' = \frac{1}{\Delta\mathrm{am}\frac{\omega}{n}} \cdot \frac{\prod\left(1-\varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{\omega}{n} \sin^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n}\right)}{\prod\left(1-\varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{\omega}{n} \sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right)}.$$

Coroll. III. Pro indice $\omega = ak + 2bik'$ facile derivatur formula $\sin\mathrm{am}(u \pm \omega) = (-1)^{\frac{a \mp 1}{2}} \sin\mathrm{coam}\, u$, vel $\sin\mathrm{am}\, u = (-1)^{\frac{a \mp 1}{2}} \sin\mathrm{coam}(u \mp \omega)$; unde sine studio cognoscitur, omnibus in formulis antea exhibitis $\sin^2\mathrm{am}\frac{2\omega}{n}$, $\sin^2\mathrm{am}\frac{4\omega}{n}$ etc., $\sin^2\mathrm{am}\frac{\omega}{n}$ etc., et ipsum $\sin^2\mathrm{am}\, u$ mutari posse sine errore cum $\sin^2\mathrm{coam}\frac{2\omega}{n}$, $\sin^2\mathrm{coam}\frac{4\omega}{n}$ etc., $\sin^2\mathrm{coam}\frac{\omega}{n}$ etc., $\sin^2\mathrm{coam}\, u$, ita ut ex. gr. etiam hae valent formulae:

$$M = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \cdot \frac{\Pi \sin^2\mathrm{coam}\frac{\mu\omega}{n}}{\Pi \sin^2\mathrm{coam}\frac{m\omega}{n}}; \qquad \lambda = \varkappa^n \Pi \sin^4\mathrm{coam}\frac{\mu\omega}{n};$$

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{\sin\mathrm{am}\, u \sin\mathrm{am}(u+\omega)}{n} \cdot \frac{\Pi\left(1 - \dfrac{\sin^2\mathrm{am}\, u}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{m\omega}{n}}\right)}{\Pi\left(1 - \varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\, u \sin^2\mathrm{coam}\frac{m\omega}{n}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\varkappa^n}{\lambda}\right)} \sin\mathrm{coam}\, u \sin\mathrm{coam}(u-\omega) \Pi \sin\mathrm{coam}\left(u \pm \frac{m\omega}{n}\right);$$

atque aliae.

§. 6.

E formula (1.) §^{i} 5. sequitur:

$$\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) = \frac{\varkappa^2 M^2}{\lambda^2} \cdot \frac{x^2(1-x^2)}{(1-\varkappa^2 x^2)} \cdot \frac{\Pi\left(x^2 - \sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right)^2}{\Pi\left(x^2 - \dfrac{1}{\varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}\right)^2}$$

ergo aequatio:

$$\frac{\lambda^2}{\varkappa^2 M^2} \sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)(1-\varkappa^2 x^2) \Pi\left(x^2 - \frac{1}{\varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}\right)^2 - x^2(1-x^2) \Pi\left(x^2 - \sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right)^2 = 0,$$

quae quum valeat pro ipso $x^2 = \sin^2\mathrm{am}\, u$, neque mutetur, si in $\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$ argumentum u abeat in $u \pm \frac{2p\omega}{n}$, radicibus quoque gaudeat necesse est:

$$\sin^2\mathrm{am}\left(u + \frac{2\omega}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(u + \frac{4\omega}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(u + \frac{6\omega}{n}\right),\ \ldots\ \sin^2\mathrm{am}\left(u + \frac{2(n-1)}{n}\omega\right),$$

sive

$$x^2 = \sin^2\mathrm{am}\, u,\ \sin^2\mathrm{am}\left(u + \frac{2\omega}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(u + \frac{4\omega}{n}\right),\ \ldots\ \sin^2\mathrm{am}\left(u + \frac{n-2}{n}\omega\right),$$

$$\sin^2\mathrm{am}(u+\omega),\ \sin^2\mathrm{am}\left(u - \frac{2\omega}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(u - \frac{4\omega}{n}\right),\ \ldots\ \sin^2\mathrm{am}\left(u - \frac{n-2}{n}\omega\right).$$

Quae quum omnes inter se discrepent, radices sunt omnes illius aequationis n^{ti} ordinis variabilis x^2; unde sequitur aequatio identica:

$$\frac{\lambda^2}{\varkappa^4 M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)(1-\varkappa^2x^2)\,\Pi\left(x^2-\frac{1}{\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}\right)^2-(1-x^2)\,x^2\,\Pi\left(x^2-\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right)$$

$$=[x^2-\sin^2\mathrm{am}\,u][x^2-\sin^2\mathrm{am}\,(u+\omega)]\,\Pi\left[x^2-\sin^2\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)\right];$$

cui constans factor non adjicitur, quia in utraque ejus parte potestas summa x^{2n} in unitatem ducta est.

Si coefficientes potestatis x^{2n-2} in utraque parte inter se conferuntur, invenitur:

1. $$\frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+2\varrho=\sin^2\mathrm{am}\,u+\sin^2\mathrm{am}\,(u+\omega)+\Sigma\sin^2\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)$$

ubi $2\varrho=1+2\Sigma\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}$, ergo

$$\frac{\lambda^2}{\varkappa^2M}+2\varrho=2\Sigma\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n},$$

2. $$\frac{\lambda^2}{\varkappa^2M}\cos^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\cos^2\mathrm{am}\,u+\cos^2\mathrm{am}\,(u+\omega)+\Sigma\cos^2\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)-2\sigma,$$

3. $$\frac{1}{M^2}\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\Delta^2\mathrm{am}\,u+\Delta^2\mathrm{am}\,(u+\omega)+\Sigma\Delta^2\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)+2\tau;$$

ubi sunt

$$2\sigma=n-2\varrho-\frac{\lambda^2}{\varkappa^2M^2}=2\Sigma\cos^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n},$$

$$2\tau=2\varkappa^2\varrho-n+\frac{1}{M^2}=2\Sigma\cot^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n},$$

quia $\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ evanescit pro valore $u=\frac{\omega}{n}+i\omega'$, si quidem significat $i\omega'$ indicem cum ipso ω conjugatum $2ck+dik'$ aut $c'k+dik'$, ubi numeri d et c' impares sunt, $2c$ par est.

E valore autem functionis $\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$, posito $\Delta\mathrm{am}\,u=z$, haec aequatio derivatur n^{ti} ordinis:

$$\Pi\left[z^2+\cot^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n}\right]-\frac{1}{M}\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)z\,\Pi\left[z^2+\cot^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right]$$

$$=[z-\Delta\mathrm{am}\,u][z\Delta\mathrm{am}\,(u+\omega)]\,\Pi\left[z-\Delta\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)\right];$$

unde colligitur:

4. $$\frac{1}{M}\Delta\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\Delta\mathrm{am}\,u+\Delta\mathrm{am}\,(u+\omega)+\Sigma\Delta\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)$$

atque summa ambarum ex eisdem functionibus Δ formatarum $=\Sigma\cot^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega}{n}$,

ergo, quod jam antea inventum,

$$\frac{1}{M^2}\Delta^2\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$$
$$= \Delta^2\mathrm{am}\,u + \Delta^2\mathrm{am}\,(u+\omega) + \Sigma\,\Delta^2\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\,\omega}{n}\right) + 2\,\Sigma\,\mathrm{cot}^2\mathrm{am}\,\frac{\mu\,\omega}{n}.$$

Porro inde manat:

5. $$\Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,(u+\omega)\,\Pi\,\Delta\mathrm{am}\left(u\pm\frac{m\,\omega}{n}\right) = \Pi\,\mathrm{cot}^2\mathrm{am}\,\frac{\mu\,\omega}{n},$$

quae formula jam sponte sequitur e formulis:

$$\Delta\mathrm{am}\,n\,\Delta\mathrm{coam}\,u = \Delta\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,(u+\omega) = \varkappa',$$
$$\mathrm{cot\,am}\,u\,\mathrm{cot\,am}\,(u+\omega) = \varkappa';$$

nam utraque ejus pars facile invenitur $= \varkappa'^{\frac{n}{2}}$.

---

§. 7.

De transformatione ad primam complementaria.

Formula, quae e valoribus functionum $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$, $\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ §° 5. propositis sponte manat:

$$\mathrm{tang\,am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\cos\mathrm{am}\,u}{M}\cdot\frac{\Pi\left(1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,\dfrac{m\,\omega}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{coam}\,\dfrac{\mu\,\omega}{n}}\right)}$$
$$= \frac{\mathrm{tang\,am}\,u}{M}\cdot\frac{\Pi\left(1-\dfrac{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\,\dfrac{m\,\omega}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\dfrac{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\,u}{\mathrm{tang}^2\mathrm{coam}\,\dfrac{\mu\,\omega}{n}}\right)}$$

posito $u = iu'$, $\omega = ak + 2bik' = i\omega_1$, i. e. $\omega_1 = 2bk' - aik$, quum sit $\mathrm{tang\,am}\,(iu',\varkappa) = i\,\sin\mathrm{am}\,(u',\varkappa')$; $\mathrm{tang\,coam}\,(iu',\varkappa) = \dfrac{-i}{\varkappa'\sin\mathrm{am}\,(u',\varkappa')}$ abit in hanc:

1. $$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u'}{M'},\lambda'\right) = \frac{\sin\mathrm{am}\,u'}{M}\cdot\frac{\Pi\left(1-\dfrac{\sin^2\mathrm{am}\,u'}{\sin^2\mathrm{am}\,\dfrac{m\,\omega_1}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa'^2\sin^2\mathrm{am}\,u'\sin^2\mathrm{am}\,\dfrac{\mu\,\omega_1}{n}\right)};\quad (\mathrm{mod.}\,\varkappa')$$

cujus denominator etiam hoc modo exprimi potest:

$$\Pi\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u'}{\sin^2\mathrm{am}\,\dfrac{\mu\,\omega_1}{n}}\right).$$

Eadem via inveniuntur e formulis:

$$\operatorname{cos\,am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\frac{\Pi\left(1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}u}{\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{\mu\omega}{n}}\right)}{\Delta\operatorname{am}u\,\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{am}\dfrac{m\omega}{n}\right)}$$

et

$$\operatorname{sin\,coam}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=\frac{\left(1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}}{\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{\mu\omega}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am}u\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{\mu\omega}{n}\right)}=\frac{\Pi\operatorname{sin\,coam}\left(u\pm\dfrac{\mu\omega}{n}\right)}{\Pi\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{\mu\omega}{n}},$$

posito $u=iu'$, $\omega=i\omega_1$, **quum sit:**

$$\operatorname{cos\,am}iu'=\frac{1}{\operatorname{cos\,am}(u'\varkappa')},\qquad \operatorname{sin\,coam}iu'=\frac{1}{\Delta\operatorname{am}(u',\varkappa')};$$

$$\operatorname{cos\,am}\left(\frac{u'}{M},\lambda\right)=\frac{\Pi\left(1-\varkappa^2\operatorname{tang}^2\operatorname{am}u'\operatorname{tang}^2\operatorname{am}\dfrac{\mu\omega_1}{n}\right)}{\operatorname{sin\,coam}u'\,\Pi\left(1+\operatorname{tang}^2\operatorname{am}u'\,\Delta^2\operatorname{am}\dfrac{\mu\omega_1}{n}\right)}\pmod{\varkappa'}$$

sive

$$2.\quad \operatorname{cos\,am}\left(\frac{u'}{M},\lambda\right)=\operatorname{cos\,am}u'\,\Delta\operatorname{am}u'\,\frac{\Pi\left(1-\dfrac{\sin^2\operatorname{am}u'}{\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{m\omega_1}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa'^2\sin^2\operatorname{am}u'\sin^2\operatorname{am}\dfrac{\mu\omega_1}{n}\right)}\pmod{\varkappa'}$$

$$\left.\begin{aligned}\Delta\operatorname{am}\left(\frac{u'}{M},\lambda'\right)&=\frac{\Pi\left(1+\varkappa^2\dfrac{\operatorname{tang}^2\operatorname{am}u'}{\Delta^2\operatorname{am}\dfrac{\mu\omega_1}{n}}\right)}{\Pi\left(1+\operatorname{tang}^2\operatorname{am}u'\Delta^2\operatorname{am}\dfrac{\mu\omega_1}{n}\right)}\\ \text{sive}\\ 3.\quad \Delta\operatorname{am}\left(\frac{u'}{M},\lambda\right)&=\frac{\Pi\left(1-\varkappa'^2\sin^2\operatorname{am}u'.\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{\mu\omega_1}{n}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa'^2\sin^2\operatorname{am}u'.\sin^2\operatorname{am}\dfrac{\mu\omega_1}{n}\right)}\\ &=\frac{\Pi\Delta\operatorname{am}\left(u'\pm\dfrac{\mu\omega_1}{n}\right)}{\Pi\Delta^2\operatorname{am}\dfrac{\mu\omega_1}{n}}\end{aligned}\right\}\pmod{\varkappa'}$$

$$4.\quad i\sqrt{\left(\frac{\lambda}{\varkappa^n}\right)}\operatorname{tang\,am}\left(\frac{u'}{M},\lambda\right)$$

$$=(-1)^{\frac{n}{2}}\operatorname{tang\,am}u'.\operatorname{tang\,am}(u'+\omega_1)\,\Pi\operatorname{tang\,am}\left(u'\pm\frac{m\omega_1}{n}\right).\quad\pmod{\varkappa'}$$

Hanc transformationem, quippe quae ad moduli λ complementum λ' pertineat, cum Cl° *Jacobi complementarium* vocabimus.

Quantitates M, λ, λ', quas transformatio complementaria cum ipsa prima communes habet, evadunt quantitatibus $\varkappa'$ et ω_1 expressae:

$$M = (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot \frac{\Pi \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} \frac{\mu \omega_1}{n}}{\Pi \operatorname{tang}^2 \operatorname{am} \frac{m \omega_1}{n}} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \frac{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{m \omega_1}{n}}{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{\mu \omega_1}{n}},$$

$$\lambda = \varkappa^n \Pi \operatorname{tang}^4 \operatorname{am} \frac{\mu \omega_1}{n} = \frac{\varkappa^n}{\Pi \Delta^4 \operatorname{am} \frac{\mu \omega_1}{n}},$$

$$\frac{1}{\lambda'} = \cos \operatorname{am} \frac{\omega_1}{n} \Delta \operatorname{am} \frac{\omega_1}{n} \cdot \frac{\Pi \left(1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am} \frac{\omega_1}{n}}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{m \omega_1}{n}} \right)}{\Pi \left(1 - \varkappa'^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\omega_1}{n} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{\mu \omega_1}{n} \right)}.$$

Indices transformationis complementariae conjugati sunt $\omega_1 = \frac{\omega}{i}$, atque $\omega' = \frac{i \omega'}{i} = d k' - 2 c i k$ *).

Quum igitur $\cos \operatorname{am}\left(\frac{u'}{M}, \lambda'\right)$ evanescat pro valoribus argumenti

$$u = \omega', \; 3\omega', \; 5\omega' \text{ etc.}$$

ergo pro eisdem $\sin \operatorname{am}\left(\frac{u'}{M}, \lambda'\right)$ unitati aequalis fiat; atque si argumentum u' augeatur quantitate $2\omega'$, $\sin \operatorname{am}\left(\frac{u'}{M}, \lambda'\right)$ non mutetur, erit

$$\frac{\omega'}{M} = \Lambda'$$

si quidem Λ' significat valorem argumenti u, quo fit $\sin \operatorname{am}(v, \lambda') = 1$ atque $\sin \operatorname{am}(v + 2\Lambda', \lambda') = \sin \operatorname{am}(v, \lambda')$, i. e, indicem periodi functionis $\sin \operatorname{am}(v, \lambda')$. Quantitas $i\Lambda'$ est index conjugatus functionis $\sin \operatorname{am}(v, \lambda)$; nam $\sin \operatorname{am}(v + 2i\Lambda', \lambda) = \sin \operatorname{am}(v, \lambda)$.

Coroll. Haec relatio $\frac{\omega'}{M} = \Lambda'$ non valet, si index ipsi ω conjugatus est formae $\mu k + \mu' i k'$.

---

*) Indici cuique multi sunt conjugati, quorum ille ω' unus est.

§. 8.

De transformatione secunda, rationali.

E formulis transformationis complementariae modo propositis concludere licet, transformationem paris ordinis etiam rationalem inveniri posse, cujus formulae ex illis prodeunt, substitutis $\varkappa$ et λ pro modulis $\varkappa'$ et λ'. Attamen eas separatim demonstrare necesse videtur.

Docuit Cl. *Jacobi* (Fund. pag. 18): si functiones elementi x integrae rationales A, B, C, D, W impar, V par, ita determinentur, ut sit:

$$V+U = (1+x)(1+\varkappa x)AA,$$
$$V-U = (1-x)(1-\varkappa x)BB,$$
$$V+\lambda U = CC,$$
$$V-\lambda U = DD.$$

fore, posito $y = \frac{U}{V}$

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{\partial x}{M\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

designante M quantitatem constantem.

Licet insuper, factores $(1+x)$, $(1+\varkappa x)$, $(1-x)$, $(1-\varkappa x)$ quibusdam modis inter se commutare; ex. gr.

$$V+U = (1+x)(1-\varkappa x)AA$$

conjunctum cum:

$$V-U = (1-x)(1+\varkappa x)BB$$

et ipsum satisfacit problemati. Hos igitur casus ut omnes comprehendamus, quippe qui una sola formula exprimi possint, conditiones duas

$$V-U = (1\mp x)(1\mp\varkappa x)BB,$$
$$V+U = (1\pm x)(1\pm\varkappa x)AA$$

in hanc unam conflamus:

$$V^2-U^2 = (1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)A'A',$$

qua conjunctione nihil theorematis mutatur.

Itaque, si n, ut antea, est numerus par quilibet, index $\omega_2 = 2ak+bik'$, cujus numeri integri $2a$ et b, ille par quilibet, hic impar, factorem communem non habeant, qui et ipse numerum n metitur; index conjugatus $\omega_2' = ck+2dik'$; ubi c impar est; ponamus

$$U = \frac{x}{M}\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\frac{2\omega_2}{n}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\frac{4\omega_2}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \mathrm{am}\frac{n-2}{n}\omega_2}\right),$$

$$V = \left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \mathrm{am}\frac{\omega_2}{n}\right)\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \mathrm{am}\frac{3\omega_2}{n}\right)\ldots\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \mathrm{am}\frac{n-1}{n}\omega_2\right),$$

$$A' = AB = \left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{coam}\frac{2\omega_2}{n}}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{coam}\frac{4\omega_2}{n}}\right)\ldots\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{coam}\frac{n-2}{n}\omega_2}\right),$$

$$C = \left(1+\varkappa x \sin \operatorname{coam}\frac{\omega_2}{n}\right)\left(1+\varkappa x \sin \operatorname{coam}\frac{3\omega_2}{n}\right)\ldots\left(1+\varkappa x \sin \operatorname{coam}\frac{n-1}{n}\omega_2\right),$$

$$D = \left(1-\varkappa x \sin \operatorname{coam}\frac{\omega_2}{n}\right)\left(1-\varkappa x \sin \operatorname{coam}\frac{3\omega_2}{n}\right)\ldots\left(1-\varkappa x \sin \operatorname{coam}\frac{n-1}{n}\omega_2\right),$$

$$\lambda_2 = \frac{(-1)^{n+\frac{c-1}{2}}}{\cos \operatorname{am}\frac{\omega_2}{n}\,\Delta \operatorname{am}\frac{\omega_2}{n}} \cdot \frac{\Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\omega_2}{n}\sin^2 \operatorname{coam}\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\omega_2}{n}\sin^2 \operatorname{coam}\frac{m\omega_2}{n}\right)};$$

$$(-1)^{\frac{c-1}{2}} M_2 = \frac{\Pi\,\Delta^2 \operatorname{am}\frac{m}{n}\omega_2}{\Pi\,\Delta^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2};$$

tunc erit, posito $x = \sin \operatorname{am} u$, $y = \frac{U}{V} = \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2\right)$. Ex quibus formulis manant sequentes:

1. $$y = \frac{U}{V} = \frac{\frac{x}{M_2}\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am}\frac{m}{n}\omega_2}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\mu\omega_2}{n}\right)},$$

2. $$\sqrt{(1-yy)} = \sqrt{(1-xx)}\sqrt{(1-\varkappa^2 xx)}\,\frac{A'}{V}$$
$$= \frac{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2 x^2)}\,.\,\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{coam}\frac{m}{n}\omega_2}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)},$$

3. $$1+\lambda_2 y = \frac{CC}{V} = \frac{\Pi\left(1+\varkappa x\,.\,\sin \operatorname{coam}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)^2}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)} = \frac{\Pi\left[1+\varkappa \sin \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\mu}{n}\omega_2\right)\right]}{\Pi\,\Delta^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2},$$

4. $$1-\lambda^2 y = \frac{DD}{V} = \frac{\Pi\left(1-\varkappa x \sin \operatorname{coam}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)^2}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)} = \frac{\Pi\left[1-\varkappa \sin \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\mu}{n}\omega_2\right)\right]}{\Pi\,\Delta^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2},$$

5. $$\sqrt{(1-\lambda_2^2 y^2)} = \frac{CD}{V} = \frac{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{coam}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)} = \frac{\Pi\,\Delta \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\mu}{n}\omega_2\right)}{\Pi\,\Delta^2 \operatorname{am}\frac{\mu}{n}\omega_2},$$

Adnotentur hae quoque formulae, quae fluunt ex ipsa indicis τ_2 indole:

$$\sin\mathrm{am}(u+\omega_2)=\frac{(-1)^a}{\varkappa\sin\mathrm{am}\,u};\qquad \sin\mathrm{coam}(u\pm\omega_2)=\frac{(-1)^a}{\varkappa\sin\mathrm{coam}\,u};$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(u\pm\omega_2)=(-1)^{\frac{b+1}{2}}\,i\cot\mathrm{am}\,u;\qquad \mathrm{tang\,am}(u\pm\omega_2)=\frac{(-1)^{\frac{b\mp1}{2}}.i}{\Delta\,\mathrm{am}\,u};$$

unde sequuntur:

$$6.\quad \Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2=\frac{1}{\varkappa^2\,\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2},$$

$$7.\quad \Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\omega_2=\frac{1}{\varkappa^{n-2}\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\omega_2}.$$

Eaedem valent formulae, si mutas sin am cum sin coam

$$8.\quad \varkappa^{n-1}\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\omega_2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2=(-1)^{n+1},$$

$$9.\quad \Pi\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\Pi\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2};$$

$$10.\quad \Pi\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\omega_2=\frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Pi\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\omega_2}.$$

§. 9.

His praemissis, evincamus, e formula 4. §^{i} antecedentis

$$4.\quad 1-\lambda_2 y=\frac{\Pi\left(1-\varkappa x\sin^2\mathrm{coam}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)^2}{\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2\right)}=\frac{\Pi\left[1-\varkappa\sin\mathrm{am}\left(u\pm\frac{\mu}{n}\omega_2\right)\right]}{\Pi\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2}$$

ubi quantitas λ_2 datur expressione:

$$\sqrt{(1-\lambda_2\lambda_2)}=\lambda_2'=\frac{\Pi\,\Delta^2\mathrm{coam}\frac{\mu}{n}\omega_2}{\Pi\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2}=\frac{\varkappa'^n}{\Pi\,\Delta^4\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2},$$

reliquas deduci posse formulas; tum sponte sequetur illa principalis:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda_2^2y^2)}}=\frac{\partial x}{M_2\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}}$$

posito:

$$(-1)^{\frac{c-1}{2}}M_2=\frac{\Pi\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\omega_2}{\Pi\,\Delta^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\omega_2},$$

$$\lambda_2 = 2\varkappa M_2 . \Sigma \sin \operatorname{coam} \frac{\mu}{n} \omega_2$$

$$= \frac{(-1)^{a+\frac{c-1}{2}}}{\cos \operatorname{am} \frac{\omega_2}{2} . \Delta \operatorname{am} \frac{\omega_2}{n}} \cdot \frac{\Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\omega_2}{n} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{\mu}{n} \omega_2\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\omega_2}{n} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{m}{n} \omega_2\right)}.$$

Primum e formula (4.) facile colligitur, pro valore argumenti $u = 0$ sive pro $x = 0$ et ipsam functionem y evanescere, atque insuper minime mutari, quoties abeat argumentum u in $u \pm \frac{2p}{n}\omega_2$. Unde patet, y evanescere pro his valoribus argumenti u omnibus

$$0, \quad \frac{2\omega_2}{n}, \quad \frac{4\omega_2}{n}, \quad \ldots . \quad \frac{2(n-1)}{n}\omega_2,$$

quibus respondent valores ipsius $x = \sin \operatorname{am} u$:

$$0, \quad \sin \operatorname{am} \frac{2\omega_2}{n}, \quad \sin \operatorname{am} \frac{4\omega_2}{n}, \quad \ldots . \quad \sin \operatorname{am} \frac{2(n-1)}{n}\omega_2$$

sive

$$0, \quad \pm \sin \operatorname{am} \frac{2\omega_2}{n}, \quad \pm \sin \operatorname{am} \frac{4\omega_2}{n}, \quad \ldots . \quad \pm \sin \operatorname{am} \frac{n-2}{n}\omega_2,$$

quos omnes inter se discrepare sine negotio probatur.

Si autem functionis $1-\lambda_2 y$ denominatorem V appellamus, i. e.

$$V = \Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu}{n} \omega_2\right)$$

atque ponimus $y = \frac{U}{V}$, quum pro valore $u = \omega_2$ elementum $x = \pm\infty$ evadere, y vero evanescere videamus, functionem V ordinis esse majoris quam U, jure concludimus, quum deinde $\frac{\partial y}{\partial x}$ pro eodem valore $x = \infty$ non evanescat, functio $U(n-1)^{\text{ti}}$ ordinis erit. Functio U igitur evanescit pro eisdem ipsius x valoribus, quibus $y = 0$ efficitur, excluso hoc $\sin \operatorname{am} \omega_2$; itaque radices aequationis $U = 0$ sunt hi valores quantitatis x:

$$0, \quad \pm \sin \operatorname{am} \frac{2\omega_2}{n}, \quad \pm \sin \operatorname{am} \frac{4\omega_2}{n}, \quad \ldots . \quad \pm \sin \operatorname{am} \frac{n-2}{n}\omega_2.$$

Unde ponere licet:

$$y = \frac{U}{V} = \frac{\frac{x}{M_2} \Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{m\omega_2}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}\right)}$$

ubi M_2 est quantitas constans, apte determinanda.

Mutato x in $-x$, y in $-y$ abire intelligimus; fit igitur

$$1+\lambda_2 y = \frac{\Pi\left(1+\varkappa x \sin \operatorname{coam} \frac{\mu\omega_2}{n}\right)^2}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}\right)} = \frac{\Pi\left[1+\varkappa \sin \operatorname{am}\left(u \pm \frac{\mu\omega_2}{n}\right)\right]}{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}}$$

quae formula ducta in (4.) praebet (5.) §^{i} anteced.

Quum deinde functionem $\sqrt{(1-\lambda_2^2 y^2)}$ valorem λ_2' accipere videamus pro valore $x = \pm 1$, i. e. $x = \sin \operatorname{am} i\omega_2'$, ubi $i\omega_2' = ck + 2dik'$, index conjugatus cum ipso ω_2, numeros coefficientes habet c imparem, $2d$ parem, eodem valore ipsius x functionem $\pm y$ unitati aequalem fieri oportet. Itaque constantem M_2 ita determinare convenit, ut pro $x = \sin \operatorname{am} i\omega_2'$ efficiatur $y = 1$.

Ergo invenitur:

$$M_2 = (-1)^{\frac{c-1}{2}} \cdot \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1} \Pi \cot^2 \operatorname{am} \frac{m\omega_2}{n}}{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}} = (-1)^{\frac{c-1}{2}} \frac{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{m\omega_2}{n}}{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}}.$$

Relatione antea inventa (vid. form. 8. §^{i} anteced.)

$$(-1)^{a+1} = \varkappa^{n-1} \Pi \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n} \Pi \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}$$

cognoscitur aliquod, functioni nostrae y proprium: „y posito $\frac{1}{\varkappa x}$ loco x transire in $(-1)^a y$; vel generalius, posito $\sin \operatorname{am}(u+\omega_2)$ pro ipso $x = \sin \operatorname{am} u$, non mutari y" (cf. *Jac.* Fund. pag. 41 mod.).

Nam substitutione facta $\frac{1}{\varkappa x}$ loco x, transmutatur y in:

$$\frac{-\frac{x}{M_2} \Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{m\omega_2}{n}\right)}{\varkappa^{n-1} \Pi \sin^2 \operatorname{am} \frac{m\omega_2}{n} \Pi \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n} \Pi\left(1-\frac{x x}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}}\right)}$$

$$= (-1)^a \cdot \frac{\frac{x}{M_2} \cdot \Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{m\omega_2}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\omega_2}{n}\right)} = (-1)^a y.$$

Inde sequitur, quum sit $y = 1$ pro $x = \sin \operatorname{am} i\omega_2'$, y etiam fieri $= 1$ pro valore $u = i\omega_2' + \omega_2$ sive pro $x = \sin \operatorname{am}(\omega_2 + i\omega_2')$. Inter quantitates M_2 et λ_2 relatio tantummodo valet

$$\frac{\lambda_2}{M_2} = 2\varkappa \Sigma \sin \operatorname{coam} \frac{\mu\omega_2}{n},$$

quae reperitur, si e functionibus y et $1-\lambda_2 y$ valor ipsius $\frac{\partial y}{\partial x}$ pro $x=0$ deducitur; atque alia formae diversae, quae hoc modo invenitur. Si enim valorem

$$x = \sin\mathrm{am}\left(i\omega_2' + \frac{\omega_2}{n}\right) = (-1)^{\frac{c-1}{2}} \sin\mathrm{coam}\frac{\omega_2}{n}$$

in functionibus $1-\lambda_2 y$ et $1+\lambda_2 y$ substituimus, omnes factores nanciscuntur valores a mera cifra diversos praeter unum:

$$\frac{\left(1-\varkappa(-1)^{\frac{c-1}{2}} \sin\mathrm{coam}\frac{n-1}{n}\omega_2 \sin\mathrm{coam}\frac{\omega_2}{n}\right)^2}{1-\varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{n-1}{n}\omega_2 \sin^2\mathrm{coam}\frac{\omega_2}{n}},$$

aut

$$\frac{\left(1+\varkappa(-1)^{\frac{c-1}{2}} \sin\mathrm{coam}\frac{n-1}{n}\omega_2 \sin\mathrm{coam}\frac{\omega_2}{n}\right)^2}{1-\varkappa^2 \sin^2\mathrm{am}\frac{n-1}{n}\omega_2 \sin\mathrm{coam}\frac{\omega_2}{n}}$$

qui, formula adhibita

$$\frac{[1\pm\varkappa \sin\mathrm{coam}\, u \sin\mathrm{coam}\, a]^2}{1-\varkappa^2 \sin^2\mathrm{coam}\, u \sin^2\mathrm{am}\, a} = \frac{[1\pm\varkappa \sin\mathrm{coam}\,(u+a)][1\pm\varkappa \sin\mathrm{coam}\,(u-a)]}{\Delta^2\,\mathrm{am}\, a}$$

vertuntur in:

$$\frac{\left[1-(-1)^{\frac{c-1}{2}}\varkappa \sin\mathrm{coam}\,\omega_2\right]\left[1-(-1)^{\frac{c-1}{2}}\varkappa \sin\mathrm{coam}\frac{n-2}{n}\omega_2\right]}{\Delta^2\,\mathrm{am}\frac{n-1}{n}\omega_2}$$

atque

$$\frac{\left[1+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\varkappa \sin\mathrm{coam}\,\omega_2\right]\left[1+(-1)^{\frac{c-1}{2}}\varkappa \sin\mathrm{coam}\frac{n-2}{n}\omega_2\right]}{\Delta^2\,\mathrm{am}\frac{n-1}{n}\omega_2}.$$

Quarum expressionum prima evanescit pro numeris a et $\frac{c-1}{2}$ utroque simul sive pari sive impari, secunda vero pro numero a pari, $\frac{c-1}{2}$ impari, nec non a impari, $\frac{c-1}{2}$ pari. Itaque ambobus casibus prioribus $1-\lambda_2 y$, posterioribus $1+\lambda_2 y$ pro valore $x = \sin\mathrm{am}\left(i\omega_2' + \frac{\omega_2}{n}\right)$ evanescere videmus; unde sequitur: $y = \frac{(-1)^{a+\frac{c-1}{2}}}{\lambda_2}$ pro ipso $x = \sin\mathrm{am}\left(i\omega_2' + \frac{\omega_2}{n}\right)$.

Qua substitutione facta nanciscimur:

$$\frac{(-1)^a}{\lambda_2} = \frac{\sin^2 \operatorname{coam} \frac{\omega_2}{n} . (-1)^{\frac{n}{2}-1} . \Pi\left(\sin^2 \operatorname{coam} \frac{\omega_2}{n} - \sin^2 \operatorname{am} \frac{m\,\omega_2}{n}\right)}{M_2 \Pi \sin^2 \operatorname{am} \frac{m\,\omega_2}{n} . \Pi\left(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{coam} \frac{\omega_2}{n} \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\,\omega_2}{n}\right)}$$

et, quia $y = 1$ pro $x = \sin \operatorname{am}(\omega_2 + i\omega_2')$

$$(-1)^{\frac{c-1}{2}+a} M_2 = (-1)^{\frac{n}{2}-1} \frac{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{m}{n} \omega_2}{\varkappa^{n-1} \Pi \sin^2 \operatorname{am} \frac{m}{n} \omega_2 \Pi \cos^2 \operatorname{am} \frac{\mu}{n} \omega_2},$$

unde

$$(-1)^{\frac{c-2}{2}} \lambda_2 = \frac{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{m\,w_2}{n} . \Pi\left(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{coam} \frac{\omega_2}{n} \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu\,\omega_2}{n}\right)}{\varkappa^{n-1} \sin \operatorname{coam} \frac{\omega_2}{n} \Pi \cos^2 \operatorname{am} \frac{\mu\,\omega_2}{n} \Pi\left(\sin^2 \operatorname{coam} \frac{\omega_2}{n} - \sin^2 \operatorname{am} \frac{m}{n} \omega_2\right)},$$

quae formula, adhibitis nonnullis levibus transformationibus, atque formulis demonstratu facilibus:

$$(-1)^{\frac{n}{2}} \Pi \sin \operatorname{am} \frac{\mu}{n} \omega_2 = \Pi \sin^2 \operatorname{coam} \frac{\mu}{n} \omega_2,$$

$$(-1)^a \Pi \sin \operatorname{coam} \frac{m}{n} \omega_2 = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\varkappa^{n-1} \Pi \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu}{n} \omega_2},$$

abit in hanc supra datam:

$$\lambda_2 = \frac{(-1)^{a+\frac{c-1}{2}}}{\cos \operatorname{am} \frac{\omega_2}{n} \Delta \operatorname{am} \frac{\omega_2}{2}} \cdot \frac{\Pi\left(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\omega_2}{n} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{\mu\,\omega_2}{n}\right)}{\Pi\left(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\omega_2}{n} \sin^2 \operatorname{coam} \frac{m\,\omega_2}{n}\right)}.$$

Forma elegantior moduli λ_2, quod sciam, non datur.

Coroll. Si index conjugatus $i\omega_2' = ck + dik'$ numeros coefficientes habet ambos impares, $y = 1$ efficitur valore $x = \sin \operatorname{am}(\omega_2 + i\omega_2')$, atque factor $(-1)^{\frac{c-1}{2}}$ quantitatis M_2 abit in $(-1)^{\frac{c-1}{2}+a}$, et pro

$$x = \sin \operatorname{am}\left(i\omega_2' + \omega_2 + \frac{\omega_2}{n}\right) \text{ evadit } y = \frac{(-1)^{\frac{c-1}{2}}}{\lambda_2}.$$

Functionem deinde $A^2 - y^2 = \frac{V^2 A^2 - U^2}{V^2}$ derivaturi, ubi A est quantitas quaecunque data, primum videmus, $V^2 A^2 - U^2$ in universum functionem esse ipsius x parem $2n^{\text{ti}}$ ordinis, sive n^{ti} ordinis elementi x^2, quae evanescet pro omnibus ipsius x^2 valoribus, quibus $y^2 = A^2$ evadat. Horum valorum si unum ponamus $x^2 = \sin^2 \operatorname{am} \alpha$, ubi α ab ipsius A^2 valore pendet, sequitur, quum functionem y^2 non mutari intellexerimus, quoties argumentum u abeat iu $u + \frac{2p}{n} \omega_2$, valores esse alios:

$$\sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2\omega_2}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{4\omega_2}{n}\right),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}(\alpha+\omega_2),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2(n-1)}{n}\omega_2\right),$$

sive

$$\sin^2\mathrm{am}\,\alpha,\quad \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{2\omega_2}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{4\omega_2}{n}\right),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha+\frac{n-2}{n}\omega_2\right),$$

$$\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\omega_2),\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha-\frac{2\omega_2}{n}\right),\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha-\frac{4\omega_2}{n}\right),\ \ldots.\ \sin^2\mathrm{am}\left(\alpha-\frac{n-2}{n}\omega_2\right).$$

Quas n radices aequationis $V^2A^2-U^2=0$ omnes generaliter inter se discrepare, eodem, quo §° 5. factum est, modo ostenditur. Itaque ponere licet:

$$1-\frac{y^2}{A^2}=\frac{\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}\right)\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}(\alpha+\omega_2)}\right)\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\left(\alpha\pm\frac{m\omega_2}{n}\right)}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega_2}{n}\right)^2}.$$

Sed ibidem (§° 5.) insuper est demonstratum, casu speciali $\alpha=ck+2dik'$, ubi numerus c impar, $2d$ par est, i. e. $\alpha=i\omega_2'$ evenire, ut, radicibus exclusis $\sin^2\mathrm{am}\,i\omega_2'=1$ et $\sin^2\mathrm{am}(\omega_2+i\omega_2')=\frac{1}{\varkappa^2}$, reliquarum binae inter se aequales reperiantur

$$\sin^2\mathrm{am}\left(i\omega_2'+\frac{2\omega_2}{n}\right)=\sin^2\mathrm{am}\left(i\omega_2'-\frac{2\omega_2}{n}\right)=\sin^2\mathrm{coam}\frac{2\omega_2}{n},$$

$$\sin^2\mathrm{am}\left(i\omega_2'+\frac{4\omega_2}{n}\right)=\sin^2\mathrm{am}\left(i\omega_2'-\frac{4\omega_2}{n}\right)=\sin^2\mathrm{coam}\frac{4\omega_2}{n},$$

etc. etc.

Casu autem $A^2=1$ valor ipsius a jam inventus est $=i\omega_2'$; unde elucet, functionis $(1-y^2)$ numeratorem esse quadratum completum, ductum in factores $(1-x^2)(1-\varkappa^2x^2)$. Ergo fit:

$$\sqrt{(1-y^2)}=\frac{\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,\Pi\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{m}{n}\omega_2}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu\omega_2}{n}\right)}.$$

Coroll. Pro indice conjugato $i\omega_2'=ck+dik'$, ubi c et d numeri sunt impares, $a=i\omega_2'+\omega_2$ evadere, sed formam functionis $\sqrt{(1-y^2)}$ eandem manere, facile patet.

Functiones igitur omnes y, $(1-y^2)$, $(1-\lambda_2^2y^2)$, quum formam theoremati laudato *Jacobiano* aptatam habeant, valebit aequatio differentialis:

$$\frac{\partial y}{\sqrt{(1-y^2)}\sqrt{(1-\lambda_2^2y^2)}}=\frac{\partial x}{M_2\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}}$$

atque erit $y=\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2},\lambda_2\right)$, si $x=\sin\mathrm{am}\,u$.

Jam evictum est, fieri $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2\right) = 1$ pro valore argumenti $u = i\omega_2' = ck + 2dik'$, atque

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+2i\omega_2'}{M_2}, \lambda_2\right) = -\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}, \lambda_2\right),$$

unde erit

$$\frac{i\omega_2'}{M_2} = \Lambda_2$$

si quidem signo Λ_2 index periodi designatur functionis $\sin\mathrm{am}(v, \lambda_2)$.

Ex iis, quae adhuc diximus, vel nobis non monentibus, quisque intelliget, hujus transformationis secundae primam esse complementariam. Unde derivari potest:

$$\frac{-i\omega_2}{nM_2} = \Lambda_2'$$

ubi Λ_2' index periodi est functionis $\sin\mathrm{am}(v, \lambda_2')$, atque $i\Lambda_2'$ index conjugatus functionis $\sin\mathrm{am}(v, \lambda_2)$.

Annotatio. Quaerat fortasse aliquis, quum proposuerimus solas formulas, quibus insunt indices $\omega = ak + 2bik$, cujus numerus a impar, $2b$ par est, et $\omega_2 = 2ak + bik'$, ubi $2a$ par numerus, b impar; nonne inveniri possint formulae, quae involvant indicem ω formae $ak + bik'$, ubi uterque a, b numerus est impar. Sed substitutionibus primi ordinis et rationalibus formae $\frac{\alpha+\beta x}{1+\gamma x}$ (vid. *Abel.* Comm. in *Crell.* Diar. Vol. III. p. 394), et irrationalibus formae $\frac{\beta x}{\sqrt{(1+\gamma x^2)}}$ aut $\frac{\sqrt{(1+\beta x^2)}}{\sqrt{(1+\gamma x^2)}}$, atque moduli commutatione e duabus transformationibus antea propositis permultae derivari possunt aliae, magis minusve ab illis discrepantes. Inter quas duae quoque inveniuntur transformationes, quae indicem $\omega_3 = ak + bik'$ involvunt, illis propositis respondentes, sed utraque irrationalis. Quarum una ex prima derivatur, mutato modulo $\varkappa$ in $\frac{1}{\varkappa}$, complementum $\varkappa'$ in $\frac{i\varkappa'}{\varkappa}$, si insuper adhibentur formulae (Fund. pag. 70 etc.); unde prodeunt formulae, illis pro prima transformatione exhibitis aequales, dummodo mutes in $\cos\mathrm{am}\, u$ illud $\Delta\,\mathrm{am}\, u$, quod obvenit in denominatore expressionum ipsorum $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, $\cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, $\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$, porro $\cos\mathrm{am}\, u$ in $\Delta\,\mathrm{am}\, u$, atque valorem constantis M in modulum $\varkappa$ ducas. Altera transformationum obtinetur, si in formulis pro transformatione secunda datis commutasti modulum $\varkappa$ in $\frac{i\varkappa}{\varkappa'}$, complementum $\varkappa'$ in $\frac{1}{\varkappa'}$. Hac in transformatione

expressio functionis $\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ est congrua eidem functioni transformationis secundae, paulo ante allatae, sed e functionibus rationalibus $(1-\lambda y)$ et $(1+\lambda y)$ componi non potest.

Formularum ipsarum omnium ut forma atque indoles melius cognosci queat, exemplum damus, quod pertinet ad numerum $n=2$,

1.
$$\begin{cases} \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_3},\lambda_3\right)=\frac{1}{M_3}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{\cos\mathrm{am}\,u}, \\ \cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_3},\lambda_3\right)=\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}}\right), \qquad \omega_3=ak+bik, \\ \Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_3},\lambda_3\right)=\frac{1}{\cos\mathrm{am}\,u}\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}\right), \\ M_3=\pm\varkappa\sin^2\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}, \qquad \lambda_3=\varkappa^2\sin^4\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}; \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} \sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_3},\lambda_3\right)=\frac{1}{M_3}\cdot\frac{\sin\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{coam}\,\frac{\omega_3}{2}}, \\ \cos\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_3},\lambda_3\right)=\frac{\cos\mathrm{am}\,u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{coam}\,\frac{\omega_3}{2}}, \\ \Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_3},\lambda_3\right)=\frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\,\sin^2\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{coam}\,\frac{\omega_3}{2}}, \\ M_3=\pm\frac{1}{\varkappa'}\Delta\,\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}, \qquad \lambda_3=\pm\frac{1-\varkappa^2\sin^4\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}}{\cos\mathrm{am}\,\frac{\omega_3}{2}}. \end{cases}$$

§. 10.

De transformationibus ad multiplicationem supplementariis.

Quum ex antecedentibus relationes inter transcendentes Λ, Λ', Λ_2, Λ_2' valeant sequentes:

1. $\frac{\omega}{nM}=\Lambda$, $\frac{\omega'}{M}=\Lambda'$, unde $\frac{n\omega'}{\omega}=\frac{\Lambda'}{\Lambda}$,
2. $\frac{i\omega_2'}{M_2}=\Lambda_2$, $\frac{-i\omega_2}{nM_2}=\Lambda_2'$, unde $\frac{n\Lambda_2'}{\Lambda_2}=\frac{-i\omega_2}{i\omega_2'}$

atque apparet, $-i\omega_2$ ejusdem esse formae atque ω', sive ω_2 ejusdem formae quam $i\omega'$, et $i\omega_2'$ ejusdem formae quam ω; si indicibus ω_2 et $i\omega_2'$ ta-

les insuper dantur numeri coefficientis quantitatum k et ik', qualibus fiat et $\omega_2 = i\omega'$, et $i\omega_2' = \omega$, valebunt simul ambae relationes:

$$1. \quad \frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{\omega'}{\omega}, \qquad 2. \quad n\frac{\Lambda_2'}{\Lambda_2} = \frac{\omega'}{\omega}.$$

Ex quibus colligitur (cf. Fund. pag. 60): „Eodem modo pendere modu„lum λ a modulo $\varkappa$, atque modulum $\varkappa$ a modulo λ_2. Itaque post trans„formationem alteram altera adhibita, modulus $\varkappa$ in se redit, seu trans„formationes prima et secunda successive adhibitae, utro ordine placet, „multiplicationem praebent."

Mutato modulo $\varkappa$ in modulum λ, transit expressio $\Lambda_2 = \frac{\omega}{M_2}$ in hanc: $\omega = \frac{\Lambda}{M'}$ (si M' eodem modo pendet a modulo λ atque M_2 a modulo $\varkappa$), quae cum illa $\Lambda = \frac{\omega}{nM}$ comparata, $M' = \frac{1}{nM}$ praebet. Mutato vero modulo $\varkappa$ in modulum λ_2, transit expressio $\Lambda = \frac{\omega}{nM}$ in hanc: $\omega = \frac{\Lambda_2}{nM_2'}$ (ubi M_1' eodem modo pendet a modulo λ_2 atque M a modulo $\varkappa$), quae cum illa $\Lambda_2 = \frac{\omega}{M_2}$ comparata, praebet: $M_1' = \frac{1}{nM_2}$.

Itaque hic, sicuti pro numero n impari, formulae dantur pro transformatione primae supplementaria, si in formulis transformationis secundae propositis mutatur $\varkappa$ in λ, λ_2 in $\varkappa$, M_2 in $M' = \frac{1}{nM}$, u in $\frac{u}{M}$, unde sequitur: $\frac{u}{MM'} = nu$; atque pro transformatione secundae supplementaria, si in formulis pro transformatione prima exhibitis commutatur $\varkappa$ in λ_2, λ in $\varkappa$, M in $M_1' = \frac{1}{nM_2}$, u in $\frac{u}{M_2}$; unde colligitur $\frac{u}{M_2 M_1'} = nu$.

Quas formulas omnes apponamus pro iudicibus transformationum realium $\omega = k$, $i\omega' = ik'$, $\omega_2 = ik'$, $i\omega_2' = k$.

I. *Formulae transformationis ad primam supplementariae.*

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \frac{\Pi\left(1-\lambda^2\sin^2\operatorname{am}\frac{i\Lambda'}{n}\sin^2\operatorname{coam}\frac{\mu i\Lambda'}{n}\right)}{\cos\operatorname{am}\frac{i\Lambda'}{n}.\Delta\operatorname{am}\frac{i\Lambda'}{n}\Pi\left(1-\lambda^2\sin^2\operatorname{coam}\frac{i\Lambda'}{n}\sin^2\operatorname{coam}\frac{mi\Lambda'}{n}\right)}, \\ \varkappa' &= \frac{\lambda'^n}{\Pi\,\Delta^4\operatorname{am}\frac{\mu i\Lambda'}{n}}; \qquad \frac{1}{nM} = \frac{\Pi\,\Delta^2\operatorname{am}\frac{mi\Lambda'}{n}}{\Pi\,\Delta^2\operatorname{am}\frac{\mu i\Lambda'}{n}}; \end{aligned}\right\} \text{(mod. } \lambda\text{)}$$

posito $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=y$,

$$\left.\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}(nu,\varkappa) &= \frac{nMy\,.\,\Pi\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{mi\Lambda'}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\lambda^2y^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu i\Lambda'}{n}\right)},\\
\cos\mathrm{am}(nu,\varkappa) &= \frac{\sqrt{(1-y^2)}.\sqrt{(1-\lambda^2y^2)}\,\Pi\left(1-\frac{y^2}{\sin^2\mathrm{coam}\frac{mi\Lambda'}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\lambda^2y^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu i\Lambda'}{n}\right)},\\
\Delta\,\mathrm{am}(nu,\varkappa) &= \frac{\Pi\left(1-\lambda^2y^2\sin^2\mathrm{coam}\frac{\mu i\Lambda'}{n}\right)}{\Pi\left(1-\lambda^2y^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu i\Lambda'}{n}\right)}\\
&= \sqrt{\left(\frac{\varkappa'}{\lambda'^n}\right)}\,\Pi\,\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u}{M}\pm\frac{\mu i\Lambda'}{n}\right).
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod.}\,\lambda)$$

II. *Formulae transformationis ad secundam supplementariae.*

$$\left.\begin{aligned}
\varkappa &= \lambda_2^n\,\Pi\sin^4\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\Lambda_2,\\
\varkappa' &= \frac{\Pi\left(1-\lambda_2^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\Lambda_2}{n}\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu\Lambda_2}{n}\right)}{\Delta\,\mathrm{am}\frac{\Lambda_2}{n}\,.\,\Pi\left(1-\lambda_2^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\Lambda_2}{n}\sin^2\mathrm{am}\frac{m\Lambda_2}{n}\right)},\\
\frac{1}{nM_2} &= \frac{\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\Lambda_2}{\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\Lambda_2}
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod.}\,\lambda_2)$$

atque, posito $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2},\lambda_2\right)=y'$,

$$\left.\begin{aligned}
\sin\mathrm{am}(nu,\varkappa) &= \frac{nM_2\,y'\sqrt{(1-y'y')}\,\Pi\left(1-\frac{y'y'}{\sin^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\Lambda_2}\right)}{\Pi\left(1-\lambda_2^2\,y'y'\sin^2\mathrm{am}\frac{m}{n}\Lambda_2\right)\sqrt{(1-\lambda_2^2\,y'y')}}\\
&= (-1)^{\frac{n}{2}-1}\sqrt{\left(\frac{\lambda_2^n}{\varkappa}\right)}\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}\right)\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}+\Lambda_2\right)\Pi\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}\pm\frac{m\Lambda_2}{n}\right),\\
\cos\mathrm{am}(nu,\varkappa) &= \frac{\Pi\left(\frac{y'y'}{\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu}{n}\Lambda_2}\right)}{\sqrt{(1-\lambda_2^2\,y'y')}.\Pi\left(1-\lambda_2^2\,y'y'\sin^2\mathrm{am}\frac{m\Lambda_2}{n}\right)},
\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{mod.}\,\lambda_2)$$

$$\Delta\,\mathrm{am}(nu,\varkappa) = \frac{\Pi\left(1-\lambda_2^2 y' y' \sin^2 \mathrm{am}\frac{m}{n}\Lambda_2\right)}{\sqrt{(1-\lambda_2^2 y' y')}\,\Pi\left(1-\lambda_2^2 y' y' \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{m}{n}\Lambda_2\right)} \quad (\mathrm{mod.}\,\lambda_2).$$

§. 11.

E binis transformationibus supplementariis formulae multiplicationis, quibus functiones ellipticae argumenti nu exprimuntur eisdem argumenti simplicis functionibus, componi possunt; idque modis duobus, quorum nobis quidem singulis casibus eum eligere placet, quo formulae inquirendae facilius fluant.

Ad hunc finem revocemus formulam:

$$\sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2},\lambda_2\right) = \frac{\frac{\sin \mathrm{am}\,u}{M_2}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,u}{\sin^2 \mathrm{am}\,\frac{m' i k'}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,\frac{\mu i k'}{n}\right)}$$

unde sequitur, quum sit $\Lambda_2 = \frac{k}{M_2}$,

$$\sin \mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}+\Lambda_2,\lambda_2\right) = \frac{\frac{\sin \mathrm{coam}\,u}{M_2}\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{coam}\,u}{\sin^2 \mathrm{am}\,\frac{m' i k'}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{coam}\,u \sin^2 \mathrm{coam}\,\frac{\mu i k'}{n}\right)}$$

$$= \frac{\cos \mathrm{am}\,u \,.\, \Delta\,\mathrm{am}\,u\,\Pi\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,u}{\sin^2 \mathrm{am}\left(k+\frac{m' i k'}{n}\right)}\right)}{\Pi\left[1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\left(k+\frac{\mu i k'}{n}\right)\right]}.$$

Porro formularum ope:

$$\frac{[1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(u+\alpha)\sin^2 \mathrm{am}\,\beta]\,[1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,(u-\alpha)\sin^2 \mathrm{am}\,\beta]}{[1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,(\alpha+\beta)]\,[1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,(\alpha-\beta)]}$$

$$= \left(\frac{1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha\, \sin^2 \mathrm{am}\,\beta}{1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha}\right)^2,$$

$$\frac{\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}(u+\alpha)}{\sin^2 \mathrm{am}\,\beta}\right)\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,(u-\alpha)}{\sin^2 \mathrm{am}\,\beta}\right)}{\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,u}{\sin^2 \mathrm{am}\,(\alpha+\beta)}\right)\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,u}{\sin^2 \mathrm{am}\,(\alpha-\beta)}\right)} = \frac{\left(1-\frac{\sin^2 \mathrm{am}\,\alpha}{\sin^2 \mathrm{am}\,\beta}\right)^2}{(1-\varkappa^2 \sin^2 \mathrm{am}\,u \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha)^2}$$

quarum altera ex altera sequitur, fingere licet:

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{u+\alpha}{M_2},\lambda_2\right).\sin\mathrm{am}\left(\frac{u-\alpha}{M_2},\lambda_2\right)$$

$$= -\frac{\frac{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}{M_2^2}\Pi\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}{\sin^2\mathrm{am}\frac{m'ik'}{n}}\right)^2\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,\alpha}\right)\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\,(\alpha+ik')}\right)\Pi\left(1-\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u}{\sin^2\mathrm{am}\left(\alpha\pm\frac{m'ik'}{n}\right)}\right)}{\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu ik'}{n}\right)^2\Pi\left[1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\left(\alpha\pm\frac{\mu ik'}{n}\right)\right]}.$$

His formulis, si ipsi α valores tribuuntur $\frac{2\Lambda_2}{n}$, $\frac{4\Lambda_2}{n}$, ... $\frac{n-2}{n}\Lambda_2$, substitutis in formulam:

$$\sin\mathrm{am}\,(nu,\varkappa)=\sqrt{\left(\frac{\lambda_2^n}{\varkappa}\right)}(-1)^{\frac{n}{2}-1}\sin\mathrm{am}\frac{u}{M_2}.\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}+\Lambda_2\right)\Pi\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2}\pm\frac{m}{n}\Lambda_2\right)$$

nanciscimur, posito $\sin\mathrm{am}\,u=x$, (mod. λ_2)

$$\sin\mathrm{am}\,nu=\frac{Px\sqrt{(1-x^2)}\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}\,\Pi_1\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm m'ik'}{n}}\right)}{\Pi_0\left(1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}\right)}\ *),$$

ubi P significat factorem constantem:

$$P=\frac{\sqrt{\left(\frac{\lambda_2^n}{\varkappa}\right)}\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{mk}{n}\Pi\left(\frac{\sin^2\mathrm{am}\frac{mk}{n}}{\sin^2\mathrm{am}\frac{m'ik'}{n}}\right)}{M_2^{n-1}\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{mk}{n}\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu ik'}{n}\right)^2}$$

$$=\frac{\Pi\Delta^2\mathrm{am}\frac{mik'}{n}\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{mk}{n}\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{mk}{n}\sin^2\mathrm{am}\frac{m'ik'}{n}\right)^2.\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu k}{n}\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu'ik'}{n}\right)^2}{\Pi\Delta^2\mathrm{am}\frac{\mu'ik'}{n}\Pi\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu k}{n}\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{mk}{n}\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu'ik'}{n}\right)^2.\Pi\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu k}{n}\sin^2\mathrm{am}\frac{m'ik'}{n}\right)^2}$$

Quum vero constantem M_2P valorem esse functionis $\frac{\sin\mathrm{am}\,nu}{\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M_2},\lambda_2\right)}$ pro valore argumenti $u=0$ sine negotio intelligatur, quem deinde, differentiatione facta, $=nM_2$ invenimus, ipsum $P=n$ esse videmus.

Postquam deinde formula deducta est:

$$\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u+\alpha}{M},\lambda\right)\Delta\,\mathrm{am}\left(\frac{u-\alpha}{M},\lambda\right)=$$

$$\frac{\Pi\left[1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\frac{\mu k}{n}\right]^2\Pi\left[1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{\mu k}{n}\pm\alpha\right)\right]}{\Delta^2\mathrm{am}\,\alpha\Pi\left[1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha\sin^2\mathrm{am}\frac{mk}{n}\right]^2[1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha][1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}(k+\alpha)]\Pi\left[1-\varkappa^2x^2\sin^2\mathrm{am}\left(\frac{mk}{n}\pm\alpha\right)\right]}$$

*) De signorum Π_0, Π_1 et postea Π_2 et Π_3 significatione vid. §. 2 init.

eodem fere modo, quo antea, ex transformatione prima cum supplementaria reperire licet:

$$\Delta \operatorname{am} nu = \frac{\Pi_3\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu k \pm \mu' i k'}{n}\right)}{\Pi_0\left(1-\varkappa^2 x^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{m k \pm \mu i k'}{n}\right)}.$$

Constantem, quae offertur,

$$\sqrt{\left(\frac{\varkappa'}{\lambda'^n}\right)} \cdot \frac{\Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu k}{n} \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu' i k'}{n}\right)^2}{\Pi \Delta^2 \operatorname{am} \frac{\mu' i k'}{n} \Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} \frac{m k}{n} \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu' i k'}{n}\right)^2}$$

substituto valore ipsius $\sqrt{\left(\frac{\varkappa'}{\lambda'^n}\right)}$, unitati, uti debet, aequalem esse reperimus.

Expressio ipsius $\cos \operatorname{am} nu$ alio modo e transformatione prima cum supplementaria derivatur, advocata formula supra allegata:

$$1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{A^2} = \frac{\Pi\left(1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\alpha+\frac{m' k}{n}\right)}\right)}{(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u) \Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} \frac{m k}{n}\right)^2}$$

ubi numero m' tribuuntur valores 0, 2, 4, 6, ... n .... $2(n-1)$. Cui videmus etiam dari posse formam:

$$1 - \frac{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\frac{\alpha}{M}, \lambda\right)} = \frac{\left(1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am} \alpha}\right)\left(1-\frac{\sin^2 \operatorname{am}}{\sin^2 \operatorname{am}(\alpha+kj)}\right) \Pi\left(1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} u}{\sin^2 \operatorname{am}\left(\alpha \pm \frac{m k}{n}\right)}\right)}{(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u) \Pi\left(1-\varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} u \sin^2 \operatorname{am} \frac{m k}{n}\right)^2}.$$

Porro adhibeamus formulam:

$$\cos \operatorname{am} nu = \frac{\Pi\left(1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{M}}{\sin^2 \operatorname{coam} \frac{m i \Lambda'}{n}}\right)}{\Pi\left(1-\lambda^2 \sin \operatorname{am} \frac{u}{M} \sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu i \Lambda'}{n}\right)}, \quad (\text{mod. } \lambda)$$

$$= \frac{\Pi\left(1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{M}}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{k+m i k'}{n M}}\right)}{\Pi\left(1-\frac{\sin^2 \operatorname{am} \frac{u}{M}}{\sin^2 \operatorname{am} \frac{\mu i k'}{n M}}\right)}; \quad (\text{mod. } \lambda)$$

Qua in expressione si pro singulis factoribus substituerimus valores praecedentes, in numeratore argumento α tribuentes valores $\frac{k+mik'}{n}$, in denominatore autem valores $\frac{\mu ik'}{n}$, facillime reperimus formulam functionis $\cos\operatorname{am} nu$, ab initio hujus commentatiunculae alia via deductam:

$$\cos\operatorname{am} nu = \frac{\Pi_2\left(1-\frac{x^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{\mu k\pm mik'}{n}}\right)}{\Pi_0\left(1-\varkappa^2 x^2\sin^2\operatorname{am}\frac{mk\pm\mu ik'}{n}\right)}$$

ubi est $x = \sin\operatorname{am} u$.

§. 12.

De transformatione integralium ellipticorum secundae et tertiae speciei, et insuper functionis, quae a Cl° *Jacobi*, auctore nominatur $\Omega(u)$.

Revocemus formulam (3.) §ⁱ 6.

$$\frac{1}{M_2}\Delta^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = \Delta^2\operatorname{am} u + \Delta^2\operatorname{am}(u+\omega) + \Sigma\,\Delta^2\operatorname{am}\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right) + 2\tau;$$

si quidem $\tau = \Sigma\cot^2\operatorname{am}\frac{\mu\omega}{n}$, $\omega = ak+2bik'$; ex qua sequitur, integratione facta, quum sit $\int_0^u \Delta^2\operatorname{am} u\,.\,\partial u = E(u)$,

$$\int_0^u \frac{1}{M^2}\Delta^2\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)\partial u = \frac{1}{M}\int_0^{\frac{u}{M}} \Delta^2\operatorname{am}(u,\lambda)\,\partial u = \frac{1}{M}E\left(\frac{u}{M},\lambda\right),$$

1. $$\frac{1}{M}E\left(\frac{u}{M},\lambda\right) = E(u)+E(u+\omega)+\Sigma E\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)+2\tau u - E(\omega)$$

ergo

$$\frac{1}{M}E(\Lambda,\lambda) = \frac{2\tau\omega}{n} - E(\omega)$$

sive

$$\frac{E(\Lambda,\lambda)}{M^2\Lambda} - \frac{nE(\omega)}{\omega} = 2\tau.$$

Formula (1.), adhibitis formulis (vid. introd.):

$$E(u+\omega) = E(u)+E(\omega)-\varkappa^2\sin\operatorname{am} u\sin\operatorname{coam} u,$$

$$E(u+a)+E(u-a) = 2E(u) - \frac{2\varkappa^2\sin\operatorname{am} u\cos\operatorname{am} u\,\Delta\operatorname{am} u\sin^2\operatorname{am} a}{1-\varkappa^2\sin^2\operatorname{am} u\sin^2\operatorname{am} a}$$

abit in hanc:

$$2.\quad nE(u)-\frac{1}{M}E\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+2\tau u$$

$$=\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\sin\mathrm{coam}\,u+2\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,u\cos\mathrm{am}\,u\,\Delta\mathrm{am}\,u\,\Sigma\frac{\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}$$

$$=-\frac{\partial.\log\Delta\mathrm{am}\,u}{\partial u}-\Sigma\frac{\partial.\log\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right)}{\partial u}.$$

Quum porro sit e notatione Cl^{i} *Jacobi* $\int_0^u E(u)\,\partial u=\log\Omega(u)$, formulae (1.) et (2.) denuo integratae, praebent, si insuper a functionum logarithmis ad ipsas functiones transis:

$$3.\quad \Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)=e^{\tau uu-uE(\omega)}.\Omega(u).\frac{\Omega(u+\omega)}{\Omega(\omega)}\prod\frac{\Omega\left(u\pm\frac{m\omega}{n}\right)}{\Omega^2\left(\frac{m\omega}{n}\right)},$$

$$4.\quad \frac{e^{-\tau uu}\,\Omega\left(\frac{u}{M},\lambda\right)}{\Omega^n(u)}=\Delta\,\mathrm{am}\,u\prod\left(1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,u\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\right).$$

Unde elucet, et hic, sicuti in transformatione imparis ordinis a Cl^{o} *Jacobi* demonstratum est, transformationem et integralium ellipticorum secundae speciei, quae significantur charactere $E(u,\varkappa)$, et functionis $\Omega(u)$, a solo denominatore sin am transformati $\sin\mathrm{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)$ pendere.

E Comm. deinde Cl^{i} *Jacobi* in Diar. *Crell.* vol. IV. pag. 378 edita cognoscitur, esse:

$$\Pi(u,a)=u\,E(a)+\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)},$$

si charactere $\Pi(u,a)$ sive $\Pi(u,a,\varkappa)$ designatur integrale:

$$\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,a\cos\mathrm{am}\,a\,\Delta\,\mathrm{am}\,a\int_0^u\frac{\sin^2\mathrm{am}\,u.\partial u}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\,a\sin^2\mathrm{am}\,u},$$

quod ad speciem tertiam integralium ellipticorum pertinet. Inde sequitur:

$$\Pi\left(\frac{u}{M},\frac{a}{M},\lambda\right)=\frac{u}{M}E\left(\frac{a}{M},\lambda\right)+\tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M},\lambda\right)}{\Omega\left(\frac{u+a}{M},\lambda\right)}$$

atque, deducta expressione:

$$n\,\Pi(u,a)=n\,u\,E(a)+\frac{n}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)},$$

$$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\,\Pi(u, a, \varkappa)$$

$$= u\left[\frac{1}{M}E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - nE(a, \varkappa)\right] + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u-a}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u-a)} - \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega\left(\frac{u+a}{M}, \lambda\right)}{\Omega^n(u+a)}.$$

E qua expressione ope formularum antecedentium facile derivantur:

5. $$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - n\,\Pi(u, a) = u\left[\frac{1}{M}E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) - nE(a, \varkappa) - 2\tau a\right]$$

$$+ \tfrac{1}{2}\log\frac{\Delta\,\mathrm{am}(u-a)}{\Delta\,\mathrm{am}(u+a)} + \tfrac{1}{2}\Sigma\log\frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\sin^2\mathrm{am}(u-a)}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\sin^2\mathrm{am}(u+a)}$$

sive

$$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - \Pi(u, a)$$

$$= -u\left(\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,a.\sin\mathrm{coam}\,a + 2\varkappa^2\sin\mathrm{am}\,a.\cos\mathrm{am}\,a.\Delta\,\mathrm{am}\,a\,\Sigma\frac{\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\sin^2\mathrm{am}\,a}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\log\frac{\Delta\,\mathrm{am}(u-a)}{\Delta\,\mathrm{am}(u+a)} + \tfrac{1}{2}\Sigma\log\left(\frac{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\sin^2\mathrm{am}(u-a)}{1-\varkappa^2\sin^2\mathrm{am}\frac{m\omega}{n}\sin^2\mathrm{am}(u+a)}\right),$$

6. $$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) - \frac{u}{M}E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) + 2\tau a u - a\,E(\omega)$$

$$= \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a)}{\Omega(u+a)} + \tfrac{1}{2}\log\frac{\Omega(u-a+\omega)}{\Omega(u+a+\omega)} + \tfrac{1}{2}\Sigma\log\frac{\Omega\left(u-a+\frac{m\omega}{n}\right)\Omega\left(u-a-\frac{m\omega}{n}\right)}{\Omega\left(u+a+\frac{m\omega}{n}\right)\Omega\left(u+a-\frac{m\omega}{n}\right)},$$

7. $$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) + u\left[nE(a) - \frac{1}{M}E\left(\frac{a}{M}, \lambda\right) + 2\tau a\right] + \omega E(a) - a\,E(\omega)$$

$$= \Pi(u, a) + \Pi(u+\omega, a) + \Sigma\,\Pi\left(u \pm \frac{m\omega}{n}, a\right).$$

8. $$\Pi\left(\frac{u}{M}, \frac{a}{M}, \lambda\right) = \Pi(u, a) + \Pi(u, a+\omega) + \Sigma\,\Pi\left(u, a \pm \frac{m\omega}{n}\right).$$

Transformationes integralium ellipticorum secundae et tertiae speciei parcius perscripsimus, quia has res fere easdem invenimus, atque pro numero n impari Cl. *Jacobi* l. l. exhibuit.

2.

Dato systemate n aequationum linearium inter n incognitas, valores incognitarum per integralia definita $(n-1)$tuplicia exhibentur.

(Scr. *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

1.

Designabo, uti saepius, per expressionem

$$\Sigma \pm a_{1,1}\, a_{2,2}\, a_{3,3} \ldots . a_{n,n}$$

aggregatum omnium terminorum, qui ex uno

$$a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots . a_{n,n}$$

proveniunt, indicibus omnibus aut prioribus aut posterioribus omnimodis inter se permutatis, semissi terminorum praefixo signo $+$, alteri semissi praefixo signo $-$, lege signorum ita determinata ut ex indicibus aut posterioribus aut prioribus binis quibuslibet permutatis, termini positivi omnes in negativos abeant, et vice versa. Cuiusmodi aggregatorum est notissima formatio et tritissimus usus in resolutione algebraica aequationum linearium; cui igitur rei non immoramur, optime olim ab ill. *Laplace* ante hos sexaginta annos expositae. Hoc unum adiicis, in sequentibus nos in aggregato assignato terminum

$$a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots . a_{n,n}$$

positive sumtum accipere, unde tota expressio prorsus definita est.

Porro designo per expressionem

$$\Sigma a_{\varkappa,\lambda} . x_\varkappa\, x_\lambda$$

aggregatum terminorum omnium, qui ex uno termino sub signo summatorio posito proveniunt, si utrique simul indici $\varkappa$, λ valores omnes tribuis $1, 2, 3, \ldots . n$. Statuo porro

$$a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa},$$

unde in expressione apposita termini, in quibus $\varkappa = \lambda$, sive qui in quadrata variabilium $x_\varkappa$ ducuntur, semel, reliqui omnes bis inveniuntur. Ponamus denique, radicali positive accepto,

$$x_n = \sqrt{(1 - x_1 x_1 - x_2 x_2 \ldots . - x_{n-1} x_{n-1})};$$

dedi in Commentatione de integralibus multiplicibus (Diar. *Crell.* Vol. XII. pag. 64) formulam:

$$1.\quad \int_{x_n}^{n-1} \frac{\partial x_1\, \partial x_2 \ldots . \partial x_{n-1}}{x_n (\Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda)^{\frac{n}{2}}} = \frac{2^{n-1} S}{\sqrt{(\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots . a_{n,n})}},$$

in qua integrale extenditur ad valores reales omnes et positivos et negativos variabilium x_1, x_2, ... x_{n-1}, pro quibus x_n valorem realem servat, seu pro quibus

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots . + x_{n-1} x_{n-1} \leqq 1,$$

et S designat numerum

$$S = \frac{1}{2.4.6 \ldots . (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}},$$

si n par, aut

$$S = \frac{1}{1.3.5 \ldots . (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

si n impar. Numerum 2^{n-1} loco 2^n, quod in loco citato legitur, scripsi, quia illo loco valor duplus integralis subintelligitur. Porro supponitur in formula antecedente, valorem expressionis

$$\Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

esse positivum pro omnibus valoribus realibus ipsorum x_1, x_2, ... x_n.

Statuamus iam, datum esse systema n aequationum linearium:

$$2.\quad \begin{cases} a_{1,1} y_1 + a_{1,2} y_2 + a_{1,3} y_3 \ldots . + a_{1,n} y_n = m_1, \\ a_{2,1} y_1 + a_{2,2} y_2 + a_{2,3} y_3 \ldots . + a_{2,n} y_n = m_2, \\ a_{3,1} y_1 + a_{3,2} y_2 + a_{3,3} y_3 \ldots . + a_{3,n} y_n = m_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n,1} y_1 + a_{n,2} y_2 + a_{n,3} y_3 \ldots . + a_{n,n} y_n = m_n; \end{cases}$$

sit porro brevitatis causa:

$$\Sigma \pm a_{1,1} a_{2,2} \ldots . a_{n,n} = N.$$

Iam observavi in Commentatione citata pag. 20, si quantitates $a_{\varkappa,\lambda}$ omnes diversae sint, valores incognitarum exprimi per differentialia partialia ipsius N ope aequationum:

$$3.\quad \begin{cases} N y_1 = \left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,1}}\right) m_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,1}}\right) m_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,1}}\right) m_3 \ldots . + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,1}}\right) m_n, \\ N y_2 = \left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,2}}\right) m_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,2}}\right) m_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,2}}\right) m_3 \ldots . + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,2}}\right) m_n, \\ N y_3 = \left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,3}}\right) m_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,3}}\right) m_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,2}}\right) m_3 \ldots . + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,3}}\right) m_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ N y_n = \left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,n}}\right) m_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,n}}\right) m_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,n}}\right) m_3 \ldots . + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,n}}\right) m_n. \end{cases}$$

Si vero $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$, uti in formula (1.) supponitur, differentiale partiale secundum sumtum, quoties non $\varkappa = \lambda$, obtinetur, si primum $a_{\varkappa,\lambda}$ et $a_{\lambda,\varkappa}$ diversae statuuntur, atque differentialia partialia secundum $a_{\varkappa,\lambda}$ et secundum $a_{\lambda,\varkappa}$ sumta iunguntur, ac deinde $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$ statuitur; quo facto cum utraque differentialia aequalia fiant, casu quo $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$ valor duplus emergit eius qui in formulis (3.) locum habere debet. Hinc casu quo $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$, qui in antecedentibus supponitur, loco formularum (3.) statuendae sunt sequentes:

$$4.\quad \begin{cases} Ny_1 = \left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,1}}\right) m_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,1}}\right) m_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,1}}\right) m_3 \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,1}}\right) m_n, \\ Ny_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,2}}\right) m_1 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,2}}\right) m_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,2}}\right) m_3 \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,2}}\right) m_n, \\ Ny_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,3}}\right) m_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,3}}\right) m_2 + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,3}}\right) m_3 \ldots + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,3}}\right) m_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ny_n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{1,n}}\right) m_1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{2,n}}\right) m_2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial N}{\partial a_{3,n}}\right) m_3 \ldots + \left(\frac{\partial N}{\partial a_{n,n}}\right) m_n. \end{cases}$$

Harum formularum ope deducis e valore ipsius $\frac{1}{\sqrt{N}}$, quem formula (1.) dedimus, has expressiones incognitarum:

$$5.\quad \begin{cases} \frac{n}{2^{n-1}S} \cdot \frac{y_1}{\sqrt{N}} = \int^{n-1} \frac{x_1 (m_1 x_1 + m_2 x_2 \ldots + m_n x_n)\, \partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n [\Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda]^{\frac{n+2}{2}}}, \\ \frac{n}{2^{n-1}S} \cdot \frac{y_2}{\sqrt{N}} = \int^{n-1} \frac{x_2 (m_1 x_1 + m_2 x_2 \ldots + m_n x_n)\, \partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n [\Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda]^{\frac{n+2}{2}}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{n}{2^{n-1}S} \cdot \frac{y_n}{\sqrt{N}} = \int^{n-1} \frac{x_n (m_1 x_1 + m_2 x_2 \ldots + m_n x_n)\, \partial x_1\, \partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n [\Sigma_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda]^{\frac{n+2}{2}}}. \end{cases}$$

Quae sunt expressiones quaesitae.

2.

Formulae (5.) duplicem conditionem poscunt, et ut sit $a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa}$, et ut expressio

$$\Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda$$

pro omnibus valoribus realibus ipsarum $x_1, x_2, \ldots x_n$ valorem positivum servet. Hinc systema aequationum linearium propositarum (2.), quarum solutio formulis (5.) exhibetur, tamquam minus generale considerari debet. Sed facile ad eas formulae generales revocantur.

Sit systema generale n aequationum linearium inter n incoguitas $z_1, z_2, \ldots z_n$ propositarum:

$$6. \quad \begin{cases} b_{1,1} z_1 + b_{1,2} z_2 + \ldots + b_{1,n} z_n = m_1, \\ b_{2,1} z_1 + b_{2,2} z_2 + \ldots + b_{2,n} z_n = m_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{n,1} z_1 + b_{n,2} z_n + \ldots + b_{n,n} z_n = m_n, \end{cases}$$

nulla conditione de coëfficientibus adiecta. Statuatur porro

$$7. \quad \begin{cases} z_1 = b_{1,1} y_1 + b_{2,1} y_2 \ldots + b_{n,1} y_n, \\ z_2 = b_{1,2} y_1 + b_{2,2} y_2 \ldots + b_{n,2} y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = b_{1,n} y_1 + b_{2,n} y_2 \ldots + b_{n,n} y_n, \end{cases}$$

Quibus ipsarum $z_1, z_2, \ldots z_n$ valoribus substitutis in (6.), ponamus, obtineri systema aequationum (2.). Unde generaliter habetur:

$$8. \quad a_{\varkappa,\lambda} = b_{\varkappa,1} b_{\lambda,1} + b_{\varkappa,2} b_{\lambda,2} + \ldots + b_{\varkappa,n} b_{\lambda,n}.$$

Qui ipsorum $a_{\varkappa,\lambda}$ valores tales sunt, ut utrique conditioni supra propositae satisfiat. Ipso enim intuitu patet e (8.), fieri

$$a_{\varkappa,\lambda} = a_{\lambda,\varkappa},$$

et habetur

$$\begin{aligned} \Sigma a_{\varkappa,\lambda} x_\varkappa x_\lambda = {} & [b_{1,1} x_1 + b_{2,1} x_2 \ldots + b_{n,1} x_n]^2 \\ & + [b_{1,2} x_1 + b_{2,2} x_2 \ldots + b_{n,2} x_n]^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [b_{1,n} x_1 + b_{2,n} x_2 \ldots + b_{n,n} x_n]^2; \end{aligned}$$

quam expressionem patet pro omnibus valoribus realibus ipsarum x_1, $x_2, \ldots x_n$ valores semper positivos habere. Unde pro valoribus ipsorum $a_{\varkappa,\lambda}$, quos formula (8.) exhibet, formulis (5.) tuto uti licet. Hinc si insuper observas formulam notam seu probatu facilem:

$$9. \quad \Sigma \pm a_{1,1} a_{1,2} \ldots a_{n,n} = (\Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n})^2,$$

habemus e (7.) theorema sequens.

Theorema.

„Sit propositum inter n incognitas $z_1, z_2, \ldots z_n$ systema n aequationum linearium

$$\begin{aligned} b_{1,1} z_1 + b_{1,2} z_2 \ldots + b_{1,n} z_n &= m_1, \\ b_{2,1} z_1 + b_{2,2} z_2 \ldots + b_{2,n} z_n &= m_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ b_{n,1} z_1 + b_{n,2} z_2 \ldots + b_{n,n} z_n &= m_n; \end{aligned}$$

statuamus

$$\begin{aligned} X = {} & [b_{1,1}x_1 + b_{2,1}x_2 \ldots + b_{n,1}x_n]^2 \\ & + [b_{1,2}x_1 + b_{2,2}x_2 \ldots + b_{n,2}x_n]^2 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + [b_{1,n}x_1 + b_{2,n}x_2 \ldots + b_{n,n}x_n]^2, \end{aligned}$$

porro

$$M = m_1 x_1 + m_2 x_2 \ldots + m_n x_n,$$

ubi

$$x_n = \sqrt{(1 - x_1 x_1 - x_2 x_2 \ldots - x_{n-1} x_{n-1})},$$

radicali positive accepto; porro ponamus:

$$\nabla = \pm \Sigma \pm b_{1,1} b_{2,2} \ldots b_{n,n},$$

signo ancipiti, ante ipsum Σ posito, ita determinato, ut valor ipsius ∇ positivus prodeat. Quibus omnibus positis, erit:

$$\frac{n}{2^{n-1}S} \cdot \frac{z_1}{\nabla} = \int^{n-1} \frac{M(b_{1,1}x_1 + b_{2,1}x_2 \ldots + b_{n,1}x_n)\,\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n . X^{\frac{n+2}{2}}},$$

$$\frac{n}{2^{n-1}S} \cdot \frac{z_2}{\nabla} = \int^{n-1} \frac{M(b_{1,1}x_1 + b_{2,2}x_2 \ldots + b_{n,2}x_n)\,\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n . X^{\frac{n+2}{2}}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n}{2^{n-1}S} \cdot \frac{z_n}{\nabla} = \int^{n-1} \frac{M(b_{1,n}x_1 + b_{2,n}x_2 \ldots + b_{n,n}x_n)\,\partial x_1\,\partial x_2 \ldots \partial x_{n-1}}{x_n . X^{\frac{n+2}{2}}},$$

integralibus $(n-1)$tuplicibus extensis ad omnes valores reales ipsorum x_1, x_2, ... x_{n-1} et positivos et negativos, pro quibus etiam x_n realis fit sive pro quibus

$$x_1 x_1 + x_2 x_2 \ldots + x_{n-1} x_{n-1} \leqq 1;$$

et designante S aut

$$\frac{1}{2.4 \ldots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \text{ aut } \frac{1}{1.3.5 \ldots (n-2)} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}},$$

prout n aut par aut impar."

D. 3. Dec. 1834.

3.

Zur Theorie der Curven.

(Von dem Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Preufsen.)

Man denke sich an drei aufeinander folgenden Puncten einer Curve doppelter Krümmung P, P_1, P_2 (Taf. I. Fig. 1.) die Normal-Ebenen und ihren gemeinschaftlichen Durchschnitt K, welcher der Mittelpunct der Schmiegungskugel ist, d. h. der Kugel, welche mit der Curve eine Berührung 3ter Ordnung hat; es seien ferner KC und KC_1 die Krümmungs-Axen des ersten und zweiten Punctes, d. h. die geraden Linien, die im Mittelpuncte des Krümmungskreises auf seiner Ebene, der Schmiegungs-Ebene, senkrecht stehen; diese können als die Durchschnitte der ersten und zweiten, und der zweiten und dritten Normal-Ebene betrachtet werden; sie gehen daher beide durch den gemeinschaftlichen Durchschnittspunct der drei Normal-Ebenen K, und die durch sie gelegte Ebene ist die zweite Normal-Ebene selbst. Es seien ferner C, C_1 die dem ersten und zweiten Puncte P und I_1 entsprechenden Mittelpuncte der Krümmung, und daher PC und P_1C_1 die diesen Puncten entsprechenden Krümmungshalbmesser. Die Ebene der gezeichneten Figur, in welcher diese Linien und Puncte dargestellt sind, ist also die an den zweiten Punct P_1 gelegte Normal-Ebene; das Element der gegebenen Curve P_1P_2 hat man sich in P_1 senkrecht auf diese Ebene zu denken. Es ist noch P_1K der Halbmesser der Schmiegungskugel, CC_1 das Element der Curve der Krümmungsmittelpuncte; $C_1P_1C = C_1KC$ der Winkel, den die zwei aufeinander folgenden Schmiegungs-Ebenen P_1P_2C und $P_1P_2C_1$ mit einander bilden, oder zwei aufeinander folgende Tangenten der Curve der Mittelpuncte der Schmiegungskugeln; P_1CP gleich dem Winkel, den die beiden aufeinander folgenden Tangenten PP_1, P_1P_2 mit einander bilden, da CP, CP_1 in der durch sie gelegten Ebene PP_1P_2C auf ihnen senkrecht stehn.

Man bezeichne mit (CP, C_1P_1) den Winkel, den zwei aufeinander folgende Krümmungshalbmesser mit einander bilden, so hat man, da CP_1 die senkrechte Projection von C_1P_1 auf die Ebene CP_1P ist, die Gleichung

$$\cos(CP, C_1P_1) = \cos C_1P_1C . \cos P_1CP,$$

woraus, da die Winkel unendlich klein sind, folgt

$$(C_1P_1, CP)^2 = C_1P_1C^2 + P_1CP^2,$$

oder der bekannte Satz, dafs das Quadrat des Winkels, den zwei auf einander folgende Krümmungshalbmesser mit einander bilden, gleich ist der Summe der Quadrate der Winkel, die zwei auf einander folgende Schmiegungsebenen und zwei auf einander folgende Tangenten mit einander machen.

Aus der gezeichneten Figur folgt ferner der Satz:

„Wenn man über dem Halbmesser der Schmiegungskugel als Durchmesser in der Normal-Ebene einen Halbkreis beschreibt, so berührt er die Curve der Mittelpuncte der Krümmung."

In diesem Halbkreise liegen die 4 Puncte P_1, C, C_1, K; der Bogen CC_1 ist daher gleich seinem Durchmesser P_1K mal den Peripheriewinkel C_1P_1C, der über diesem Bogen steht. Man hat daher den Satz:

„Das Element des Bogens der Curve der Krümmungsmittelpuncte ist gleich dem Halbmesser der Schmiegungskugel mal den Winkel der Schmiegungs-Ebenen."

Man hat ferner in dem Kreisviereck P_1CC_1K, $C_1CP_1 = 2R - C_1KP_1 = R + C_1P_1K$; fiele C_1 auf die andre Seite von C, so wäre $C_1CP_1 = C_1KP_1 = R - C_1P_1K$; woraus der Satz folgt:

„Die Winkel, welche die Tangente an der Curve der Krümmungsmittelpuncte und der Halbmesser der Schmiegungskugel mit dem Krümmungshalbmesser machen, ergänzen sich zu einem rechten."

Man darf aber aus vorstehendem Satze nicht schliefsen, dafs die Tangente an der Curve der Krümmungsmittelpuncte und der Halbmesser der Schmiegungskugel auf einander senkrecht stehn, sondern ihre Lage ist so, dafs

„der Winkel, den die Tangente an der Curve der Krümmungsmittelpuncte und ein vom Mittelpuncte der Krümmung auf den Halbmesser der Schmiegungskugel gefälltes Perpendikel mit einander bilden, und der Nebenwinkel desselben, von dem Krümmungshalbmesser und der Krümmungs-Achse halbirt werden."

Will man noch die Differenz zweier auf einander folgenden Krümmungshalbmesser wissen, so fälle man das Perpendikel CB von C auf P_1C_1, so wird, da $CP = CP_1 = P_1B$, diese Differenz

$$C_1B = CC_1 . \cos CC_1P_1 = CC_1 \cos CKP_1 = CC_1 . \sin KP_1C$$
$$= KP_1 . \sin KP_1C . \sin C_1P_1C = KC . \sin C_1P_1C,$$

oder:

„Die Differenz zweier auf einander folgenden Krümmungshalbmesser ist gleich dem Elemente des Bogens der Curve der Krümmungsmittelpuncte mal den Cosinus des Winkels, den es mit dem Krümmungshalbmesser bildet oder den Sinus des Winkels, den der Halbmesser der Schmiegungskugel mit dem Krümmungshalbmesser macht, oder auch gleich der Distanz der Mittelpuncte der Schmiegungskugel und des Schmiegungskreises mal den Winkel der Schmiegungs-Ebenen."

Wenn der Krümmungshalbmesser mit der Tangente der Curve der Krümmungsmittelpuncte zusammenfallen soll, so mufs nach vorstehenden Sätzen der Halbmesser der Krümmungskugel auf dem Krümmungshalbmesser senkrecht stehn, oder der Mittelpunct der Schmiegungskugel in's Unendliche fallen, ihr Halbmesser selbst also unendlich grofs sein. Dann fällt die Schmiegungskugel mit der Schmiegungs-Ebene zusammen, die also dann durch 4 auf einander folgende Puncte geht. Ist dieses nun für alle Puncte der gegebenen Curve der Fall, so haben wir ein System Puncte, von denen je vier auf einander folgenden in einer Ebene liegen; woraus folgt, dafs alle Puncte in derselben Ebene liegen oder die Curve eben sein mufs. Wir sehen also

„dafs nur für eine ebene Curve die Curve ihrer Krümmungsmittelpuncte ihre Evolute wird, oder von den Krümmungshalbmessern berührt wird."

Lagrange, in seiner Theorie der Functionen, scheint andrer Ansicht oder hierüber nicht im Klaren gewesen zu sein. Er giebt S. 232 die Bedingungsgleichung, damit der Krümmungshalbmesser die Curve der Krümmungsmittelpuncte tangirt. Diese ist

$$m'(y-b)+n'(z-c)=0,$$

wo, nach S. 228 und S. 229,

$$m=\frac{z''}{z'y''-y'z''}, \qquad n=-\frac{y''}{z'y''-y'z''},$$

$$b=y+\frac{(n-z')d}{R}, \qquad c=z-\frac{(m-y')d}{R}.$$

Er bemerkt hierauf S. 232, dafs die Bedingungsgleichung offenbar Statt findet, wenn m und n constant sind, in welchem Falle die gegebene Curve ganz in der durch diese Gleichung bestimmten Ebene liege. „Wenn aber diese Gröfsen nicht constant sind," setzt er hinzu, „so bestimmen sie die Schmiegungs-Ebene der Curve (er nennt diese schlecht-

hin *plan tangent*, worunter man sonst auch jede Ebene versteht, die durch die Tangente der Curve geht), und wenn die vorstehende Gleichung (die angegebene Bedingungsgleichung) Statt hat, so bilden die Krümmungshalbmesser eine abwickelbare Oberfläche." Es geht nämlich aus dem darauf Folgenden hervor, dafs es im Text statt „*les rayons osculateurs* (wohl ein sehr uneigentlicher Ausdruck) *formeront une courbe développable*" heifsen soll *une surface développable*, da er, um es zu beweisen, das Princip der abwickelbaren Oberflächen aufstellt. Substituirt man aber in die Lagrangesche Bedingungsgleichung die gegebnen Werthe von m, n, b, c, so erhält man eine Differenzialgleichung, deren Integration augenblicklich lehrt, dafs die Curve immer eben, und dafs die Gröfsen m und n immer constant sind, auch die Krümmungshalbmesser nie eine abwickelbare Oberfläche, sondern nur eine Ebene bilden können. Durch Substitution der Werthe von b und c verwandelt sich nämlich die Bedingungsgleichung in folgende:

$$0 = n'(m-y')-m'(n-z').$$

Es ist aber

$$my'+nz'+1=0, \qquad my''+nz''=0,$$

woraus, durch Differenziation:

$$m'y'+n'z'=0, \qquad m'y''+n'z''=-[my'''+nz'''].$$

Multiplicirt man nun die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(m-y')y'+(n-z')z' &= -[1+y'^2+z'^2],\\ m'y''+\ n'\ z'' &= -[my'''+nz'''] \end{aligned}$$

mit einander, und zieht das Product der beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(m-y')y''+(n-y')z'' &= -[y'y''+z'z''],\\ m'y'+\ n'z' &= 0 \end{aligned}$$

davon ab, so erhält man

$$[(m-y')n'-(n-z')m'][y'z''-z'y'']=[1+y'^2+z'^2][my'''+nz'''];$$

oder, da vermittelst der Bedingungsgleichung der Ausdruck links verschwindet,

$$my'''+nz'''=0,$$

oder, nach Substitution der Werthe von m und n,

$$z''y'''-y''z'''=0,$$

welches die Bedingungsgleichung in ihrer wahren und einfachsten Form ist. Durch Integration derselben, wenn man ihr die Form

$$\frac{y'''}{y''}-\frac{z'''}{z''}=0$$

gegeben hat, erhält man aber sogleich

$$\log z'' = \log y'' + \log \alpha, \quad \text{oder} \quad z'' = \alpha y''$$

wo α eine Constante, und durch zwei neue Integrationen,

$$z' = \alpha y' + \beta, \qquad z = \alpha y + \beta x + \gamma,$$

wo β, γ zwei neue Constanten sind. Die Curve ist also immer eben. Zugleich erhält man für m und n die Werthe

$$m = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad n = -\frac{1}{\beta};$$

die Gröfsen m und n sind also immer constant.

Ich will bei dieser Gelegenheit, zu anderweitigem Gebrauch, die hauptsächlichsten bei diesen Untersuchungen vorkommenden Formeln zusammenstellen, wobei ich jedoch nicht, wie Lagrange in den angeführten Formeln, nach x, sondern nach dem Bogen s differentiiren werde, so dafs

$$s' = \sqrt{(x'x' + y'y' + z'z' = 1}$$

gesetzt wird, woraus

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = 0, \quad x'x''' + y'y''' + z'z''' = -[x''x'' + y''y'' + z''z'']$$

folgt. Man nenne r den Krümmungshalbmesser, R den Halbmesser der Schmiegungskugel; a, b, c die Coordinaten des Mittelpunctes des Schmiegungskreises; a_1, b_1, c_1 die Coordinaten des Mittelpunctes der Schmiegungskugel; α, β, γ die Winkel, welche die Tangente, α_1, β_1, γ_1 die Winkel, welche der Krümmungshalbmesser, α_2, β_2, γ_2 die Winkel, welche die Krümmungs-Achse, α_3, β_3, γ_3 die Winkel, welche der Halbmesser der Schmiegungskugel mit den Coordinaten-Achsen bildet. Es sei der Kürze halber

$$y'z'' - z'y'' = A, \quad z'x'' - x'z'' = B, \quad x'y'' - y'x'' = C,$$

woraus die Gleichungen folgen:

$$x'A + y'B + z'C = 0, \qquad x''A + y''B + z''C = 0,$$

und durch Differenziation

$$y'z''' - z'y''' = A', \quad z'x''' - x'z''' = B', \quad x'y''' - y'x''' = C',$$

woraus

$$x'A' + y'B' + z'C' = 0, \qquad x'''A' + y'''B' + z'''C' = 0.$$

Es sei ferner

$$\begin{aligned}\triangle &= x'(y''z''' - z''y''') + y'(z''x''' - x''z''') + z'(x''y''' - y''x''') \\ &= -[x''A' + y''B' + z''C'] = x'''A + y'''B + z'''C,\end{aligned}$$

woraus durch Differenziation

$$\triangle' = x^{\text{IV}}A + y^{\text{IV}}B + z^{\text{IV}}C.$$

Endlich sei

$$D = x'(y'''z^{IV} - z'''y^{IV}) + y'(z'''x^{IV} - x'''z^{IV}) + z'(x'''y^{IV} - y'''x^{IV})$$
$$= A'x^{IV} + B'y^{IV} + C'z^{IV} = -[A''x''' + B''y''' + C''z'''].$$

Nach diesen Bezeichnungen hat man den Krümmungshalbmesser

$$PC = r = \frac{1}{\sqrt{(x''x'' + y''y'' + z''z'')}} = \frac{1}{\sqrt{(AA + BB + CC)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-(x'x''' + y'y''' + z'z''')}},$$

die Coordinaten des Mittelpuncts des Krümmungskreises

$$a = x + r^2x'', \quad b = y + r^2y'', \quad c = z + r^2z'',$$

die Cosinus der Winkel, die der Krümmungshalbmesser mit den Coordinaten-Achsen bildet,

$$\cos\alpha_1 = rx'', \quad \cos\beta_1 = ry'', \quad \cos\gamma' = rz'',$$

die Cosinus der Winkel, die die Tangente und die Krümmungs-Achse mit den Coordinaten-Achsen bilden,

$$\cos\alpha = x', \quad \cos\beta = y', \quad \cos\gamma = z',$$
$$\cos\alpha_2 = rA, \quad \cos\beta_2 = rB, \quad \cos\gamma_2 = rC,$$

die Länge der Kümmungs-Achse CK,

$$CK = \frac{r'}{r^2\triangle} = -\frac{r}{\triangle}(x''x''' + y''y''' + z''z'''),$$

wo r' die Differenz der beiden auf einander folgenden Krümmungshalbmesser ist; der Halbmesser der Schmiegungskugel

$$KP = R = \frac{\sqrt{(A'A' + B'B' + C'C')}}{\triangle} = \sqrt{\left(r^2 + \frac{r'r'}{r^4\triangle^2}\right)}$$
$$= \frac{\sqrt{\left(x'''x''' + y'''y''' + z'''z''' - \frac{1}{r^4}\right)}}{\triangle},$$

die Coordinaten ihres Mittelpunctes

$$a_1 = a + \frac{r'A}{r\triangle} = x - \frac{A'}{\triangle}, \quad b_1 = b + \frac{r'B}{r\triangle} = x - \frac{B'}{\triangle},$$
$$c_1 = c + \frac{r'C}{r\triangle} = x - \frac{C'}{\triangle},$$

die Cosinus der Winkel, die ihr nach dem Puncte der Curve gezogne Halbmesser KP mit den Coordinaten-Achsen bildet,

$$\cos\alpha_3 = -\frac{A'}{R\triangle}, \quad \cos\beta_3 = -\frac{B'}{R\triangle}, \quad \cos\gamma_3 = -\frac{C}{R\triangle}.$$

Ich bemerke noch die Gleichungen

$$r'A + rA' = -x''.r^3\triangle, \quad r'B + rB' = -y''.r^3\triangle, \quad r'C + rC' = -z''.r^3\triangle$$
$$BC' - B'C = x'\triangle, \quad CA' - AC' = y'\triangle, \quad AB' - BA' = z'\triangle,$$

$$a_1' = \frac{A}{\triangle}\left(\frac{-1}{r^2}+\frac{D}{\triangle}\right), \quad b_1' = \frac{B}{\triangle}\left(\frac{-1}{r^2}+\frac{D}{\triangle}\right), \quad c_1' = \frac{C}{\triangle}\left(\frac{-1}{r^2}+\frac{D}{\triangle}\right),$$

aus welchen letztern Formeln das Bogen-Element der Curve der Mittelpuncte der Schmiegungskugeln folgt,

$$\sqrt{(a_1' a_1' + b_1' b_1' + c_1' c_1')} = \frac{1}{r\triangle}\left(\frac{-1}{r^2}+\frac{D}{\triangle}\right).$$

Die drei Winkel, welche zwei auf einander folgende Tangenten, Schmiegungs-Ebenen, Krümmungshalbmesser mit einander bilden, sind

$$\frac{1}{r}, \quad r^2\triangle, \quad \sqrt{\left(\frac{1}{r^2}+r^4\triangle^2\right)};$$

die Tangente des Neigungswinkels, welchen der Halbmesser der Schmiegungskugel mit der Schmiegungs-Ebene bildet, ist

$$\text{tang}\, KPC = \frac{r'}{r^3\triangle}; \quad \text{auch} \quad \cos KPC = \frac{r}{R}, \quad \sin KPC = \frac{r'}{r^2\triangle . R},$$

das Bogen-Element der Curve der Krümmungsmittelpuncte

$$CC' = \sqrt{(r^6\triangle^2 + r'r')} = R.r^2\triangle;$$

der Cosinus des Winkels, den dasselbe mit dem Halbmesser der Schmiegungskugel macht,

$$\frac{2r^3 r'\triangle}{r^6\triangle^2 + r'r'} = \frac{2r'}{r\triangle . R^2} = \sin 2\, KPC,$$

oder gleich dem Sinus des doppelten Neigungswinkels des Halbmessers der Schmiegungskugel zur Schmiegungs-Ebene; der Cosinus des Winkels, den das Element mit dem Krümmungshalbmesser macht,

$$\frac{r'}{\sqrt{(r^6\triangle^2 + r'r')}} = \sin KPC,$$

oder gleich dem Sinus des einfachen Nebenwinkels.

Wenn der Krümmungshalbmesser die Curve der Krümmungsmittelpuncte berührt, oder der Winkel, der das Element dieser Curve mit dem Krümmungshalbmesser macht, verschwindet, dann hat man

$$\triangle = 0,$$

oder

$$x'(y''z''' - z''y''') + y'(z''x''' - x''z''') + z'(x''y''' - y''x''') = 0.$$

Man sieht nicht sogleich, wie man ein Integral dieser Gleichung erhalten kann, was keine Schwierigkeit hatte, wenn man statt s', mit Lagrange, x' als constant setzt, in welchem Falle sich die Gleichung in die einfachere

$$y''z''' - z''x''' = 0$$

verwandelt, deren Integration keine Schwierigkeit machte. Aber nach den oben bemerkten Formeln erhält man, wenn man $\triangle$ mit $-r^3 x''$,

$-r^3y''$, $-r^3z''$ multiplicirt, die genauen Differenziale von rA, rB, rC; so dafs man, nach geschehener Multiplication und Integration, die drei ersten Integrale hat,

$$rB = \alpha, \quad rB = \beta, \quad rC = \gamma,$$

wo α, β, γ die willkürlichen Constanten sind. Aus diesen drei Gleichungen folgt aber

$$\alpha x' + \beta y' + \gamma z' = 0,$$

welches, noch einmal integrirt, die Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \delta,$$

oder die Gleichung einer Ebene giebt. Da $r^2\Delta$ der Winkel zweier auf einander folgenden Schmiegungs-Ebenen ist, so kann man die geometrische Bedeutung der Gleichung $\Delta = 0$ auch so aussprechen, dafs der Winkel zweier auf einander folgenden Schmiegungs-Ebenen verschwindet. Dann wird aber die Curve eben so eben, wie sie eine gerade Linie wird, wenn der Winkel zweier auf einander folgenden Tangenten verschwindet.

19. Dec. 1834.

4.

Über den Steinerschen Satz von den Primzahlen im 4ten Hefte des 13ten Bandes dieses Journals.

(Vom Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Pr.)

Es sei p eine Primzahl, $a_1, a_2, \ldots a_n$ andre durch p nicht theilbare Zahlen, welche durch p dividirt verschiedene Reste lassen; es sei ferner

$$\begin{aligned}(a_1-a_2)(a_1-a_3)\ldots(a_1-a_n) &= A_1,\\ (a_2-a_1)(a_2-a_3)\ldots(a_2-a_n) &= A_3,\\ \ldots\ldots\ldots\

man daher dem k nach und nach die Werthe $0, 1, 2, \ldots n-2$ giebt, so hat man für $\beta = 1$ den Satz:

> „Wenn p eine Primzahl ist, und man n durch p nicht theilbare Zahlen nimmt, welche, durch p dividirt, lauter verschiedene Reste lassen, so sind die Summen ihrer Combinationen mit Wiederholungen, zu $p-n$, zu $p-n+1$, zu $p-n+2$, ..., zu $p-2$ genommen, jede durch p theilbar."

Zu den Zahlen $p-n$, $p-n+1$, $p-n+2$, ..., $p-2$ kann man auch noch $\beta(p-1)$ addiren, wo β irgend eine ganze positive Zahl bedeutet.

Den 22. Febr. 1835.

5.

Zur Theorie des Kreises.

I. Von den Unterschieden der Flächen der in und um einen Kreis beschriebenen regelmäfsigen Vielecke.

Es sei BF (Taf. I. Fig. 2.) die halbe Seite eines in einen Kreis beschriebenen regelmäfsigen Vieleckes von n Seiten und AE die halbe Seite des umschriebenen Vielecks von eben so vielen Seiten: so ist der Unterschied der Flächen dieser beiden Vielecke, welcher F heifsen mag,

$$1. \quad F = n(EA.AC - BF.FC) = n.\frac{EA}{AC}\left(AC^2 - \frac{BF.FC.AC}{EA}\right).$$

Aber $\frac{AC}{EA} = \frac{FC}{BF}$, also $F = n.\frac{EA}{AC}(AC^2 - FC^2)$, und weil

$$AC^2 - FC^2 = BC^2 - FC^2 = BF^2,$$

$$2. \quad F = n.\frac{EA}{AC}.BF^2.$$

Nun sei Wink. ACD = Wink. BCD, also DG die halbe Seite des eingeschriebenen und HA die halbe Seite des umschriebenen regelmäfsigen Vielecks von $2n$ Seiten: so ist, auf dieselbe Weise, wenn man den Unterschied der Flächen dieser beiden Vielecke durch φ bezeichnet,

$$3. \quad \varphi = 2n.\frac{HA}{AC}.DG^2;$$

folglich ist

$$4. \quad \frac{F}{\varphi} = \frac{EA.BF^2}{2HA.DG^2}.$$

Es ist nun zwar $EA > 2HA$ und $BF > DG$, also ist $\frac{F}{\varphi}$ in jedem Fall >1; wie auch an sich natürlich ist: allein es frägt sich, welche andere ganze Zahl zunächst kleiner sei, als $\frac{F}{\varphi}$.

Es ist $\frac{EA}{AC} = \frac{BF}{FC}$ und $\frac{HA}{AC} = \frac{DG}{GC}$, also $\frac{EA}{HA} = \frac{BF.GC}{DG.FC}$, also in (4.)

$$5. \quad \frac{F}{\varphi} = \frac{BF^3.GC}{2DG^3.FC}.$$

Nun sind die Dreiecke AIC und DGC einander gleich; also ist das Dreieck ABC doppelt so grofs, als das Dreieck DGC; mithin ist

$$6. \quad AC.BF = 2DG.GC,$$

und folglich $\frac{BF}{DG} = \frac{2GC}{AC}$, mithin in (5.)

$$7. \quad \frac{F}{\varphi} = \frac{4GC^4}{AC^3 . FC}.$$

Ferner ist $\frac{NC}{IC} = \frac{GC}{DC}$ und $\frac{IM}{BI} = \frac{DG}{DC}$, oder, weil $IC = GC$, $IM = NF$, $BI = DG$, $DC = AC$:

$$\frac{NC}{GC} = \frac{GC}{AC} \quad \text{und} \quad \frac{NF}{DG} = \frac{DG}{AC};$$

also

$$8. \quad NC - NF = FC = \frac{GC^2 - DG^2}{AC}.$$

Dieses statt FC in (7.) gesetzt, giebt

$$9. \quad \frac{F}{\varphi} = \frac{4GC^4}{AC^2(GC^2 - DG^2)} = \frac{4GC^2}{AC^2\left(1 - \frac{DG^2}{GC^2}\right)}.$$

Aber $\frac{DG}{GC} > \frac{DG}{AC}$, also

$$1 - \frac{DG^2}{GC^2} < 1 - \frac{DG^2}{AC^2} < \frac{AC^2 - DG^2}{AC^2} < \frac{DC^2 - DG^2}{AC^2} < \frac{GC^2}{AC^2};$$

also ist

$$10. \quad \frac{F}{\varphi} > 4.$$

Das heifst: der Raum zwischen beliebigen regelmäfsigen um und in einen Kreis beschriebenen Vielecken von gleich vielen Seiten ist immer gröfser, als das *Vierfache* des Raumes zwischen regelmäfsigen in und um denselben Kreis beschriebenen Vielecken von doppelt so vielen Seiten.

II. Von den Unterschieden der Umfänge der in und um einen Kreis beschriebenen regelmäfsigen Vielecke.

Der Unterschied der Umfänge der um und in einen Kreis beschriebenen Vielecke von n Seiten, welcher U sein mag, ist

$$11. \quad U = 2n(EA - BF),$$

und der Unterschied der Umfänge der Vielecke von $2n$ Seiten, welcher u sein mag,

$$12. \quad u = 4n(HA - DG).$$

Also ist

$$13. \quad \frac{U}{u} = \frac{EA - BF}{2(HA - DG)}.$$

Da $\frac{EA}{BF}=\frac{AC}{FC}$ und $\frac{HA}{DG}=\frac{AC}{GC}$, und in (13.) $\frac{U}{u}=\frac{BF\left(\frac{EA}{BF}-1\right)}{2DG\left(\frac{HA}{DG}-1\right)}$, so ist

$$14.\quad \frac{U}{u}=\frac{BF\left(\frac{AC}{FC}-1\right)}{2DG\left(\frac{AC}{GC}-1\right)}=\frac{BF.GC(AC-FC)}{2DG.FC(AC-GC)}.$$

Weiter oben war $\frac{BF}{2DG}=\frac{GC}{AC}$ (6.), also ist

$$15.\quad \frac{U}{u}=\frac{GC^2(AC-FC)}{AC.FC(AC-GC)}.$$

Da $FC=\frac{GC^2-DG^2}{AC}$ (8.), so ist

$$16.\quad AC-FC=\frac{AC^2-GC^2+DG^2}{AC}=\frac{2DG^2}{AC}.$$

Auf dieselbe Weise findet man, wenn QCA die Hälfte des Winkels DCA ist,

$$17.\quad AC-GC=\frac{2QR^2}{AC};$$

Also ist in (15.)

$$18.\quad \frac{U}{u}=\frac{GC^2.2DG^2}{AC.FC.2QR^2}=\frac{GC^2.DG^2}{AC.FC.QR^2}.$$

Nun ist auf dieselbe Weise, wie $BF=\frac{2DG.GC}{AC}$ (6.), auch

$$19.\quad DG=\frac{2QR.RC}{AC};$$

also ist in (18.) $\frac{U}{u}=\frac{GC^2.4QR^2.RC^2}{AC^3.FC.QR^2}$, oder

$$20.\quad \frac{U}{u}=\frac{4GC^2.RC^2}{AC^3.FC},$$

und wenn man aus (8.) $FC=\frac{GC^2-DG^2}{AC}$ substituirt:

$$21.\quad \frac{U}{u}=\frac{4GC^2.RC^2}{AC^2(GC^2-DG^2)}=\frac{4RC^2}{AC^2\left(1-\frac{DG^2}{GC^2}\right)}.$$

Oben (9.) wurde gezeigt, dafs

$$\frac{4GC^2}{AC^2\left(1-\frac{DG^2}{GC^2}\right)}>4 \text{ ist.}$$

Also ist $\frac{4RC^2}{AC^2\left(1-\frac{DG^2}{GC^2}\right)}$ um so mehr gröfser als 4, weil $RC>GC$.

Folglich ist

$$22.\quad \frac{U}{u}>4.$$

Das heifst: der Unterschied der Umfänge beliebiger regelmäfsiger um und in einen Kreis beschriebener Vielecke

von gleich vielen Seiten ist immer gröfser, als das *Vierfache* des Unterschiedes der Umfänge regelmäfsiger in und um denselben Kreis beschriebener Vielecke von doppelt so vielen Seiten.

III. Anwendung auf die Theorie des Kreises.

1. Die Fläche des Kreises ist kleiner, als jedes umschriebene und gröfser, als jedes eingeschriebene regelmäfsige Vieleck. Nun ist der Unterschied der Flächen der um- und eingeschriebenen regelmäfsigen Vielecke von unendlich vielen Seiten gleich Null; denn der Unterschied der um- und eingeschriebenen Quadrate ist gleich der Hälfte des Quadrates des Durchmessers, und der Unterschied der Flächen der um- und eingeschriebenen Vielecke von doppelt so vielen Seiten ist, wie bewiesen, immer kleiner, als der vierte Theil des Unterschiedes der vorhergehenden Vielecke, so, dafs der Unterschied der um- und eingeschriebenen Vielecke, nach unendlicher Verdoppelung der Zahl der Seiten, nothwendig Null ist. Also ist die Fläche des Kreises gleich der Fläche eines um- oder eingeschriebenen regelmäfsigen Vielecks von unendlich vielen Seiten.

2. Die Kreislinie liegt zwischen den Umfängen aller um- und eingeschriebenen regelmäfsigen Vielecke. Diese Umfänge sind gleich lang, wenn die Zahl der Seiten der Vielecke unendlich grofs ist. Denn der Unterschied der Umfänge der um- und eingeschriebenen Quadrate ist gleich dem vierfachen Durchmesser multiplicirt mit $1-\sqrt{\frac{1}{2}}$, und der Unterschied der Umfänge der um- und eingeschriebenen Vielecke von doppelt so vielen Seiten ist, wie oben bewiesen, immer kleiner, als der vierte Theil des Unterschiedes der Umfänge der vorhergehenden Vielecke, so, dafs der Unterschied der Umfänge der um- und eingeschriebenen Vielecke, nach unendlicher Verdoppelung der Zahl der Seiten, nothwendig Null ist. Auch fallen die Umfänge der um- und eingeschriebenen Vielecke von unendlich vielen Seiten in eine und dieselbe Linie zusammen; denn der Abstand dieser Umfänge von einander ist, wie leicht zu zeigen, Null. Folglich ist auch die zwischen den Umfängen liegende Kreislinie mit ihnen eine und dieselbe Linie. Also ist der Umfang des Kreises so lang, als der Umfang eines um- oder eingeschriebenen Vielecks von unendlich vielen Seiten; der Inhalt des Kreises aber, der dem Inhalte dieses Vielecks gleich ist (1.), ist gleich einem Rechtecke, welches seinen Umfang zur Grundlinie und die Hälfte des Halbmessers zur Höhe hat.

Berlin, im April 1829.

6.

Von der Lage der Ebenen und Linien im Raume.

(Von Herrn Prof. *Koppe* zu Soest in Westphalen.)

Bekanntlich sind die ersten Sätze der Planimetrie in den Elementen des Euclid so künstlich an einander gereiht, dafs es nicht zulässig ist, auch nur die Stelle eines einzelnen Satzes zu ändern, ohne den ganzen Bau zu zerstören, indem der Beweis jedes folgenden Satzes die Richtigkeit aller vorangehenden fordert. Eine solche strenge und gebundne Folge findet jedoch auf die späteren Sätze immer weniger Anwendung, da mit der wachsenden Zahl der Sätze auch die Menge der Beweismittel zunimmt, und so ist insbesondere zur Begründung der ersten Sätze der Stereometrie, welche die gegenseitige Lage der Ebenen und Linien im Raume betreffen, in der Planimetrie des Euclid bereits so reicher Stoff gewonnen, dafs es fast möglich ist, jeden dieser Sätze an die Spitze zu stellen und die übrigen in schicklicher Folge anzureihen. Bei einer solchen Freiheit von äufseren Beschränkungen kann man innere Gründe der Anordnung aufsuchen, welche aus der Natur des zu behandelnden Gegenstandes selbst hergenommen sind. Stellt man sich nun von vorn herein die Frage, welche Folge der Lehren die Sache selbst fordere, so dürfte es nach der Vorschrift, von dem Einfachern zum Zusammgesetztern fortzuschreiten, auf den ersten Blick fast scheinen, als müsse zunächst von der gegenseitigen Lage der Linien im Raume, dann von der Lage der Linien gegen eine Ebene und endlich von der gegenseitigen Lage der Ebenen die Rede sein, und in der That ist eine solche Anordnung sehr wohl ausführbar, wie die Leser dieser Zeitschrift, wenn sie den Versuch machen wollen, sich leicht überzeugen werden. Man wird indefs jener Vorschrift auch auf die Art genügen können, dafs man die Sätze, welche eine verwandte, z. B. die senkrechte Lage betreffen, zusammenfafst und hierbei die Sätze über die Lage der Linien denen von der Lage der Ebenen vorangehen läfst. Dies dürfte sich anderweitig mehr empfehlen und ist im Wesentlichen in den Elementen des Euclid beobachtet. Da aber die Lage der Linien gegen einander oder gegen eine Ebene nicht anders festgestellt

werden kann, als mit Hülfe sich schneidender Ebenen, so wird jede Darstellung, welche die angegebene Anordnung der Lehren befolgt, den Vorwurf der Inconsequenz in sofern nicht von sich abweisen können, als sie bei den Sätzen über die Lage der Linien fortwährend sich schneidende Ebenen anwenden mufs, während doch erst später die gegenseitige Lage der Ebenen Gegenstand der Betrachtung werden soll, so z. B. bei Euclid, der bekanntlich alle Sätze über die senkrechte Lage der Linien mit Hülfe sich senkrecht durchschneidender Ebenen beweiset. — Diese Ueberlegung hat mich zu dem Versuch veranlafst, die bisher allgemein befolgte Anordnung umzukehren und von der Betrachtung sich schneidender Ebenen auszugehn. In wie fern dieser hier folgende Versuch den Anforderungen an wissenschaftliche Strenge und Folgerichtigkeit entspricht, mufs ich dem Urtheile der Kenner überlassen; für den ersten Unterricht der Anfänger dürfte derselbe vielleicht, was Einfachheit, Uebersichtlichkeit und Faſslichkeit der Darstellung anlangt, nicht weniger als die Euclidische Behandlungsweise geeignet sein.

---

1. Grunds. Die Lage einer Ebene ist gegeben durch drei Puncte, welche nicht in gerader Linie liegen, also auch durch eine Linie und einen Punct aufser ihr, durch zwei sich schneidende, durch zwei parallele Linien.

2. Zus. Zwei Ebenen können denkbarer Weise eine dreifache Lage gegen einander haben; entweder sie laufen parallel, d. h. sie treffen in keinem Puncte zusammen, oder sie schneiden sich, und zwar vermöge (1.) in einer geraden Linie, oder sie fallen zusammen. Aehnliches gilt von einer Linie und einer Ebene.

3. Erkl. Der unendliche Raum, welcher zwischen zwei in einer Linie (Scheitellinie, Kante) zusammenstofsenden Ebenen (Schenkeln) liegt, heifst ein Flächenwinkel. — Flächenwinkel sind gleich, wenn sie sich so zusammenlegen lassen, dafs Kante und Schenkel zusammenfallen. — Gröfser — kleiner — Nebenflächenwinkel — Scheitelflächenwinkel. — Ein Flächenwinkel, welcher seinem Nebenwinkel gleich ist, heifst ein rechter, und zwei Ebenen stehen auf einander senkrecht, wenn sie rechte Flächenwinkel bilden. — Spitzer, stumpfer Flächenwinkel — u. dergl.

4. Zus. Hieraus folgt auf bekannte Weise, wie in der Planimetrie:

1. 1.) Alle rechten Flächenwinkel sind gleich.

2. 2.) Gleiche Flächenwinkel haben gleiche Nebenflächenwinkel u. dergl.
3. 3.) Scheitelflächenwinkel sind gleich.

5. Erster Lehrs. Wenn zwei sich schneidende Ebenen (Taf. I. Fig. 3.) *DAC* und *FAE* auf einer dritten *FDEC* senkrecht stehen, so ist auch die gemeinschaftliche Kante *AB* auf den Durchschnittslinien mit der dritten Ebene *FE* und *DC* senkrecht.

Bew. Denn wenn man die Scheitelflächenwinkel *CBAE* und *DBAF* so zusammenlegt, dafs *B* liegen bleibt, Ebene *EBC* auf *DBF*, und zwar *BC* auf *BD* und *BE* auf *BF* fällt, so mufs auch Ebene *ABC* auf *ABD*, *ABE* auf *ABF* fallen, weil sie auf der Grund-Ebene *DFCE* nach der Voraussetzung senkrecht sind; es fällt daher auch wieder die gemeinschaftliche Kante *AB* auf *AB*, und es ist folglich Linienwinkel $ABC = ABD$, $ABE = ABF$, also *AB* senkrecht auf *DC* und *FE*.

6. Zweiter Lehrs. Ist von zwei sich schneidenden Ebenen *CAD* und *EAF* die eine *CAD* auf einer dritten Ebene *DFCE* senkrecht und auch die gemeinschaftliche Kante *AB* auf der zugehörigen Durchschnittslinie *CD* senkrecht, so steht auch die andre Ebene *FAE* auf der dritten *DFCE* und die gemeinschaftliche Kante *AB* auf der Durchschnittslinie *FE* senkrecht.

Bew. Legt man die Scheitelflächenwinkel *CBAE* und *DBAF* so zusammen, dafs *B* liegen bleibt, Ebene *EBC* auf *DBF*, und zwar *BC* auf *BD*, *BE* auf *BF* fällt, so mufs nach der Voraussetzung Ebene *ABC* auf *ABD* und *AB* wieder auf *AB* fallen. Folglich fällt die Ebene *ABE* mit *ABF* zusammen, und es ist der Flächenwinkel $AFEC = AFED$ und der Linienwinkel $ABE = ABF$, also Ebene $FAE \perp DFCE$ und $AB \perp FE$.

7. Dritter Lehrs. Wenn zwei sich schneidende Ebenen *FAE* und *DAC* von einer dritten *DFCE* so geschnitten werden, dafs ihre gemeinschaftliche Kante *AB* auf den Durchschnittslinien mit der dritten Ebene *DC* und *FE* senkrecht ist, so stehen jene Ebenen selbst auf der dritten senkrecht.

Bew. Legt man wieder die Scheitelflächenwinkel *CBAE* und *DBAF* so zusammen, dafs *B* und *AB* liegen bleiben, Schenkel *ABC* auf *ABD*, *ABE* auf *ABF* fällt, so mufs nach der Voraussetzung *BE* auf *BF*, *BC* auf *BD*, also auch Ebene *CBE* auf *DBF* fallen. Folglich ist Flächenwinkel $ADCE = ADCF$ und $AFEC = AFED$, d. h. Ebene *DAC* und $FAE \perp DFCE$.

Bemerkung. Wollte man es für unzulässig halten, dafs in den beiden ersten Lehrsätzen früher von der senkrechten Lage der Ebenen die Rede ist, als ihre Construction gezeigt worden (die Möglichkeit dieser Lage ist aber an sich klar), so kann auch der dritte Lehrsatz den beiden andern vorausgeschickt werden, ohne dafs hierdurch der Beweis die mindeste Aenderung erführe.

8. Zus. Wenn eine Linie *AB* auf zwei durch ihren Fufspunct *B* in einer Ebene gezogenen Linien *CD* und *EF* senkrecht ist, so ist sie auch auf jeder dritten in dieser Ebene gezogenen Linie *HG* senkrecht.

Bew. Nach (7.) ist die Ebene *DAC* auf *DFCE* und *AB* auf *DC* senkrecht, und deshalb nach (6.) auch Ebene *HAG* auf *DFCE* und *AB* auf *HG* senkrecht. Man kann diesen Satz aber auch unmittelbar, eben so wie den vorhergehenden, durch Zusammenlegen der Scheitelflächenwinkel *CBAE* und *DBAF* erweisen.

9. Erkl. Eine Linie steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf allen durch ihren Fufspunct in der Ebene gezogenen Linien senkrecht ist.

10. Zus. 1. 1.) Eine Linie ist vermöge (8.) auf einer Ebene schon dann senkrecht, wenn sie auf zwei Linien in der Ebene senkrecht ist.

2. 2.) Wenn zwei sich schneidende Ebenen auf einer dritten senkrecht stehn, so ist auch ihre Durchschnittslinie nach (5.) auf der dritten Ebene senkrecht.

3. 3.) Wenn zwei Ebenen auf einander senkrecht stehn, und eine Linie in der einen auf der Durchschnittslinie senkrecht ist, so ist nach (6.) diese Linie auch ein Loth auf der andern Ebene.

4. 4.) Ist eine Linie auf einer Ebene senkrecht, so ist auch jede durch die Linie gelegte Ebene nach (7.) auf der gegebenen Ebene senkrecht.

11. Zus. 1. 1.) Zwei Linien *AB* und *CD* (Fig. 4.), welche auf einer Ebene *MN* senkrecht stehn, sind parallel. Denn die Ebenen *ABC* und *BDC* sind beide auf *MN* senkrecht und müssen folglich nach (4, 1. 1.) zusammenfallen; demnach liegen *AB* und *CD* in einer Ebene u. s. w.

2. 2.) Ist von zwei parallelen Linien *AB* und *CD* die eine *AB* auf einer Ebene *MN* senkrecht, so ist auch die andere *CD* ein Loth auf dieser Ebene. Denn nach (10, 4. 4.) ist die Ebene *ABDC* auf *MN* und daher nach (10, 3. 3.) auch *CD* auf *MN* senkrecht.

3. 3.) Hieraus folgt bekanntlich, dafs zwei Linien, welche einer dritten parallel laufen, unter sich parallel sind, und dafs Linienwinkel mit parallelen Schenkeln entweder gleich sind oder sich zu 180° ergänzen.

12. Zus. Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun auch leicht die Auflösung folgender Aufgaben:

1. 1.) Durch einen Punct B in einer Linie AB (Fig. 3.) wird eine senkrechte Ebene gelegt, wenn man durch AB zwei beliebige Ebenen ABC und ABE legt und in diesen BE und $BC \perp AB$ zieht; dann ist Ebene $CBE \perp AB$.

2. 2.) Durch einen Punct C aufserhalb einer Linie AB, wird eine senkrechte Ebene gelegt u. s. w.

3. 3.) Durch eine Linie DC in einer Ebene $EDFC$ wird eine senkrechte Ebene gelegt, wenn man in einem beliebigen Puncte B der Linie DC die Senkrechte FE in der Ebene $EDFC$ zieht und dann durch DC nach (1. 1.) eine auf FE senkrechte Ebene DAC legt, auf welcher nach (10, 4. 4.) Ebene $EDFC$ senkrecht ist.

4. 4.) Auf einer Ebene $EDFC$ wird in einem Puncte B ein Loth errichtet, wenn man durch B eine beliebige auf $EDFC$ senkrechte Ebene CAD legt und in dieser $AB \perp CD$ zieht.

5. 5.) Auf eine Ebene wird aus einem aufserhalb liegenden Puncte ein Loth herabgelassen, wenn man auf der Ebene ein Loth errichtet und mit diesem durch den gegebnen Punct eine Parallele zieht.

6. 6.) Wenn eine Linie eine Ebene schneidet und nicht senkrecht steht oder der Ebene parallel läuft, so wird durch die Linie eine senkrechte Ebene gelegt, wenn man durch einen beliebigen Punct in der Linie ein Loth auf die Ebene zieht und durch dieses und die gegebene Linie eine Ebene legt.

13. Zus. Es läfst sich auch noch leicht zeigen, dafs jede der sechs vorhergehenden Aufgaben nur eine Auflösung zuläfst, z. B. in einem Puncte in einer Ebene nur ein Loth möglich ist, u. dergl.

14. Erkl. Wenn eine Ebene die Schenkel eines Flächenwinkels senkrecht durchschneidet, so schliefsen die Durchschnittslinien auf der Seite, auf welcher der Flächenwinkel liegt, einen Linienwinkel ein, welcher der zum Flächenwinkel gehörige Linienwinkel heifst.

15. Zus. 1. 1.) Gleiche Flächenwinkel haben gleiche Linienwinkel und umgekehrt.

2. 2.) Flächenwinkel verhalten sich wie die zugehörigen Linienwinkel.

3. 3.) Der rechte Flächenwinkel hat auch einen rechten Linienwinkel, u. dergl.

16. Erkl. Wenn man durch eine Linie, welche eine Ebene schneidet und auf derselben nicht senkrecht ist, eine senkrechte Ebene legt, so heifst der spitze Winkel, welchen die gegebne Linie und die Durchschnittslinie einschliefsen, der Neigungswinkel.

Ich breche hier ab, da ich über die schiefe und parallele Lage nichts Neues hinzuzufügen wüfste, und bemerke nur noch, dafs alle vorhergehenden Sätze nur mit Hülfe derjenigen Sätze der Planimetrie, welche unmittelbar aus dem Begriff des Winkels folgen, also die gegenseitige Lage der Linien in einer Ebene betreffen, erwiesen sind.

7.

Beweis dreier Lehrsätze, mitgetheilt von Steiner, Bd. 13. S. 361 u. 362, nebst zwei anderen Aufgaben.

(Von dem Herrn Dr. *Stern*, zu Göttingen.)

Ich werde zuerst den zweiten Lehrsatz beweisen:

„Die Summe aller negativen Potenzen, von der zweiten an, aller ganzen positiven Zahlen von 2 an, ist = 1."

Entwickelt man nemlich diese Summe, so hat man

$$(A.)\quad \begin{cases} \frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots. \\ +\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{5^3}+\ldots. \\ +\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots. \\ +\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ferner ist

$$\frac{1}{a-1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\ldots.$$

oder

$$\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}+\ldots.$$

Addirt man daher in dem Ausdrucke (*A.*) die Glieder einer jeden verticalen Reihe zusammen, so hat man

$$(A)=(1-\tfrac{1}{2})+(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})+\ldots.=1$$

w. z. b. w.

Durch dieselbe elementare Betrachtung lassen sich noch viele andere, nicht minder interessante Sätze beweisen; wie z. B. folgender.

Die Summe der Summen der ungeraden negativen Potenzen, von der dritten an gerechnet, ist $=\frac{1}{4}$; die Summe der Summen der geraden negativen Potenzen, von der zweiten an gerechnet, ist $=\frac{3}{4}$, vorausgesetzt, dafs man nur die Potenzen aller ganzen Zahlen, von 2 an, nimmt. Also in Zeichen

$$\Sigma(2+x)^{-3}+\Sigma(2+x)^{-5}+\Sigma(2+x)^{-7}+\ldots.=\tfrac{1}{4},$$
$$\Sigma(2+x)^{-2}+\Sigma(2+x)^{-4}+\Sigma(2+x)^{-6}+\ldots.=\tfrac{3}{4},$$

wo für x alle ganzen positiven Zahlen 0, 1, 2, 3, ... gesetzt werden müssen.

Man setze die Summen aller geraden und aller ungeraden Potenzen (unter den angegebenen Beschränkungen) in horizontale Linien, der Ordnung nach, unter einander, jedoch so, dafs man allen geraden Potenzen das Zeichen +, allen ungeraden das Zeichen — vorsetzt, so hat man

$$(B.)\quad \begin{cases} +\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots. \\ -\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}-\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}-\ldots. \\ +\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\ldots. \\ -\frac{1}{2^5}-\frac{1}{3^5}-\frac{1}{4^5}-\frac{1}{5^5}+\ldots. \\ +\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}-\frac{1}{a^4}+\frac{1}{a^5}\ldots.$$

oder

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{a^3}+\frac{1}{a^4}-\frac{1}{a^5}\ldots.$$

Addirt man daher in dem Ausdrucke (*B.*) die Glieder einer jeden verticalen Reihe zusammen, so hat man

$$(B)=(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3})+(\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4})+(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5})+(\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})+\ldots.=\tfrac{1}{2}.$$

Nennt man also die Summe der Summen der geraden negativen Potenzen P, die Summe der Summen der ungeraden negativen Potenzen Q, so ist nach dem Vorhergehenden

$$P+Q=1,$$
$$P-Q=\tfrac{1}{2},$$

mithin $P=\frac{3}{4}$, $Q=\frac{1}{4}$.

In Legendre's *Exercices du calcul intégral* (*Part.* 4. *sect.* 1. *pag.* 65) findet man eine Tabelle, die die Werthe der Summen der negativen Potenzen, bis zur 35sten, auf 16 Decimalstellen berechnet, enthält. Nach dieser Tabelle ist die Summe der geraden negativen Potenzen, von der 2ten bis zur 34sten einschliefslich, = 0,74999 999998.... die Summe der übrigen geraden negativen Potenzen ist also kleiner als 0,00000 000002. Eben so ist die Summe der ungeraden negativen Potenzen, von der 3ten bis zur 35sten einschliefslich, = 0,24999 99999 902.....

also die Summe der übrigen ungeraden negativen Potenzen kleiner als 0,00000 000001.

Was nun den ersten Lehrsatz des Herrn Prof. Steiner betrifft, so kommt derselbe unmittelbar auf den zweiten zurück. Bezeichnet man nemlich die Summe aller Brüche von der Form

$$\frac{1}{(2+x)^{2+y}-1}$$

durch S, **wo für** x **und für** y **jede ganze positive Zahl von 0 an gesetzt werden mufs und** $2+x$ **keine höhere Potenz irgend einer Zahl sein darf, so hat man, da**

$$\frac{1}{2+x^{2+y}-1} = \frac{1}{(2+x)^{2+y}} + \frac{1}{(2+x)^{4+2y}} + \frac{1}{(2+x)^{6+3y}} + \ldots.$$

ist:

$$(A.)\quad \begin{cases} S = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \ldots. \\ \quad + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \ldots. \\ \quad + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5^4} + \ldots. \\ \quad + \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(B.)\quad \begin{cases} + \frac{1}{(2^2)^2} + \frac{1}{(2^2)^3} + \frac{1}{(2^2)^4} + \ldots. \\ + \frac{1}{(3^2)^2} + \frac{1}{(3^2)^3} + \frac{1}{(3^2)^4} + \ldots. \\ + \frac{1}{(5^2)^2} + \frac{1}{(5^2)^3} + \frac{1}{(5^2)^4} + \ldots. \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

$$(C.)\quad \begin{cases} + \frac{1}{(2^3)^2} + \frac{1}{(2^3)^3} + \frac{1}{(2^3)^4} + \ldots. \\ + \frac{1}{(3^3)^2} + \frac{1}{(3^3)^3} + \frac{1}{(3^3)^4} + \ldots. \\ + \frac{1}{(5^3)^2} + \frac{1}{(5^3)^3} + \frac{1}{(5^3)^4} + \ldots. \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

u. s. w.

Die Reihe (*A.*) enthält die Summe der negativen Potenzen aller Zahlen, die keine höhere Potenzen irgend einer Zahl sind; die Reihe (*B.*) enthält die entsprechende Summe für alle Zahlen, die die zweite und keine höhere Potenz irgend einer Zahl sind; eben so enthält die Reihe (*C.*) die

entsprechende Summe für alle Zahlen, die die dritte und keine höhere Potenz irgend einer Zahl sind u. s. w. Die Summe aller dieser Reihen ist daher nichts Anderes, als die Summe aller negativen Potenzen, von der zweiten an, aller ganzen positiven Zahlen von 2 an, und daher $S = 1$.

Der Ausdruck $\frac{1}{(2+x)^{2+y}[(2+x)^{2+y}-1]}$ ist, nach dem Vorhergehenden, =

$$\frac{1}{[(2+x)^2]^{2+y}} + \frac{1}{[(2+x)^3]^{2+y}} + \frac{1}{[(2+x)^4]^{2+y}} + \ldots.$$

Unter der Beschränkung, dafs $2+x$ keine höhere Potenz irgend einer Zahl sein darf, ist daher dieser Ausdruck offenbar der Summe aller negativen Potenzen, von der zweiten an, aller Zahlen, die eine höhere Potenz irgend einer ganzen Zahl sind, gleich, oder

$$\Sigma \frac{(2+x)^{-(2+y)}}{(2+x)^{-(2+y)}-1} \Sigma (2+z)^{-(2+y)},$$

womit auch der dritte Lehrsatz bewiesen ist.

Mit diesen Untersuchungen stehen unter Anderen auch folgende Aufgaben in Verbindung:

1) Was ist der Werth der Summe aller Brüche von der Form $\frac{1}{(2+x)^{2+y}+1}$, wo für x und y jede ganze positive Zahl von 0 an gesetzt werden kann, jedoch $2+x$ keine höhere Potenz irgend einer Zahl sein darf.
2) Was ist der Werth der Summe der negativen Potenzen aller ganzen positiven Zahlen, von 2 an, wenn nur die Potenzen genommen werden, die durch eine bestimmte Zahl theilbar sind, also z. B. was ist der Werth von

$$\Sigma (2+x)^{-3} + \Sigma (2+x)^{-6} + \Sigma (2+x)^{-9} + \ldots.,$$

wo für x alle ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3, ... zu setzen sind.

Den 28. Febr. 1835.

8.

Einfache Construction der Tangente an die allgemeine Lemniscate.

(Von dem Herrn Prof. Dr. *Steiner* zu Berlin.)

---

1. Da in neuerer Zeit die Lemniscate bei gewissen physikalischen Untersuchungen mehrfach in Betracht gekommen ist, so halte ich es nicht für unnütz, nachstehende einfache Construction ihrer Tangente in einem beliebigen Puncte hier mitzutheilen.

Eine characteristische Bestimmung der allgemeinen Lemniscate ist bekanntlich folgende:

„Wenn die Grundlinie AB (Taf. I. Fig. 5.) eines Dreiecks der Gröfse und Lage nach und das Rechteck unter den beiden andern Seiten AC, BC der Gröfse nach gegeben ist, so ist der Ort der Spitze C eine Lemniscate." Oder umgekehrt:

„In der Hauptaxe einer Lemniscate giebt es allemal zwei Grundpuncte A, B, welche die Eigenschaft haben, dafs, wenn man aus denselben nach irgend einem Puncte C des Umfanges Strahlen zieht, das Rechteck unter je zwei solchen Leitstrahlen AC, BC einen constanten Inhalt hat."

Aus dieser Bestimmung folgt unmittelbar, dafs die in Rede stehende Curve einen Mittelpunct hat, der in der Mitte zwischen den zwei Grundpuncten A, B liegt, und dafs die Curve auf einen endlichen Raum beschränkt ist. Angenommen, es seien D, E die Endpuncte oder Scheitel der Hauptaxe. Man setze 1) die Hauptaxe $DE = 2d$, also $d = MD = MC$, 2) den Abstand der Grundpuncte von einander $AB = 2c$, also $c = MA = MB$, und 3) den constanten Inhalt des Rechtecks unter je zwei zusammengehörigen Leitstrahlen AC, BC, oder a, b, $= h^2$, so ist

$$h^2 = a.b = (d+b)(d-c) = d^2 - c^2,$$

und die drei verschiedenen Gestalten, welche die Curve im Allgemeinen haben kann, lassen sich durch folgende Bedingungen bestimmen:

α) wenn $h^2 > c^2$, dann ist die Curve in allen ihren Theilen zusammen-

hängend, und hat im Allgemeinen in den Scheiteln ihrer zweiten Axe eine Einsenkung;

β) wenn $h^2 = c^2$, dann schneidet sich die Curve in ihrem Mittelpuncte M, so dafs also dieser Punct ein Doppelpunct der Curve ist, und zwar ist er für jeden Zweig ein sogenannter Wendungspunct; die beiden Tangenten in diesem Puncte sind auf einander senkrecht, und die Curve wird durch ihn in zwei geschlossene, congruente Theile getheilt, welche in Scheitelwinkeln jener Tangenten liegen;

γ) wenn $h^2 > c^2$, so besteht die Curve aus zwei isolirten, congruenten Theilen, wovon jeder sich dem Auge als eine geschlossene Curve darstellt, und wovon der eine den Grundpunct A, der andere B umschliefst.

Häufig wird die Curve nur unter der Form (β) „*Lemniscate*" genannt *).

2. Mit Rücksicht auf die vorgenannte characteristische Eigenschaft der allgemeinen Lemniscate gelangt man nun durch folgende Betrachtung zur Construction ihrer Tangente in einem beliebigen Puncte.

Zieht man nach den Endpuncten C, C_1 eines beliebigen Bogens der Curve die Leitstrahlen a und b, a_1 und b_1, so ist (1.):

$$a.b = a_1.b_1 = h^2,$$

und daraus folgt

$$a : a_1 = b_1 : b.$$

Zieht man ferner die Secante CC_1, und hälftet in dem Dreieck CAC_1 den Winkel an der Spitze A mittelst der Geraden AA_1, so wie dessen Nebenwinkel mittelst der Geraden AA_2, und wird eben so in dem Dreiecke CBC_1 der Winkel an der Spitze B und dessen Nebenwinkel mittelst der Geraden BB_1, BB_2 gehälftet: so wird die gemeinschaftliche Grundlinie CC_1 der beiden Dreiecke von diesen Geraden bekanntlich so getheilt, dafs sich die Abschnitte wie die zwei übrigen Seiten verhalten, d. h. dafs sich verhält

$$CA_1 : C_1A_1 = CA_2 : C_1A_2 = a : a_1 \text{ und}$$
$$C_1B_1 : CB_1 = C_1B_2 : CB_2 = b_1 : b,$$

woraus, vermöge der obigen Proportion $a : a_1 = b_1 : b$ leicht folgt, dafs

$$CA_1 = C_1B_1 \text{ und}$$
$$CA_2 = C_1B_2.$$

*) Über diese besondere Lemniscate sehe man den Lehrsatz am Ende dieses Hefts.

Da die Geraden AA_1 und AA_2, weil sie Nebenwinkel hälften, zu einander rechtwinklig sind, und aus gleichen Gründen die Geraden BB_1 und BB_2 auf einander senkrecht stehen; und da ferner, wenn man die Secante CC_1 so bewegt, dafs ihre Durchschnitte C, C_1 mit der Curve einander immer näher rücken, z. B. wenn man sie um C sich drehen läfst, bis endlich C_1 mit C zusammenfällt, in welchem Falle die Secante in eine Tangente übergeht und die Geraden AA_1, BB_1 sich beziehlich mit den festen Strahlen AC, BC vereinigen: so wird die Tangente in irgend einem Puncte C der Curve durch folgendes einfache Verfahren gefunden.

„Man ziehe die beiden Leitstrahlen AC, BC nach dem gegebenen Puncte C, errichte auf dieselben in den Grundpuncten A, B die Perpendikel AA_2, BB_2, und ziehe zwischen diesen diejenige Gerade A_2CB_2, welche durch jenen Punct C gehälftet wird, so dafs $CA_2 = CB_2$: so ist diese Gerade die verlangte Tangente."

Berlin, im December 1834.

9.

Beiträge zur Discussion des Eulerschen Lehrsatzes von Polyëdern in Beziehung auf die neulich bemerkten Ausnahmen desselben.

(Von Herrn *L. C. Schulz v. Strasznicki*, o. ö. Prof. der Mathematik am k. k. Lyceum zu Laibach.)

Nach dem Eulerschen Satze soll bei jedem wie immer gestalteten Körper die Anzahl der Seitenflächen, mehr der Anzahl der Ecken, um zwei gröfser sein, als die Anzahl der Kanten. Nun führt Hr. Dr. Hessel, im 1sten Hefte des 8ten Bandes dieses Journals mehrere Körper auf, wo dieses Gesetz offenbar nicht Statt findet. Hierbei wird aber die Ursache der Ausnahmen nicht angedeutet, und da nach dem alten logischen Spruche gilt: *qui nimium probat, nihil probat*, so müssen entweder alle Beweise des Eulerschen Satzes, und mit ihnen der Satz selbst verworfen werden, oder es mufs im Beweise auf die Ausnahmen hingedeutet, und der Satz mufs danach beschränkt werden. Mein Bemühen geht dahin, den so schönen allgemeinen Eulerschen Satz so viel wie möglich zu retten.

Der Beweis, den Cauchy im 9ten Bande des *Journal de l'école polytechnique* für den Eulerschen, oder eigentlich für einen noch allgemeinern Satz giebt, gründet sich (vide pag. 10) darauf, dafs bei der Aneinandersetzung der Polygone die Anzahl der Kanten immer um eine Zahl vermehrt wird, die um 1 gröfser ist, als die Zahl, um welche die Anzahl der Kanten zunimmt.

Auf diesen Beweis stützen sich auch alle anderen Beweise, ausgenommen der Legendre's, welcher die sphärische Trigonometrie zu Hülfe nimmt, und auf dessen Unzulänglichkeit wir später kommen wollen.

Die oben angeführte Bemerkung wurde deswegen bisher für allgemein geltend angenommen, weil, wenn 2 Polygonen eine Kante gemeinschaftlich ist, sie dann zugleich 2 Ecken gemeinschaftlich haben müssen; und eben so: haben 2 Polygone 2, 3, 4, etc. n Kanten gemein, so haben

sie 3, 4, 5, etc. $n+1$ Ecken gemeinschaftlich, so dafs der Zuwachs an neuen Kanten um 1 gröfser ist, als der Zuwachs an neuen Ecken.

Allein es sind auch Figurnetze denkbar, wo durch die neu hinzukommende Figur die Anzahl der Ecken und die Anzahl der Kanten beide um dieselbe Zahl vermehrt werden. In diesem Falle wird also die Anzahl der Flächen dessen ungeachtet um wenigstens 1 wachsen; daher wird die Regelmäfsigkeit gestört werden, und daher kann bei Körpern, welche durch solche Figurnetze begrenzt werden, das Eulersche Gesetz nicht Statt finden. Diese Störung der Regelmäfsigkeit kann aber nur dann geschehen, wenn ein Körper auf dem andern aufsitzet, d. i. keine ganze Seitenfläche mit ihm gemeinschaftlich hat.

Man setze z. B. den Körper *ABCD abcd* (Taf. I. Fig. 6.). Wenn wir zur Fläche *ABD* die Fläche *BCD* hinzusetzen, so kommen 2 neue Kanten *BC* und *CD* und eine neue Ecke *C* hinzu; wir haben 2 Flächen, 5 Kanten und 4 Ecken, und es ist richtig $2+4=5+1$; kommt nun die Fläche *ACD* hinzu, so kommt keine neue Ecke und nur eine neue Kante *AC* hinzu; wir haben 3 Flächen, 6 Kanten, 4 Ecken, und es ist $3+4=6+1$; kommt die ringförmige Fläche *ABCabc* hinzu, so kommen 3 neue Kanten *ab*, *ac*, *bc*, und 3 neue Ecken *a*, *b*, *c* hinzu; wir haben 4 Flächen, 9 Kanten, 7 Ecken, und somit $4+7=9+2$; es ist also schon die Regelmäfsigkeit gestört, und sie wird auch nimmer hergestellt. Durch das Hinzukommen der Flächen *abd*, *dbc*, *adc* wird die Anzahl der Flächen um 3, die Anzahl der Ecken um 1, die Anzahl der Kanten um 3 vermehrt, und wir haben im Ganzen 7 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten, und daher $7+8=12+3$, im Widerspruche mit dem Eulerschen Satze.

Es ist gleichgültig, ob ein Körper auf dem andern aufsitzt, oder aus dem andern herausgeschnitten wird. In (Fig. 7.) haben wir ebenfalls 7 Flächen, 8 Ecken und 12 Kanten.

Allein es giebt auch aufgesetzte Gestalten, für welche dessen ungeachtet das Eulersche Gesetz Statt findet; z. B. Fig. 8., welche sich von Fig. 6. blofs dadurch unterscheidet, dafs die beiden auf einander gesetzten, Pyramiden die Kante *AC* gemeinschaftlich haben; hier haben wir 7 Flächen, 6 Ecken und 11 Kanten, und daher $6+7=11+2$, dem Eulerschen Satze gemäfs.

Es bleibt uns nur noch zu zeigen übrig, dafs auch im Beweise Legendre's die Ausnahme der aufgesetzten, oder eingeschnittenen Gestalten sich nachweisen läfst. Nach Legendre soll man einen Punct innerhalb des Polyëders annehmen, um denselben eine Kugel beschreiben, jeden Eckpunct mit dem Centro verbinden, und zu jeder Kante einen analogen Bogen des gröfsten Kreises ziehen; thun wir dieses in Bezug auf den Körper Fig. 6., und behalten in der Zeichnung blofs die Kugel mit ihren Bögen bei, so haben wir Fig. 9.

Legendre's Beweis stützt sich nun darauf, dafs, wenn n die Anzahl der Seiten, s die Summe der Winkel eines sphärischen Polygons ist, stets der Flächeninhalt desselben gleich $5-2n+4$ sei, welches aber offenbar bei einem sphärischen Polygon, wie hier $ABCabc$ ist, nicht Statt findet. Nennen wir nemlich die Winkel, die in dieses sphärische Polygon hineingehören, a, b, c, so ist der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecks abc gleich $(4-a)+(4-b)+(4-c)-2=10-(a+b+c)$, und der Flächeninhalt des sphärischen Dreiecke $ABC=A+B+C-2$, daher der Flächeninhalt von $ABCabc$ gleich $A+B+C+a+b+c-12$. Dergleichen sphärische Polygone werden stets bei einer aufgesetzten und eingeschnittenen Gestalt Statt finden.

Aus Vorhergehendem sehen wir also, dafs der Eulersche Satz nur da eine Ausnahme leiden kann, wo eine Fläche in die andere gelegt wird, und selbst da nicht immer, wie wir Fig. 6. gesehen haben. Körper aber von der Art können wir füglich als zusammengesetzte betrachten, die durch Aufsetzung oder Aushöhung entstehen, und es bleibt daher vollkommen richtig, dafs der Eulersche Satz für alle geometrisch einfachen Körper gilt.

Alle Körper nun, deren Zeichnung Herr Dr. Hessel am angeführten Orte mittheilt, sind Körper, die durch Aufsetzung oder Aushöhlung entstanden sind. Die Eintheilung in Eulersche Ebenflächen und andere scheint mir daher überflüssig, da der Unterschied zwischen einfachen und aufgesetzten Körpern hinreicht. Um nun zu untersuchen, wie durch Zusammensetzen der Körper das Eulersche Gesetz verloren gehen kann, wollen wir zwei Körper annehmen: die Anzahl der Ecken sei in beiden e und e', die Anzahl der Kanten k und k', die Anzahl der Seitenflächen s und s'; es seien beide einfache Körper, und E sei die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und S die Anzahl der Seiten-

flächen des aus ihnen zusammengesetzten Körpers; es sei ferner ε die Anzahl der bei der Zusammensetzung verlornen Ecken, $\varkappa$ die Anzahl der verlornen Kanten, und σ die Anzahl der verlornen Seitenflächen, so hat man:

$$e+s = k+2,$$
$$e'+s' = k'+2,$$
$$E = e+e'-\varepsilon,$$
$$S = s+s'-\sigma,$$
$$K = k+k'-\varkappa,$$

daher, weil $e+e'+s+s' = k+k'+4$ ist:

$$E+\varepsilon+S+\sigma = K+\varkappa+4,$$

also

$$E+S-K-2 = \varkappa-\varepsilon-\sigma+2,$$

oder

$$[E+S-K-2]+[\varepsilon+\sigma-\varkappa-2] = 0:$$

ein Lehrsatz, welcher anzeigt, dafs die Anzahl der Ecken, mehr der Anzahl der Seitenflächen, weniger der Anzahl der Kanten des zusammengesetzten Körpers, weniger zwei, gleich ist derselben Verbindung der Zahlen der bei der Zusammensetzung verloren gegangenen Elemente.

Haben nun die 2 an einander gesetzten Körper eine ganze Seitenfläche gemein, so gehen 2 Seitenflächen verloren; es ist daher $\sigma = 2$. Decken sich aber 2 solche Seitenflächen, so gehen offenbar so viel Kanten als Ecken verloren, d. h. es ist $\varepsilon = \varkappa$; denn es fallen je 2 Ecken und zwei Kanten auf einander, und man hat für diesen Fall

$$\varepsilon+\sigma-\varkappa-2 = 0, \text{ daher}$$
$$E+S-K-2 = 0.$$

Werden also zwei einfache Körper so an einander gesetzt, dafs sie eine ganze Seitenfläche gemeinschaftlich haben, so unterliegt der neue Körper ebenfalls dem Eulerschen Gesetze.

Haben zwei an einander gesetzte Körper zwei Seitenflächen gemeinschaftlich, und zwar zuerst, wie wir voraussetzen wollen, zwei an einander liegende, so gehen bei der Zusammensetzung vier Seitenflächen verloren; allein die Anzahl der verlornen Kanten ist um zwei gröfser, als die Anzahl der verlornen Ecken; denn die Kante, welche beide Seitenflächen mit einander gemeinschaftlich haben, geht doppelt verloren, während jeder ihrer Eckpuncte nur einfach verloren geht; es ist daher $\varkappa = \varepsilon+2$, also $\varepsilon+\sigma-\varkappa-2 = \varepsilon+4-(\varepsilon+2)-2 = 0$, folglich

$$E+S-K-2 = 0.$$

Haben aber die zwei Körper zwei Seitenflächen gemein, die nicht an einander liegen, so hört das Eulersche Gesetz auf, und ganz begreiflich, weil der neue Körper ein ausgehöhlter ist.

Endlich mögen im Allgemeinen zwei einfache Körper f an einander liegende Seitenflächen mit einander gemein haben, und es seien in den zwei sich deckenden Polygonnetzen f Polygone, s Kanten und p Eckpuncte; es habe ferner die äufsere Contur dieses Netzes n Kanten und folglich n Eckpuncte, so dafs also inwendig $s-n$ Kanten und $p-n$ Eckpuncte sind; nennen wir ferner, wie früher, die Anzahl der verloren gehenden Flächen σ, der Ecken ε, der Kanten $\varkappa$, so ist, da jede Kante der Contur, und jede Ecke der Contur nur einmal verloren geht, während dieses bei den inwendigen doppelt Statt findet:

$$\sigma = 2f; \quad \varepsilon = n + 2(p-n) = 2p-n; \quad \varkappa = n + 2(s-n) = 2s-n.$$

Nun ist nach Cauchy's Lehrsatz, für jedes Polygonnetz:

$$f + p = s + 1,$$

daher

$$2f + 2p = 2s + 2.$$

Ferner ist $2p = \varepsilon + n$; $2s = \varkappa + n$; also hat man, diese Werthe substituirt,

$$\sigma + \varepsilon + n = \varkappa + n + 2,$$

folglich

$$\varepsilon + \sigma - \varkappa - 2 = 0,$$

und

$$E + S - K - 2 = 0.$$

Also zwei einfache Körper, so an einander gesetzt, dafs sie zusammenhängende Polygonennetze mit einander gemeinschaftlich haben, geben wieder einen Körper, der dem Eulerschen Gesetze unterworfen ist.

Und so ergiebt sich abermals, dafs nur die aufgesetzten und ausgehöhlten Körper eine Ausnahme machen.

Laibach, im September 1832.

10.

Lehrsätze und Aufgaben,

erstere zu beweisen, letztere aufzulösen.

(Vom Herrn Prof. Dr. *Steiner.*)

1. Lehrsatz. Bestimmt man in der Hauptaxe DE (Taf. I. Fig. 5.) einer gewöhnlichen Lemniscate *) denjenigen Punct F oder G, welcher zu den Scheiteln dieser Axe D, E und dem einen oder andern Grundpuncte A oder B der vierte, dem letztern zugeordnete, harmonische Punct ist, und fället aus diesem Puncte auf irgend einen reellen Durchmesser der Curve, d. i. auf irgend eine Gerade HK, welche durch den Mittelpunct M der Curve geht und dieselbe aufserdem in zwei Puncten L, N schneidet, ein Perpendikel FH oder GK: so ist das Rechteck unter den Abständen des Fufspunctes dieses Perpendikels von den Endpuncten jenes Durchmessers, also das Rechteck $HL.HN$ oder $KN.KL$, für alle Durchmesser von constantem Inhalt, und zwar ist dieser Inhalt gleich dem Quadrat der halben Hauptaxe, d. i. $= MA^2$, und somit gleich dem Flächeninhalte der Curve (wenn die von ihr eingeschlossenen Räume beide positiv genommen werden).

2. Fället man aus einem willkürlichen Puncte p in der Ebene irgend einer gegebenen Curve A, Lothe auf die Tangenten der letztern, so liegen ihre Fufspuncte in irgend einer andern bestimmten Curve B, und es ist die Frage:

a) wie läfst sich der Flächeninhalt der Curve B, und

b) wie ihre Länge ausdrücken, wenn die Curve A und die Lage des Punctes p gegeben ist? und ferner:

c) welche Lage mufs der Punct p in Bezug auf die Curve A haben, damit der Flächeninhalt, oder

d) damit die Länge der Curve B ein Minimum wird? und endlich:

e) welches ist der Ort des Punctes p, wenn der Inhalt oder die Länge von B gegeben ist?

3. Angenommen es sei die gegebene Curve A (2.) geschlossen, und überall convex, und man lasse sie auf einer festen Geraden G rollen, bis sie sich ganz umgedreht hat, so wird jeder mit ihr fest verbunden gedachte Punct p (er liege in, innerhalb oder aufserhalb A), irgend eine Curve beschrieben, welche, wenn die Lage des beschreibenden Punctes am Ende seiner Bewegung p_1 heifst, durch pp_1 bezeichnet werden mag. Heifsen ferner die Puncte, in welchen die feste Gerade G von der rollen-

---

*) Man sehe den obigen Aufsatz über die allgemeine Lemniscate ($\mathfrak{t}$, β) S. 80.

den Curve A anfänglich und am Ende der Bewegung berührt wird, g und g_1, und zieht man die Geraden pg, p_1g_1, so entsteht ein gemischtliniges Viereck pgg_1p_1p, von dessen drei geradlinigen Seiten zwei, nämlich pg und p_1g_1, gleich und parallel sind, und die dritte gg_1 dem Umfange der Curve A gleich ist. (Die vierte Seite ist nemlich die genannte Curve pp_1.) Nun kann gefragt werden:

a) wie läfst sich der Inhalt des Vierecks pgg_1p_1p, und

b) wie die Länge der Curve pp_1 ausdrücken, wenn die rollende Curve A nebst der Lage des beschreibenden Punctes p, in Bezug auf dieselbe, gegeben ist? und ferner:

c) welche Lage mufs der Punct p (in Bezug auf A) haben, damit der Inhalt des Vierecks, oder

d) damit die Länge der Curve pp_1 ein Minimum wird? und endlich:

e) welches ist der Ort des Punctes p, wenn der Inhalt des Vierecks pgg_1p_1p, oder die Länge der Curve pp_1 gegeben ist?

Dieselben Fragen sind zu stellen, wenn die Curve A (statt auf der Geraden G), auf einem gegebenen festen Kreise, oder auf irgend einer andern gegebenen festen Curve rollt.

Wenn bei dieser und bei der vorigen Aufgabe (2.) eine und dieselbe Curve A und der nemliche Punct p zugleich betrachtet werden, welches merkwürdige Verhältnifs findet dann zwischen den Flächeninhalten der Curve B und des Vierecks pgg_1p_1p statt, und welches zwischen den Längen der Curven B und pp_1? Durch dieses Verhältnifs sind nemlich beide Aufgaben von einander abhängig, so dafs sie im Grunde in eine einzige zusammenfallen.

4. Wenn die Grundlinien zweier Dreiecke, einzeln genommen, ihrer Gröfse nach gegeben sind, und wenn die Summe der vier übrigen Seiten gegeben ist, so sollen diese letztern einzeln so bestimmt werden, dafs die Summe der Flächeninhalte beider Dreiecke ein Maximum wird. Oder umgekehrt: Wenn die Summe der Flächeninhalte zweier Dreiecke und ihre Grundlinien einzeln gegeben sind, so soll man ihre übrigen vier Seiten finden für den Fall, wo die Summe derselben ein Minimum ist.

Die nemlichen Fragen sind auf Vierecke, Fünfecke u. s. w. anzuwenden. Sie führen zuletzt auf nachstehende Fragen.

5. Wenn von zwei Kreis-Segmenten (von verschiedenen Kreisen) die Grundlinien (oder Sehnen) einzeln gegeben sind, und wenn entweder α) die Summe ihrer Bogen, oder β) die Summe ihrer Flächeninhalte gegeben ist, so soll das Verhältnifs der Radien der beiden Kreise, oder das Verhältnifs der Bogen, oder der Inhalte der Segmente gefunden werden, welches statt finden mufs, damit im Falle (α) die Summe der Inhalte der Segmente ein Maximum, oder im Falle (β) die Summe der Bogen ein Minimum wird.

6. Wenn die Grundflächen zweier dreiseitigen Pyramiden der Form und Gröfse nach gegeben sind, und wenn ferner entweder α) die Summe

ihrer übrigen sechs Flächen, oder β) die Summe ihrer Körperinhalte gegeben ist, so ist die Frage: wie müssen sich ihre Oberflächen, oder wie ihre Körperinhalte zu einander verhalten, damit im ersten Falle (α) die Summe ihrer Körperinhalte ein Maximum, oder im andern Falle (β) die Summe ihrer Oberflächen (also auch ihrer 6 Seitenflächen) ein Minimum sei?

Dieselben Fragen bei 4, 5, 6, ... *n*seitigen Pyramiden; desgleichen bei Kegeln, wenn z. B. die gegebenen Grundflächen Kreise sind.

7. Wenn die Grundflächen (oder Grundkreise) zweier Kugel-Segmente einzeln gegeben sind, und wenn entweder α) die Summe ihrer Oberflächen, oder β) die Summe ihrer Körperinhalte gegeben ist, so ist die Frage: wie müssen sich die Radien der zugehörigen Kugeln, oder wie müssen sich die Oberflächen, oder die Körperinhalte der Segmente zu einander verhalten, damit im Falle (α) die Summe der Körperinhalte ein Maximum, oder im Falle (β) die Summe der Oberflächen ein Minimum sei?

8. Sind zwei gegenüberstehende Kanten einer dreiseitigen Pyramide der Gröfse nach gegeben und liegen sie in zwei gegebenen festen Geraden A, A_1, so ist bekanntlich der Körperinhalt der Pyramide constant, man mag jene Kanten auf diesen festen Geraden annehmen, wo man will. „Dagegen ist die Oberfläche der Pyramide ein Minimum, wenn man die Kanten so annimmt, dafs die Gerade, welche ihre Mitten verbindet, auf beiden senkrecht steht."

9. Wenn im Raume irgend drei unbegrenzte feste Geraden, wovon keine zwei in einer Ebene liegen, gegeben sind, so soll erstens unter allen Dreiecken, deren Ecken beziehlich in den drei Geraden liegen, dasjenige gefunden werden, *a*) dessen Umfang, oder *b*) dessen Flächeninhalt, oder *c*) dessen umschriebener Kreis ein Minimum ist*); oder es soll zweitens unter allen Kugeln, welche die drei Geraden berühren, die kleinste gefunden werden.

10. Sind die Grundlinien dreier Dreiecke im Raume der Gröfse und Lage nach gegeben, und sollen ihre Spitzen in irgend einem Puncte vereinigt sein, so soll diejenige Lage dieses Punctes gefunden werden, für welche die Summe der Flächeninhalte der drei Dreiecke ein Minimum ist. — Wenn ferner die drei Grundlinien der Gröfse nach gegeben sind, und wenn sie respective in irgend drei der Lage nach gegebenen unbegrenzten Geraden im Raume liegen sollen, so soll ihre Lage in diesen, so wie die Lage ihrer gemeinschaftlichen Spitze gefunden werden, für welche die Summe ihrer Flächeninhalte ein Minimum wird.

11. Wenn irgend eine Curve C von doppelter Krümmung gegeben ist, und man zieht aus einem beliebigen Puncte P im Raume nach allen

---

*) Das verlangte Dreieck mit dem kleinsten Umfange hat nothwendigerweise die Eigenschaft, dafs die Geraden, welche seine Winkel hälften, beziehlich auf den drei gegebenen festen Geraden senkrecht stehen.

Puncten derselben gerade Linien, so erfüllen diese irgend eine kegelförmige krumme Fläche F. Es soll derjenige Punct P gefunden werden, für welchen die Fläche F ein Minimum wird.

Diese Aufgabe wird einfacher, wenn statt der Curve C irgend ein geradliniges schiefes Vieleck (Viereck, Fünfeck, u. s. w.) im Raume gegeben ist.

12. Wenn die Seiten (oder ihre Verlängerungen) eines beliebigen gleichseitigen n Ecks in der Ebene beziehlich durch irgend n gegebene Puncte gehen, so soll der Ort seiner Ecken, einzeln genommen, gefunden werden *). — Giebt es unter den verschiedenen n Ecken, im Allgemeinen, ein solches, welches die Eigenschaft hat, dafs, wenn man in den gegebenen n Puncten auf seine Seiten Lothe errichtet, diese einander in irgend einem und demselben Puncte treffen?

Die nämlichen Fragen finden statt, wenn die Seiten des n Ecks, anstatt gleich zu sein, irgend ein gegebenes Verhältnifs zu einander haben sollen, z. B. sich verhalten sollen, wie irgend n gegebene Gröfsen.

13. Wenn die Ecken eines α) gleichseitigen, oder β) gleichwinkligen ebenen n Ecks nach der Reihe in irgend n festen unbegrenzten Geraden liegen: welche Curven umhüllen dann seine Seiten, einzeln genommen, in dem einen (α) und andern (β) Falle?

14. Läfst man, bei einem gegebenen Kreise $ADBE$ (Fig. 10.), einen Bogen AB, von dessen Endpuncten der eine A fest ist, von Null an stetig wachsen, so beschreibt sein Schwerpunct C irgend eine krumme Linie ACM. Welche Eigenschaft hat diese barycentrische Linie? — Es ist leicht zu sehen, dafs dieselbe so oft durch den Mittelpunct M des Kreises geht, als der bewegliche Endpunct B des Bogens seine Peripherie durchläuft, oder zu dem festen Endpuncte A zurückkehrt, dafs sie daselbst (in M) den festen Durchmesser AME eben so oft berührt, und dafs sie aufserdem bei jedem spätern Umlaufe des Punctes B eine Schleife beschreibt, die sich immer mehr zusammenzieht, so dafs jede Schleife die darauf folgende einschliefst. Ferner bemerkt man leicht die Eigenschaft, dafs jede Tangente BC der barycentrischen Curve durch den beweglichen Endpunct B des jedesmaligen Bogens AB geht, welcher den Berührungspunct C der Tangente zum Schwerpunct hat.

Dieselbe Frage ist allgemein zu stellen, wo, statt des Kreises, irgend eine Curve gegeben ist.

Auch kann die Frage umgekehrt werden, d. h. es kann zu einer gegebenen barycentrischen Curve die ihr zugehörige Curve gesucht werden. Wenn z. B. die barycentrische Curve ein Kreis ist: welches ist dann die zugehörige Curve? Oder wenn ferner die Tangente BC zum Bogen AC ein constantes Verhältnifs haben soll, etwa wie 2:3, welches ist alsdann die gegebene Curve $ADBE$?

---

*) Die Gröfse der Seiten des in Rede stehenden n Ecks ist natürlicherweise willkürlich; eben so braucht es nicht convex zu sein, sondern es ist im allgemeinsten Sinne zu nehmen.

15. Es finden ähnliche Fragen statt, wie bei der vorigen Aufgabe (14.), wenn man den Schwerpunct des Segmentes (anstatt des Bogens) ADB berücksichtigt; wobei nemlich ebenfalls der Punct A fest bleibt und der andere B sich in der gegebenen Curve fortbewegt. — Ferner finden gleiche Fragen in Rücksicht auf den Schwerpunct eines veränderlichen Sectors AMB statt, wenn nämlich M irgend ein fester Pol (nicht nothwendig der Mittelpunct der gegebenen Curve, welche beliebig ist), und wenn der eine Schenkel MA des Sectors fest ist, dagegen der andere MB sich um den Pol M dreht *). Übrigens läfst sich die gegenwärtige Aufgabe auf die vorige (14.) zurückführen, oder sie fällt im Grunde ganz mit ihr zusammen.

Es darf wohl kaum erwähnt werden, dafs ähnliche Fragen über krumme Flächen, so wie über Linien von doppelter Krümmung aufzustellen sind.

16. In der Elementargeometrie wird gelehrt, unter welchen Bedingungen ein n Eck in der Ebene bestimmt sei, welche und wie viele von seinen Elementen, Seiten und Winkel, gegeben sein müssen, damit die übrigen dadurch bestimmt sind.

Es käme nun darauf an, zu untersuchen, unter welchen Bedingungen ein schiefes n Eck im Raume bestimmt sei, d. h., welche und wie viele von seinen $3n$ Elementen oder Stücken (nämlich n Seiten, n Winkel und n Flächenwinkel) gegeben sein müssen, damit alle fehlenden dadurch bestimmt sind. — Wenn z. B. im Allgemeinen nur 6 Stücke fehlen dürfen, so würde folgen, dafs ein schiefes n Eck nur bis zum 6 Ecke durch blofs zwei Arten von Elementen, z. B. blofs durch Seiten und Winkel, bestimmt ist, und dafs dagegen zur Bestimmung der folgenden schiefen Vielecke, vom 7 Eck an, nothwendig dreierlei Elemente erforderlich sind. Durch nur zweierlei Elemente, etwa durch Seiten und Winkel, ist unter andern z. B. das schiefe Viereck bestimmt, wenn die vier Seiten und zwei an einer Seite liegenden Winkel gegeben sind; das schiefe Fünfeck, wenn alle 5 Seiten und 4 Winkel, und das schiefe Sechseck, wenn alle Seiten und alle Winkel gegeben sind.

Das Wort „bestimmt" ist hier in der allgemeinern Bedeutung zu nehmen, dafs nemlich nicht unendlich viele, sondern nur irgend eine bestimmte Zahl von verschiedenen Vielecken mit den gegebenen Elementen möglich sind. In den Fällen, wo mehr als ein Vieleck möglich ist, müssen alsdann, um auf die Congruenz zweier, aus den nämlichen gegebenen Stücken, gebildeten Vielecke zu schliefsen, noch andere Nebenbedingungen hinzugefügt werden, eben so wie bei einigen Fällen der Congrnenz ebener Vielecke.

---

*) Es ist leicht zu sehen, dafs der bewegliche Schenkel MB des Sectors (oder im ersten Falle die Sehne AB des Segments) von derjenigen Tangente, welche die barycentrische Curve in dem Schwerpunct des jedesmaligen Sectors berührt, in einem constanten Verhältnifs geschnitten wird, dafs nemlich der dem festen Puncte M (oder A) anliegende Abschnitt sich zum andern verhält, wie 2:1.

11.

Nova curvas investigandi methodus.

(Auct. Dr. *A. Tellkampf*, prof. in Gymn. Hammonensi.)

Cogitanti mihi de difficultate curvas rectificandi, saepissime si methodos usitatas adhibere velimus haud superanda, forte sub oculos cecidit *Leibnitzii* ad summum *Newtonum* epistola (in *Newtoni* Opusculis T. I. pag. 414) ubi ill. vir non parvi momenti esse pronuntiat: „tum ut problemata, quae ex data tangentium proprietate quaerunt lineas, ad quadraturas, tum ut qaudraturae ipsae ad curvarum rectificationes reducantur." Hujusmodi sententia, iis quae jam dudum animo volveram mire favens, viam, quam parva quidem perficiendi spe ingressus eram, non derelinquere sed diligentius persequi me commovit. Quantumvis quae assecutus sum a desiderandis absint, nihilominus operae pretium mihi videbatur, curvas investigandi methodum a me tentatam quum a cognitis penitus discrepet, publici juris facere, ut alii quid de illa expectandum dijudicent, ac si velint quae imperfecta reliqui ita promoveant, ut scientiae commodum affere queant.

1.

Si triangulorum seriem ita comparatam ponimus, ut bini termini vicini progressionis

$$a,\quad a+pk,\quad a+2pk,\quad a+3pk,\quad \ldots.\quad a+npk,$$

ubi p sit unitate minor, simul cum numero k designent latera, figura $FABCD\ldots.$ (Tab. II. Fig. 1.) ad modum areae spiralis a vertice triangulorum communi F proficiscens ex illis potest formari. Tum quaelibet recta a vertice ad lineae compositae puncta A, B, C, D, ... ducta, hujus lineae vocetur radius vector; quem si littera z designas, generaliter erit $z = a+npk$, ubi per hypothesin p numerum <1 denotat. Jam si lineam $ABCD\ldots.$ per singulos gradus $= k$ paullatim crescentem eamque ob causam discontinue variabilem respicimus, longitudine indeterminata nk signo v denotata, aequatio

$$z = a+npk = a+pv$$

pro quolibet puncto ad angulos A, B, C, D, ... lineae compositae inter ejus longitudinem (v) ab origine A computatam et radium vectorem (z) praebet relationem analyticam. Quum vero nihil impediat, quominus in-

crementum constans k omni quantitate data minus statuamus, aequationem modo pro linea composita deductam et ad curvam, ut illius limitem referri posse in aperto est. Hoc modo functionem, quam supra, ut de simplicissima proficisceremur notione, finximus *discontinuam* i. e. singulis tantum lineae punctis convenientem, in *continuam* transire videmus, pro quovis valore arcus v radium vectorem z exhibentem. Quae si ita considerantur longitudo variabilis v pro *abscissa*, quae vero ab illa pendet, recta z, pro curvae *applicata* sumenda est. Hinc prodit methodum, ad quam accessurus sum, ab usitata curvas spirales tractandi ratione in eo discrepare, ut anguli loco eligatur ipse arcus a radii vectoris directione primaria et altera quadam inclusus.

2.

Neminem fugiet, et de innumeris aliis formis analyticis pronuntiari posse quod dixi de relatione $z = a + \rho v$, ob deductionis simplicitatem aptissimum prae ceteris exemplum electa. Quum vero ea tantum conditione curva ex aequatione generali $z = a + \varphi(v)$ prodire queat, ut radius vector augmento adfectus, i. e. $z + \Delta z$, minor sit summa $z + \Delta v$, seu quod inde sequitur $\Delta z < \Delta v$, *criterium* indagandum est, cujus ope discernere possimus, an data inter z et v relatio revera curvae alicui respondeat, necne. Quod nullo negotio e figurae 2. contemplatione hauries, ubi $AM = v$, $MN = \Delta v$, $FM = z$, $RN = \Delta z$; facile enim, si e puncto M perpendicularem MP in rectam FN simulque MT ad curvam AM tangentem agas, tum vero arcus augmentum arbitrarium Δv continue descrescens ponas, patet ad unitatem confluere rationes:

1) chordae et arcus MN;
2) angulorum tum MTF et MNF, tum MTF et SMF, nec non quod inde sequitur angulorum SMF et MNF;
3) rectae perpendicularis MP et circuli, radio FM descripti, arcus MR.

Radii autem vectoris incrementum quum pro qualibet functione $z = a + \varphi(v)$ ad theorema *Taylorianum* exprimatur serie:

$$\Delta z = \frac{\partial x}{\partial v} \cdot \Delta v + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\Delta v^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{\partial v^2} \cdot \frac{\Delta v^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

incrementorum ratio $\frac{\Delta z}{\Delta v}$, pro valoribus infinite decrescentibus Δv, magis magisque appropinquet necesse est ad functionem derivatam $\frac{\partial z}{\partial v}$. Quae eam ob causam illius rationis *limitem* praebens, rationem suppeditat recta-

rum NP et NM, radii et curvae incrementis Δz et Δv infinite appropinquantium. Hinc sequitur, si ad limites procedas, ut aequatio

$$\frac{NP}{MN} = \cos MNP \text{ in alteram } \frac{\partial z}{\partial v} = \cos\mu$$

transeat, dum angulum SMF, qui brevitatis gratia vocetur *tangentialis*, litera μ designari velis.

In universum itaque pro criterio desiderato conditionem reperimus: functionem calculi differentialis ope derivatam $\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$ *unitate minorem fieri* eamque saltem non excedere. Non est, quod observem, illius functionis valorem negativum designare angulum tangentialem recto majorem.

3.

Criterium, quo cognoscimus, utrum inter variabiles z et v data aequatio revera curvae conveniat necne, aptissimum simul praebet auxilium, quo ejusmodi aequationes inveniantur. Nam si functionem aliquam $\varphi'(v)$ ita fingis, ut pro quovis quantitatis variabilis v valore unitate evadat minor, eam ponere licet $= \frac{\partial z}{\partial v}$, unde prodit

$$\partial z = \varphi'(v)\,\partial v$$

et hinc aequatio curvae desiderata

$$z = \int \varphi(v)\,\partial v = \text{const.} + \varphi(v).$$

Quum e. g. $\frac{v^2}{1+v^2}$ sit <1 pro quolibet valore numeri v, integro vel fracto, positivo vel negativo, ex aequatione

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1+v^2}$$

per integrationem sequitur altera ad curvam referenda:

$$\text{I.} \quad z = \int \frac{v^2\,\partial v}{1+v^2} = a + v - \text{arc}(\text{tang} = v),$$

si litera a denotat pro $v = 0$ radii vectoris valorem.

Assumta unitate pro functionis numeratore, e formula

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1+v^2}$$

sequitur

$$\text{II.} \quad z = \int \frac{\partial z}{1+v^2} = a + \text{arc}(\text{tang} = v).$$

Non minus conditioni commemoratae satisfacit aequatio

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{\sqrt{(1+v^2)}},$$

quae integrando praebet hanc:

$$\text{III.} \quad z = \int \frac{\partial v}{\sqrt{(1+v^2)}} = a + \log(v + \sqrt{(1+v^2)}).$$

Quibus exemplis e criterio $\frac{\partial z}{\partial v} < 1$ aequationes idoneas deducendi alia addere, nullius quidem negotii sed super vacaneum foret. Hanc ob causam quae adhuc additurus sum ea potius conditione eligam, ut datae lineae conveniant, quo manifestum fiat, curvarum aequationes inter arcum et radium vectorem non minus deduci posse, dum a notionibus mere geometricis proficiscaris.

Sit itaque prae ceteris circulus, cujus inquiratur aequatio. Tum quia angulus tangentialis ubique est rectus, prodit $\frac{\partial z}{\partial v} = \cos \alpha = 0$, et

$$\text{IV.} \quad z = a,$$

qua quidem aequationis forma simplicior nulla excogitari potest. Revera aliud nihil est, quam definitionis circuli formula analytica.

Alterum praebeat exemplum quam *Cartesius* ita finxit, ut angulus tangentialis esset constans, nomine spiralis logarithmicae notissima curva. E data conditione $\frac{\partial z}{dv} \cos \alpha = p$ illius profluit aequatio

$$\text{V.} \quad z = a + p.v$$

jam supra (§. 1.) alio modo deducta. Pro valorum, quos factor p induere potest, limitibus 0 et 1 formula manifesto exhibet illam circuli ($z = a$) et lineae rectae centrum simul et datam originem transeuntis ($z = a + v$).

Ut autem pro quovis situ rectae AM (Fig. 3.) ejus aequatio inveniatur, ponas $AF = a$, $FM = z$, $AM = v$, $AS = a.\cos FAM = a.m$. Tum erit

$$\text{VI.} \quad z = \sqrt{(a^2 + v^2 - 2amv)}$$

quae simplicior fit formula $z = \sqrt{(a^2 + v^2)}$ origine posita in puncto S, ita ut $FS = a$, $SM = v$. Rectae autem aequatio particularis, $z = a + v$, quam supra e spiralis logarithmicae aequatione profluere vidimus, e formula proposita non minus sequitur, assumto valore $m = \cos 180° = -1$.

4.

Quae proxime indagentur formulae pro curvae tangentibus, subtangentibus nec non area, e figurae contemplatione sponte profluunt. Quum enim (in Fig. 2.) $MS = z \cos \mu$, $FS = z \sin \mu$, $MFQ = 90°$, et areae AFM incrementum MFN sive $\Delta Z = \frac{1}{2} MN.FS$, sequitur:

$$1.\quad MS = z.\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad 2.\quad FS = z\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]},$$

$$3.\quad MQ = z.\frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 4.\quad FQ = z\sqrt{\left[\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2-1\right]},$$

$$5.\quad Z = \tfrac{1}{2}\int z\,\partial v\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]}.$$

Ne exempla omnino deficiant, simplices illas quae supra prodiere circuli, logarithmicae et lineae rectae aequationes his formulis subjiciam.

Quum circuli radius constans $z = a$, et itaque $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$, sequitur esse

$$1.\quad MS = 0, \quad 2.\quad FS = a, \quad 3.\quad MQ = a.\tfrac{1}{0}, \quad 4.\quad FQ = a.\tfrac{1}{0},$$

$$5.\quad Z = \tfrac{1}{2}\int a\,\partial v = \frac{av}{2}$$

omissa constanti; quibus formulis notissimae circuli proprietates exprimuntur, quum tangens et subtangens definitae longitudinis pro illo non existant.

Ex aequatione pro curva logarithmica, $z = a + pv$, prodeunt valores

$$1.\quad MS = p, \qquad 2.\quad FS = (a+pv)\sqrt{(1-p^2)},$$

$$3.\quad MQ = \frac{a+pv}{p}, \qquad 4.\quad FQ = \frac{a+pv}{p}\sqrt{(1-p^2)},$$

$$5.\quad Z = \tfrac{1}{2}\int (a+pv)\,\partial v\sqrt{(1-p^2)} = \left(\frac{av}{2}+\frac{pv^2}{4}\right)\sqrt{(1-p^2)},$$

cui constantem addere haud opus est, dum curvam a puncto A oriundam ponas. Formulae (3.) et (4.) ostendunt, tangentem et subtangentem cum curvae radio vectore $(a+pv)$ uniformiter crescere.

Sit denique lineae rectae aequatio generalis supra deducta

$$z = \sqrt{(a^2+v^2-2amv)},$$

cui aptetur formula (5.), et erit:

$$Z = \tfrac{1}{2}\int\sqrt{(a^2+v^2-2amv)}\,\partial v\sqrt{\left(1-\frac{(v-am)^2}{a^2+v^2-2amv}\right.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int a\sqrt{(1-m^2)}\,\partial v = \frac{v.a\sqrt{(1-m^2)}}{2},$$

i. e. areae trianguli AFM valor $\frac{1}{2}AM.FS$ (Fig. 3.).

Si formularum antecedentium quintam speciatim consideras, primo adspectu manifestum est, integrandi difficultatem, quae in curvae quidem rectificatione ad methodum hic propositam plane evitatur, in illius quadratura plerumque esse occursuram, ita ut vix sperare liceat, aditum ad curvarum inquisitionem hoc modo faciliorem redditum iri. Nihilominus viam quam inivi ulterius persequendi periculum facere juvabit, quum ad alias

fortasse curvarum proprietates ducat, etsi formula differentialis quadraturae rarius simplicitate ad integrationem optanda gaudeat.

5.

Priusquam curvarum aggredior theoriam universalem, superest ut proferam necessaria quaedam de diversa radii vectoris conditione mutato arcu v, prout peculiaris postulat aequationis $z = a + \varphi(v)$ forma. Quem ad finem prae ceteris animadvertendum est signum positivum vel negativum variabili v numeri substituti, quo arcus a data curvae origine directio ad unam alteramve partem denotatur. Figuram ab utraque parte radii vectoris FA prorsus eandem, itaque ipsam curvam *symmetricam* fieri necesse est, quum $\varphi(v)$ arcus potestates tantummodo numeri *paris* contineat, ut e. g. in

$$z = \sqrt{(a^2 + v^2)}, \qquad z = k + \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^4 + v^4)}, \quad \text{etc.}$$

Contra autem figuram prodituram esse *non-symmetricam* facile patet, quum functioni $\varphi(v)$ attribuas arcus potestates numeri *imparis*, ut in aequationibus

$$z = a + pv; \quad z = a + \text{arc}\,(\text{tang} = v); \quad z = a + \log(v + \sqrt{(1 + v^2)}.$$

Hic enim pro arcus valoribus negativis radium vectorem deminui in aperto est, ita ut radii ex altera parte originis continuo crescant ex altera autem magis magisque contrahentur, quod universim illis proprium est curvis, quae *spirales* vocari solent.

Omnia quae supra proposui exempla id quidem habent commune, ut si arcui incrementum attribuas, radius vector simul cum ipso crescat. Sed ne cui obiter intuenti lineae per aequationem generalem $z = a + \varphi(v)$ designatae et criterio $\frac{\partial z}{\partial v} < 1$ obnoxiae necessario huic proprietati subjectae videantur, respiciat ad lineae rectae et circuli aequationes (§. 3.). Nullius autem negotii est, summam talium functionum obtinere varietatem, quales pro arcubus augescentibus radios modo crescentes modo decrescentes efficiant, dummodo functionibus trigonometricis utamur. Sit e. g. dum p denotet numerum, alterum a non excedentem:

$$1. \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{p}{a} . \sin\left(\frac{v}{a}\right), \qquad 2. \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{p}{a} . \cos\left(\frac{v}{a}\right)$$

adjecta constanti k prodeunt formulae

$$\text{I.} \quad z = k - p . \cos\left(\frac{v}{a}\right), \qquad \text{II.} \quad z = k + p . \sin\left(\frac{v}{a}\right).$$

GENERAL LIBRARY University of MICHIGAN

Aliae huiusmodi functiones sunt:

III. $z = p\left[\sin\left(\frac{v}{a}\right) + \cos\left(\frac{v}{a}\right)\right]$, IV. $z = p\left[\sin\left(\frac{v}{a}\right).\cos\left(\frac{v}{a}\right)\right]$,

unde quae criterio satisfaciunt derivatae:

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{p}{a}\left[\cos\left(\frac{v}{a}\right) - \sin\left(\frac{v}{a}\right)\right] \quad \text{et} \quad \partial z = \frac{p}{a}\left[1 - 2\sin\left(\frac{v}{a}\right)^2\right].$$

In hujusmodi formulis, si arcus v respicitur in infinitum crescens, radius vector z manifesto modo minuitur, modo augetur prout v per multipla numeri $\frac{a\pi}{2}$ transit.

Peculiari observatione digna est forma $z = a + \sqrt{[\varphi(v)]}$, quum ob radicis quadratae ambiguitatem duos praebeat valores radii vectoris pro arcu v, eamque ob causam duo centra ad modum ellipsis et hyperbolae. Sit itaque pro datae curvae AM (Fig. 3.) puncto quodam M valor $\sqrt{[\varphi(v)]} = \pm b$, et perinde $z = a + b$, $z' = a - b$, utrumque centrum reperias describendo circulum radio a ex origine A, alios vero circulos radiis $(a + b)$ et $(a - b)$ e puncto M. Perspicuum est, originis A loco quodvis aliud curvae punctum M' eligi posse, cui si respondent valores $\sqrt{[\varphi(v)]} = \pm b'$, circuli circa M' radiis $(a + b')$ et $(a - b')$ describantur. Hujusmodi curvae exemplum praebeat aequatio:

$$z = a + \sqrt{(1 + v^2)}$$

cuius derivata

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{v}{\sqrt{(1+v^2)}} < 1.$$

6.

Ad modum formulas $z = a + \varphi(v)$ geometrice interpretandi hic propositum non minus quam tum, quum aequationes inter duas variabiles ad abscissas rectas et sub quodam angulo ipsis ordinatim applicatas referuntur, saepius curvas ad unam vel alteram partem limitatas reperimus. Nam si provecta substitutione seriei numerorum signo positivo vel negativo adfectorum, ad terminum accedimus quo excesso radii vectoris evadit valor *imaginarius*, curva limitem a calculo designatum, i. e. punctum quoddam, transgredi nequit. Cujus generis formulas esse facile agnoscius hasce:

I. $z = a + \sqrt{(k v)}$.

Hic arcus valores positivi tantum nec minores quidem numero $\frac{1}{4}k$ admittuntur, quum $\frac{\partial z}{\partial v} = \sqrt{\left(\frac{k}{4v}\right)} < 1$ fiat necesse est; valores autem $\frac{1}{4}k$ superantes in infinitum ponere licet, unde concludas, radii vectoris minimum esse

$= a + \frac{k}{2}$, maximum autem nullum existere. Simili modo formula

$$\text{II.} \quad z = a + \log v,$$

qua derivatur $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{v}$ ipsam *unitatem* arcuum habet limitem, nec numeros positivos < 1 nec negativos ullos signo v substitui permittit. Illa contra

$$\text{III.} \quad z = a + v + \sqrt{(1 - v^2)},$$

cui primo adspectu omnes valores positivi $v < 1$ videntur satisfacere, numerum positivum nullum et negativos solum inter 0 et -1 admittit, quum $\frac{\partial z}{\partial v} = 1 - \frac{v}{\sqrt{(1-v)^2}}$ unitate necessario minor sit. Pari modo arcuum limitem unitatem praebet aequatio

$$\text{IV.} \quad z = e^{1+v}$$

cujus derivata $\frac{\partial z}{\partial v} = e^{1+v}$ criterio satisfacere nequit nisi valores negativi et majores quidem numero 1 pro quantitate v assumuntur.

Finem faciant exempla

$$\text{V.} \quad z = k + \text{arc}\left(\sin = \frac{v}{a}\right)$$

$$\text{VI.} \quad z = k + \text{arc}\left(\cos = \frac{v}{a}\right)$$

e quibus derivatur functio communis

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \pm \frac{1}{\sqrt{[(a^2 - v^2)]}}$$

unde conditio prodit arcum v esse $< a$, respectu non habito signorum.

Si quae de curvae angulo tangentiali, de radii vectoris mutatione et denique de limitibus praemissa sunt, colligere velis, haud difficile erit, curvas ipsas secundum aequationes ideoneas oculis proponere. Quod si feceris, invenies e. g. pro:

1. $z = a + \log\sqrt{[(1 + v^2]}$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{v}{1+v^2}$

curvam symmetricam infinitam ad modum parabolae

2. $z = 1 + \text{arc}\,(\text{tang} = v)$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{1}{1+v^2}$,

curvam spiralem infinitam, inclusam in circulo radii $= 1 + \text{arc}\, 90^0 = 1 + \frac{\pi}{2}$.

3. $z = 2a \,.\, \sin\left(\frac{v}{2a}\right)$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = \cos\left(\frac{v}{2}\right)$

circulum, cujus radii vectores non a centro sed ab origine A in peripheria proficiscuntur.

7.

Antecedentibus alias adhuc addere exempla supervacaneum puto, quum e praemissis formarum aequationis generalis $z = a + \varphi(v)$ varietas satis eluceat. Aliud autem nihil mea interfuit quam illam ostendere varietatem, priusquam theoriam universalem curvarum notionibus supra (§. 1., 2) prolatis superstruere susciperem, ne aliis materiam sterilem tractare viderer. Jam ad theoriam illam, quam brevissime fieri possit, promovendam revertor ad seriem

$$1. \quad h = \frac{\partial z}{\partial v} . k + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} . \frac{k^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z}{\partial v^3} . \frac{k^3}{1.2.3} + \text{etc.}$$

ubi h denotat radii vectoris z augmentum Δz, k vero arcus incrementum Δv pro curva quadam AN (Fig. 2.) cujus forma universim ponatur $z = a + \varphi(v)$.

Tum si aliam fingis curvam $A'N'$ cum priori ex eodem centro descriptam, cujus originem A' indeterminatum relinquas, eam sub forma $z' = a' + \varphi'(v')$ comprehendere, radii augmentum autem ad constantem k relatum per seriem

$$2. \quad h' = \frac{\partial z'}{\partial v'} . k + \frac{\partial^2 z'}{\partial v'^2} . \frac{k^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z'}{\partial v'^3} . \frac{k^3}{1.2.3} \text{ etc.}$$

exprimere licet. Vix opus est, animadvertere, pro quavis linearum intersectione esse $z = z'$, angulos autem tangentiales ad punctum intersectionis determinari ope functionum $\frac{\partial z}{\partial v}$ et $\frac{\partial z'}{\partial v'}$, quae illorum designant cosinus (§. 1.). Hinc sequitur, eodem pro utraque curva angulo tangentiali tributo valore, *tactionis criterium* $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z'}{\partial v'}$.

Angulus tangentialis si constans ponitur, curvae aequatio fit illa spiralis logarithmicae (§. 3. V.):

$$\text{I.} \quad z = a + pv, \text{ unde } \frac{\partial z}{\partial v} = p, \text{ et } h = pk,$$

ita ut functiones derivatae altiores omnes evanescant. Formula igitur $z = a + pv$, quae si variabilium potestates respicimus primi est gradus, ob simplicitatem suam huic investigationi eodem modo quo lineae rectae forma analytica, dum ad methodum consuetam curvas indagamus, tanquam norma se commendat. Facile enim cognosci potest, utrum data quaedam curva

$$\text{II.} \quad z' = a' + \varphi'(v')$$

ex utraque parte cujusdam puncti M magis minusve curvata sit, quam spiralis logarithmica, cui centrum F et angulus tangentialis μ ad punctum da-

tum cum illa sint communes. Nam si in formnlis I. et II. sumis $z = z'$ et $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z'}{\partial v'}$, ut curvarum postulat tactio, radiorum incrementa subtrahendo prodit:

$$h' - h = \frac{\partial^2 z'}{\partial v'^2} \cdot \frac{k^2}{1.2} + \frac{\partial^3 z'}{\partial v'^3} \cdot \frac{k^3}{1.2.3} \text{ etc.}$$

Quum vero nihil impediat, quominus arcus augmentum k qualibet quantitate minus ponatur, differentiae infinite decrescentis $(h' - h)$ signum $\pm$ a sola functione derivata $\frac{\partial^2 z'}{\partial v'^2}$ pendere in aperto est; quae si *positiva* pro data valore $v' = b$ evadit, curvam spirali logarithmicae ad punctum M *externam*, sin autem *negativa*, curvam illi *internam* indicat. Valor denique singularis $\frac{\partial^2 z'}{\partial v'^2} = 0$ curvaturam in puncto M eandem esse, ac spiralis logarithmicae e centro F descriptae et punctum illud sub angulo μ, cujus cosinus $= \frac{\partial z}{\partial v} = p$, transeuntis pronuntiat.

8.

Hujusmodi autem comparatio, quae prorsus in incerto relinquit, utrum curva ad spiralem logarithmicam fictitiam externa versus centrum sit *concava* an *convexa*, quum ad lineae datae cursum dijudicandum parum prodesse queat, alia disquisitionis via aperienda est, quae curvaturam ad quodvis punctum M tuto dignoscere doceat. Quem ad finem radium vectorem $FM = z$ (Fig. 4.) ita provectum fingas ut arcus incrementum MN fiat $= k$, $FN = z + h$, angulus $MFN = \psi$, anguli tangentialis ad M et $N = \mu$ et ν, denique angulus a tangentibus inclusus $= \lambda$ ponantur. Tum perspicuum est, curvaturam ad punctum M pendere ab anguli λ relatione ad constantem $MN = k$, quacum augetur vel minuitur. Est autem, quum lineam LK et FN parallelam duxeris, angulus $\mu = MKL + KLM = \psi + (\gamma - \lambda)$, unde prodit $\lambda = \psi + (\nu - \mu)$ et itaque

$$1. \quad \frac{\lambda}{k} = \frac{\psi}{k} + \frac{(\nu - \mu)}{k}.$$

Triangulorum nunc respiciens FMN reperies proportionem $\sin \psi : MN = \sin FMN : FN$, quae si arcus incrementum MN ponis infinite decrescens, tendit at alteram

$$2. \quad \frac{\psi}{\partial v} = \frac{\sin \mu}{z}.$$

Differentiae autem $(\nu - \mu)$ sive $\triangle \mu$ relatio ad arcum k decrescentem simul tendit ad alteram $\frac{\partial \mu}{\partial v}$, cujus valorem obtinemus functionis $\frac{\partial z}{\partial v} = \cos \mu$

differentatione iterata. Prodit enim ex aequatione differentiali

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = -\sin\mu \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

$$3. \quad \frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{\sin \mu},$$

Substituendo valores rationum $\frac{\psi}{\partial v}$ et $\frac{d\mu}{\partial v}$ ex aequationibus (2.) et (3.) in (1.), illa ad limites reducta fit

$$4. \quad \frac{\lambda}{\partial v} = \frac{\sin\mu}{z} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{\sin\mu}$$

vel

$$5. \quad \frac{\lambda}{\partial v} = \frac{\sin\mu^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{z\sin\mu} = \frac{1 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}{z\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]}}$$

qua curvaturam ad punctum M ope functionis z ejusque derivatarum $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ expressam videmus. Quae si ad centrum F est *concava*, signo functionis *positivo*, sin vero *convexa*, signo *negativo* designatur, ut figuram intuenti perspicuum erit, quum tangentem NL, ad rectae LM partes contrarias directam, angulum λ signo contrario adfectum gignere oporteat. Ceterum liquet in formula (5.) a solo numeratore pendere signum $\pm$, quum factores z et $\sin\mu$ alium quam positivum nequeunt induere valorem. Hanc autem ob causam saepius commodior habenda est formula (4.), cujus terminus prior ad curvaturam dijudicandam nullius est momenti, si forte positivum evadit signum termini posterioris, i. e. functionis

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = -\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]}}.$$

9.

Licet fatendum sit, theoriam supra expositam pro *curvaturae indole* dignoscenda ea, qua notissima gaudet, egere simplicitate, quum solum functionis derivatae $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ signum ad flexionem indicandum hic non sufficiat in eo tamen illam antecellit, ut simul cum curvaturae *modo* ejus *mensuram* sponte praebeat. Actis enim normalibus MC, NC curvae sectorem MCN velut *circuli*, radio CM descripti, elementum respicere licet; qui pro arcu infinite decrescenti circulus fit osculator, quo nullus alius ad punctum M curvae magis adpropinquare potest. Radium itaque curvaturae $= r$ in-

venies ex aequatione $MN : \sin MCN = CN : \sin CMN$, quae, si rite ad limites procedis, transit in simpliciorem

$$\frac{\partial v}{\gamma} = r,'$$

cui pro angulo centri γ aequalem λ substituere licet. Inversum autem valorem $\frac{\lambda}{\partial v}$ jam supra (in form. 4. et 5. §. 8.) deduxi; prodit itaque formula radii curvaturae haec:

$$6. \quad r = \frac{z \,.\, \sin\mu}{\sin\mu^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}} = \frac{z\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]}}{1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - z\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}}.'$$

Vereor ne taedeat lectorem, quod iterum observo:

1) signum $\pm$ radii curvaturae dumtaxat a denominatore functionis (6.) proficisci, quia numerator e factoribus necessario positivis constat;
2) radii signum positivum curvae versus F concavitatem; contra
3) ejus signum negativum curvae convexitatem designare;
4) curvaturam nullam existere, si denominator fit $= 0$, quia tum angulus $\lambda = 0$, quod fieri nequit, nisi linea AM est recta.

Praemissa ut paucis exemplis illustrentur, iterum aequationes admodum simplices eligam et superiori subjiciam formulae.

I. $z = a$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$, et $r = +a$

quod indicat, curvaturae radium pro quolibet curvae puncto esse constantem, ut soli circulo consentaneum est. Eundem radii r valorem reperies ex altera illa, quae circulo convenit, aequatione $z = 2a \,.\, \sin\left(\frac{v}{2a}\right)$ (§. 6., 3.).

II. $z = a + pv$, unde $\frac{\partial z}{\partial p} = p$; $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 0$; et $r = +\frac{z}{\sqrt{(1-p^2)}}$,

quod ostendit, in spirali logarithmica cui respondet data aequatio, radios curvaturae uniformiter crescere cum radiis vectoribus.

III. $z = \sqrt{(a^2 + v^2 - 2abv)}$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{v - ab}{z}$, et

$$r = \frac{z \,.\, \sin\mu}{0}, \quad \text{sive} \quad \frac{\lambda}{\partial v} = 0,$$

quo lineae rectae reperimus conditionem.

10.

Superest, ut paucis exponam quomodo derivare queamus locum geometricum a radii curvaturae centro descriptum sive datae curvae *AM evolutam DB* (Fig. 5.), cui idem ac alteri sit centrum *F*. Quem ad finem agas rectam $FB = u$ ad quodvis evolutae punctum *B*, quae ejus fit radius vector, aliamque $BM = r$ eam tangentem, denique radium vectorem *FM* $= z$; et sponte e figura profluere videbis aequationem

$$7. \quad u = \sqrt{(r^2 + z^2 - 2rz\sin\mu)}$$

ubi evolventis *AM* radius vector *r*, ut evolutae postulat definitio, aequiparat huius arcum $BD = t$, addita universim constanti $DA = b$. Haec ut in quovis casu peculiari determinetur, tantum opus est, radii *r* quaerere valorem pro curvae *AM* origine *A*, i. e. pro arcu $v = 0$ (quocum $t = 0$), unde *z* eiusque derivatae evadunt numeri determinati ideoque $r = b$. Quibus valoribus substitutis in form. (7.) evolutae prodit radius vector eius origini respondens *FD*, quem littera *c* denotemus. Hoc modo universim habemus triangulum *AFD*, cuius latera $= a, b, c$ data respicienda sunt ope functionis $z = a + \varphi(v)$. Formula (7.) autem praebet aequationem:

1) inter evolutae radium vectorem $u = FB$ et evolventis arcum *AM*, dum pro *z*, $\sin\mu$ et *r* substituas eorum valores in functione variabilis *v*;
2) inter *u* et *z*, si curvae *AM* aequatio $z = a + \varphi(v)$ derivatas $\frac{\partial z}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ et inde radium *r* secundum form. (6.) in variabilis *z* functione exhiberi sinit, ita ut $r = F(z)$;
3) inter *u* et *r*, dum per reversionem functionis $r = F(z)$ impetrare valeamus $z = f(r)$, quo prodit $u = \psi(r)$;
4) inter evolutae radium vectorem *u* eiusque arcum *t*, si in functione $u = \psi(r)$ litterae *r* denique substituis $t + b$.

Eligatur e. g. circuli simplicissima aequatio ad centrum relata

I. $z = a$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = 0$, $\sin\mu = 1$ et $r = a$, peracta substitutione e form. (7.) prodit $u = 0$, ut curvae nimirum conditio postulat, quia revera circuli evoluta nulla existere potest vel si mavis, in centrum contrahitur. Posita autem altera circuli aequatione ad peripheriae punctum *A* relata

II. $z = 2b \cdot \sin\left(\frac{v}{2b}\right)$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = \cos\left(\frac{v}{2b}\right)$, $\sin\mu = \left(\frac{v}{2b}\right)$ et $r = b$, per debitam substitutionem invenies $u = b = r$; quod quidem in aperto est, quum radius curvaturae pro originis puncto *A*, quocum *F* coincidit,

sit ipsius circuli AM radius. Prodit itaque $u = r = b + t = b$, unde universim arcum t et propterea evolutam prorsus deesse manifestum est.

Pro spiralis logarithmicae aequatione

III. $z = a + pv$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = p$, $\sin\mu = \sqrt{(1-p^2)}$ et $r = \frac{z}{\sqrt{(1-p^2)}}$,

reperies $z = r.\sqrt{(1-p^2)}$ et inde per form. (7.) $u = pr = pb + pt$. Quum vero pro curvae origine ejus curvaturae radius fit $= \frac{a}{\sqrt{(1-p^2)}}$, facta substitutione prodit

$$u = a.\frac{p}{\sqrt{(1-p^2)}} + pt,$$

quae a data forma in eo tantum discrepat, ut constans a factorem habeat $= \cot\mu$. Curvae itaque evolutam iterum spiralem logarithmicam et ejusdem quidem formae, etsi positione ab altera differat, evadere videmus.

Haud raro formulae sequentes, quae si tangentem MI ipsique parallelam FG agere velis, aeque ac superior (7.) e figurae contemplatione immediate prodeunt, commodum afferre possunt:

$$u\cos\beta = r - z.\sin\mu; \qquad z\cos\mu = u\sin\beta;$$

sive quum $\cos\beta = \frac{\partial u}{\partial r}$, velut $\cos\mu = \frac{\partial z}{\partial v}$ ponere licet:

$$8. \quad u\frac{\partial u}{\partial r} = r - z.\sin\mu = r - z\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]},$$

$$9. \quad z\frac{\partial z}{\partial v} = u.\sin\beta \quad = u\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right]}.$$

Priori formula differentiali prospere uti poteris, dum z et $\sin\mu$ exprimantur in functione variabilis r, ut in exemplo III., ubi facile prodiit $z = r\sqrt{(1-p^2)}$, $\sin\mu = \sqrt{(1-p^2)}$, unde adhibita form. (8.) impetras

$$u\,\partial u = r\,\partial r - r(1-p^2) = p^2 r$$

integrando autem $u = pr$, ut supra.

11.

Triangulus FMB, cui debemus formulam (7.) evolutionis theoriae supra pro fundamento positam, similem praebet aequationem ad propositum idoneam

$$10. \quad z = \sqrt{(r^2 + u^2 - 2ru\cos\beta)}$$

quae relationem exhibet

1) inter evolventis AM radium vectorem z et evolutae DB arcum $t = r - b$ vel prioris radium curvaturae r, dum u et $\cos\beta$ respicias functiones variabilis r;

2) inter radios vectores z et u evolutae DB et ex ipsa genitae AM, siquidem aequationem formae $r = f(u)$ datam ponimus.

Formula (10.) tum usui esse potest, quum curvam *ex evoluta genitam* (sive evolventem) investiganda proponitur. E data enim illius curvae aequatione $u = c + \psi(r)$ habes $\cos\beta = \frac{\partial u}{\partial r} = \psi'(r)$, unde $z = F(r)$, quae formula, ut r eliminetur, cum una vel altera superiorum (6.), (8.), (9.) est conjungenda.

Sit e. g. evolutae aequatio I. $u = pr$, unde $\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\beta = p$, form. (10.) per substitutionem transit in $z = r\sqrt{(1-p^2)}$. Est autem, si in auxilium vocas form. (9.):

$$z\frac{\partial z}{\partial v} = pr\sqrt{(1-p^2)}$$

unde

$$\frac{\partial z}{\partial v} = p \quad \text{et} \quad z = a + pv \quad \text{(cf. III. §. 10.).}$$

Alterum exemplum praebeat circuli aequatio II. $u = c$, unde $\frac{\partial u}{\partial r} = \cos\beta = 0$, et inde secundum form. (10.)

$$z = \sqrt{(r^2 + c^2)} \quad \text{sive} \quad r = \sqrt{(z^2 - c^2)}.$$

Quum vero ex altera parte in triangulo FBM, ad B rectangulo, habemus $r = z\sin\mu$, evadit aequatio

$$z^2\sin\mu^2 = z^2 - c^2, \quad \text{sive} \quad z\frac{\partial z}{\partial v} = c.$$

Haec formula, quam minori quidem negotio ex illa (9.) nactus fueris, praebet integrale

$$z = \sqrt{(\text{const.} + 2cv)}.$$

Constans autem ita determinetur, ut evolutae DB origo D coïncidat cum illo A evolventis AM, quo simul fiunt $z = c$ et $z = 0$. Aequatio itaque e circuli evolutione genitae prodit

$$z = \sqrt{(c^2 + 2cv)}.$$

12.

Antequam finem constituam disquisitioni, de alterius spirales tractandi methodi in alteram transitu quaedam addere haud ingratum puto, quamquam nexum illum optabili facilitate admodum carere videmus.

Data aequatione $z = \varphi(v)$, ut aliam deducas formae $z = F(\alpha)$ inter radium vectorem et angulum ab ipso descriptum, collocando formulas differentiales *quadraturae:*

1. $\partial Z = \frac{1}{2} z^2 \partial \alpha$, 2. $\partial Z = \frac{1}{2} z \partial v \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]}$

nullo quidem negotio invenies formulam

$$3. \quad \partial \alpha = \frac{\partial v}{z} \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]} = \psi'(v) \partial v$$

unde, si integratio perfici potest, prodit

$$\alpha = \text{const.} + \psi(v)$$

et tum quidem reversionis ope $z = F(\alpha)$.

Ne exempla deficiant, primum eligam simplicissimum illud I. $z = 2a \sin\left(\frac{v}{2a}\right)$, unde ad modum form. (3.) prodit

$$\partial \alpha = \frac{\partial v}{2a}; \qquad \alpha = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{v}{a}; \qquad z = 2a \sin \alpha.$$

Alterum sit II. $z = pv$, unde $\frac{\partial z}{\partial v} = p$, et

$$\partial \alpha = \frac{\partial v}{pv} \sqrt{(1 - p^2)}; \qquad a = \frac{\sqrt{(1-p^2)}}{P} \cdot \log v = k \cdot \log v.$$

Tum si ad logarithmorum naturalium basin e procedis, evadit $e^{\overline{k}} = v$, et per debitam substitutionem notissima logarithmicae spiralis aequatio $z = p e^{\frac{a}{k}}$.

Simili modo, dum ab aequatione inter radium vectorem et angulum $z = F(\alpha)$ proficisci velimus, ut aliam nanciscamur radii et arcus valorem $z = \varphi(v)$, spiralium *rectificationis* formula differentiali utamur

$$4. \quad \partial v = \sqrt{(z^2 \partial \alpha + \partial z^2)}$$

cui si introducis valores $z = F(\alpha)$, $\partial z = F'(\alpha) \partial \alpha$, induit formam $\partial v = \psi'(v) \partial v$, unde si fieri possit integrando prodit $v = \psi(\alpha)$ et per reversionem $\alpha = f(v)$, ita ut substituendo denique invenias $z = \varphi(v)$.

Huiusmodi transformationis exemplum idoneum praebet spiralis Archimedea, cujus aequatione III. $z = \frac{m}{2\pi} \alpha$ applicata ad form. (4.), profluit

$$\partial v = \frac{m}{2\pi} \partial \alpha \sqrt{(1 + \alpha^2)}$$

vel si α et $\partial \alpha$ in functione z exprimere velis

$$\partial v = \partial z \sqrt{\left(1 + \frac{4\pi^2}{m^2} z^2\right)}.$$

Utraque quidem formula integrari potest ad instar

$$\int \partial x \sqrt{(1 - k x^2)} = C + \tfrac{1}{2} x \sqrt{(1 + k x^2)} + \frac{1}{2\sqrt{k}} \log \left[\sqrt{(k x^2)} + \sqrt{(1 + k x^2)}\right]$$

nec mirum est, eandem evadere formam integrandam differentialis ∂v, vel si α vel si z eligas, quum hae variabiles sint in ratione constanti $2\pi : m$.

Non est quod observem, quot impedimentis plerumque laboret via transformationis hic delineata, quum operationes analyticae, quibus opus est, rarius absolvi queant, nisi forte de industria curvarum aequationes ita eligantur, ut integratio perfici possit. Quod e. g. formae irrationali

$$\sqrt{\left[1-\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right]} \quad \text{sive} \quad \frac{1}{\partial v}\sqrt{(\partial v^2-\partial z^2)}$$

contingit, dum ponas

$$2\partial v = \varphi(x)\partial x + \frac{\partial x}{\varphi(x)}; \qquad 2\partial z = \varphi(x)\partial x - \frac{\partial x}{\varphi(x)}$$

per φ denotans quamlibet functionem variabilis x, quae ipsa functio variabilis v habenda est: $x = F(v)$, unde $\partial x = F'(v)\partial v$. Substitutis enim valoribus illis evadit

$$\frac{1}{\partial v}\sqrt{(\partial v^2-\partial z^2)} = \frac{1}{\partial v}\sqrt{(\partial x^2)} = \frac{\partial x}{\partial v} = F(v).$$

Si vero huiusmodi artificia, quibus formae integrabiles prodeant, spernimus, dubitari non potest, quin maximam partem ad alterutram methodum transgrediendi difficultates in ipsa curvarum indole repositae sint. Hinc quidem datae cujuslibet aequationis transformationem effici posse vix sperandum sit, ita ut hoc respectu quae supra exposita sunt sterilia appareant: ex altera vero parte methodus a vulgari prorsus diversa et quae vix ullo modo commode cum ea possit conjungi, ob hanc ipsam indolem commendabilis videtur. Propterea quam hic geometrarum oculis subjicere ausus sum, methodum curvas investigandi, fortasse haud indignam reperient ad quam respiciant, etsi multa dereliquerim, quae desiderentur.

12.

Über unendlich verschiedene Entwickelungen der Potenzen der Cosinus und Sinus.

(Von Herrn Dr. *E. E. Kummer* zu Sorau in der N. Lausitz.)

Schon seit einigen Jahren hat man die Aufgabe von der Entwickelung der Potenzen der Cosinus und Sinus in Reihen, welche nach den Cosinus oder Sinus der vielfachen Bogen fortschreiten, als vollkommen gelöst angesehen, und es sind auch wirklich die Schwierigkeiten, welche sich hierbei fanden, durch Aufsätze in diesem Journal, von Crelle, Abel und Olivier, und anderweitig vollständig beseitigt worden. Seitdem habe ich gefunden, dafs die Functionen $(\cos x)^n$ und $(\sin x)^n$ so viele verschiedene Reihen-Entwickelungen haben, welche nach Cosinus oder Sinus der Vielfachen von x geordnet sind, als bis jetzt wohl noch von keiner der sämmtlichen analytischen Functionen bekannt sind. Es sind hierbei ganze Classen von verschiedenen Reihen-Entwicklungen zu unterscheiden, von denen ich mehrere in einer Abhandlung: *De cosinum et sinuum potestatibus secundum cosinus et sinus arcuum multiplicium evolvendis*, welche nächstens im Verlage der Waisenhaus-Buchhandlung zu Halle erscheinen wird, ausgeführt habe. Daselbst aber habe ich noch eine Classe, und zwar die reichhaltigste von allen, übergangen, und diese will ich nun, unabhängig von den in der angeführten Schrift erlangten Resultaten, herleiten.

Wenn folgende zwei Reihen mit einander multiplicirt werden:

1. $$1+\frac{n}{1}z+\frac{n(n-1)}{1.2}z+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^3+\ldots.=(1+z)^n,$$

2. $$1+\frac{n}{1}z^{-1}+\frac{n(n-1)}{1.2}z^{-2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}z^{-3}+\ldots.=(1+z^{-1})^n,$$

so ist das Product derselben

3. $$(1+z)^n(1+z^{-1})^n=A_0+A_1(z+z^{-1})+A_2(z^2+z^{-2})+A_3(z^3+z^{-3})+\ldots.$$

Alle die von n abhängigen Coefficienten A dieser Reihe, welche durch die Multiplication der beiden Reihen (1.) und (2.) in Form unendlicher Reihen erscheinen, lassen sich durch bekannte Functionen sehr einfach ausdrücken, wie wir später sehen werden; für den jetzt vorliegenden Zweck aber, wo nur eine allgemeine Form der Entwickelung von $(\sin x)^n$ gefun-

den und gerechtfertigt werden soll, ist solches nicht nöthig. Man setze nun in (3.) $z = \cos 2x + \sqrt{-1}\sin 2x$, so ist

$$(1+z)(1+z^{-1}) = 2 + z + z^{-1} = 2 + 2\cos 2x = 4\cos x^2,$$

also

$$4. \quad (4\cos x^2)^n = A_0 + 2A_1\cos 2x + 2A_2\cos 4x + \ldots.$$

Es ist $4\cos x^2$ stets positiv; wird aber das Quadrat aufserhalb des Klammernzeichens mit n verbunden, so ist $(4\cos x^2)^n = (\pm 2\cos x)^{2n}$, wo das Zeichen + oder — statt hat, je nachdem $\cos x$ positiv oder negativ ist. Man verbinde also auf diese Weise das Quadrat aufserhalb der Klammern mit n, und setze $\frac{n}{2}$ statt n, so hat man eine Entwickelung von folgender Form:

$$5. \quad (\pm 2\cos x)^n = a_0 + a_1\cos 2x + a_2\cos 4x + a_3\cos 6x + \ldots.$$

Eine zweite Form der Entwickelung erhält man, wenn in dieser n in $n-1$ verwandelt und die Reihe sodann auf beiden Seiten mit $2\cos x$ multiplicirt wird. Werden sodann auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens die Producte zweier Cosinus in einfache Cosinus verwandelt, so entspringt daraus die Form:

$$6. \quad \pm(\pm 2\cos x)^n = b_0\cos x + b_1\cos 3x + b_2\cos 5x + \ldots.$$

In beiden Reihen (5.) und (6.) sind die Vorzeichen + oder — zu nehmen, je nachdem $\cos x$ positiv oder negativ ist. Durch Verwandlung des x in $x - \frac{\pi}{2}$ erhält man aus (5.) und (6.):

$$7. \quad (\pm 2\sin x)^n = a_0 - a_1\cos 2x + a_2\cos 4x - a_3\cos 6x + \ldots.$$

$$8. \quad \pm(\pm 2\sin x)^n = b_0\sin x - b_1\sin 3x + b_2\sin 5x - \ldots.$$

in welchen beiden Gleichungen (7.) und (8.) die Vorzeichen + oder — zu nehmen sind, je nachdem $\sin x$ positiv oder negativ ist. Man denke sich nun ferner die beiden Reihen (6.) und (7.) mit einander multiplicirt, so erhält man, nachdem wieder die Producte zweier Cosinus in einfache Cosinus verwandelt worden, eine Reihe von folgender Form:

$$9. \quad \pm(\pm 4\sin x.\cos x)^n = \pm(\pm 2\sin 2x)^n = c_0\cos x + c_1\cos 3x + c_2\cos 5x + \ldots.$$

In der Reihe (5.) werde nun x in $2x$ verwandelt, und mit der Reihe (9.) multiplicirt, so erhält man auf dieselbe Weise:

$$10. \quad \pm(\pm 4\sin 2x\cos 2x)^n$$
$$= \pm(2\sin 4x)^n = d_0\cos x + d_1\cos 3x + d_2\cos 5x + \ldots.;$$

ferner, in Gleichung (5.) x in $4x$ verwandelt, und mit (10.) multiplicirt, giebt eine Reihe von folgender Form:

$$11. \quad \pm(\pm 2\sin 8x)^n = e_0\cos x + e_1\cos 3x + e_2\cos 5x + \ldots.$$

Es ist klar, dafs dieselbe Methode der Multiplication zweier Reihen so oft wiederholt werden kann, als man will; dafs also, wenn k irgend eine ganze positive Zahl bedeutet, eine allgemeine Form gefunden ist, nämlich

$$\textbf{12.}\quad \pm(\pm\sin 2^k x)^n = C_0\cos x + C_1\cos 3x + C_2\cos 5x + \ldots.$$

woraus man, indem $\frac{x}{2^k}$ statt x gesetzt wird, eine allgemeine Form der Entwickelung von $\pm(\pm\sin x)^n$ erhält. Aus den Bedingungen der Vorzeichen bei denjenigen Reihen, durch deren Multiplication diese entstanden ist, ersieht man leicht, dafs innerhalb der Klammern die Vorzeichen + oder — zu nehmen sind, je nachdem $\sin 2^k x$ positiv oder negativ ist, und dafs das Vorzeichen aufserhalb der Klammern + oder — ist, je nachdem $\cos x$ positiv oder negativ ist.

Nachdem so eine allgemeine Form der Entwickelung gefunden ist, so sind nun die Coefficienten dieser Reihe zu bestimmen. Die bekannte, schon von Euler angegebene Methode, die Coefficienten einer nach Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen geordneten Reihe durch bestimmte Integrale auszudrücken, findet aber bei dieser Reihe keine Anwendung; denn es dürfen die Integrale, wegen des Wechsels der Zeichen in $(\pm\sin 2^k x)^n$ durchaus nicht über die Grenzen, innerhalb welcher die Vorzeichen dieselben bleiben, ausgedehnt werden, also nicht über die Grenzen $x = \frac{h\pi}{2^k}$ bis $x = \frac{(h+1)\pi}{2^k}$, wenn h irgend eine ganze Zahl bedeutet; bei einer Integration in diesen Grenzen würden aber die übrigen Glieder der Reihe (12.), aufser dem zu bestimmenden, nicht verschwinden. Es mufs daher die Reihe (12.) in eine andere verwandelt werden, bei welcher dieser Übelstand nicht Statt findet. Wird statt x gesetzt $x + \frac{2h\pi}{2^k}$, wo h eine ganze Zahl ist, so ist:

$$\textbf{13.}\quad \pm(\pm\sin 2^k x)^n$$
$$= C_0\cos\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) + C_1\cos 3\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) + C_2\cos 5\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) + \ldots.$$

Diese Gleichung wird nun auf beiden Seiten mit $2\cos(2m+1)\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right)$ multiplicirt, und nachdem die Producte zweier Cosinus auf der rechten Seite in einfache Cosinus verwandelt worden sind, erhält man folgende Gleichung:

$$14.\quad \pm(\pm\sin 2^k x)^n . 2.\cos(2m+1)\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right)$$
$$= \left.\begin{matrix} C_m + C_{m+1} \\ + C_{m-1} \end{matrix}\right\} \cos 2\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) + \left.\begin{matrix} C_{m+2} \\ + C_{m-2} \end{matrix}\right\} \cos 4\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) + \ldots.$$

Es sollen nun dem h nach einander alle Werthe von -2^{k-2} bis $+2^{k-2}-1$ gegeben werden: dann erhält man, wenn alle daraus entstehenden Gleichungen addirt werden, vermittelst des gewöhnlichen Summenzeichens Σ,

$$15.\quad \Sigma \pm(\pm\sin 2^k x)^n . 2\cos(2m+1)\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right)$$
$$= \left.\begin{matrix} \Sigma C_m + C_{m+1} \\ + C_{m-1} \end{matrix}\right\} \Sigma\cos 2\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) + \left.\begin{matrix} C_{m+2} \\ + C_{m-2} \end{matrix}\right\} \Sigma\cos 4\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) + \ldots.$$

für alle Werthe des h, von -2^{k-2} bis $+2^{k-2}-1$.

Es ist aber, wenn p eine ganze Zahl ist, für die angegebenen Werthe des h, $\Sigma\cos 2p\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right)$ im allgemeinen $=0$, ausgenommen wenn p ein Vielfaches von 2^{k-1} ist, z. B. für $p = q.2^{k-1}$, wo auch q eine ganze Zahl ist: dann ist nämlich $\Sigma\cos 2^k q\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right) = 2^{k-1}\cos q.2^k x$. Die Reihe (15.) verwandelt sich also in folgenden Ausdruck:

$$16.\quad \Sigma \pm(\pm\sin 2^k x)^n . 2\cos(2m+1)\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right)$$
$$= 2^{k-1}(C_m + A\cos 2^k x + B\cos 2.2^k x + \ldots.).$$

Die hier angedeutete Summation in dem anderen Theile der Gleichung ist nun noch wirklich auszuführen, wobei die Bedingungen der Vorzeichen $+$ und $-$ wohl zu beachten sind. Nämlich für verschiedene Werthe des h, und in verschiedenen Grenzen des x, müssen diese andere und andere werden; wir wollen die Gleichung (16.) aber nur innerhalb der Grenzen $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2^k}$ betrachten. Es ist sehr leicht, aus den oben gefundenen Bedingungen der Vorzeichen in der Gleichung (12.) zu ersehen, dafs für einen jeden Werth des h, von $h=-2^{k-2}$ bis $h=+2^{k-2}-1$, innerhalb der Grenzen $x=0$ und $x=\frac{\pi}{2^k}$, die beiden positiven Zeichen Statt haben, dafs also in diesen Grenzen für die Gleichung (16.) zu nehmen ist: $+(+\sin 2^k x)^n$. Dies kann, da es in Beziehung auf die verschiedenen Werthe des h constant ist, vor das Summenzeichen gesetzt werden, so dafs dieser Theil der Gleichung (16.) wird:

$$2(\sin 2^k x)^n \Sigma \cos(2m+1)\left(x+\frac{2h\pi}{2^k}\right)$$
$$= \frac{2\cos m\pi}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{2^k}}(\sin 2^k x)^n \cos(2m+1)\left(x-\frac{\pi}{2^k}\right);$$

denn die Summe dieser Reihe von Cosinus, deren Bogen in arithmetischer Progression fortschreiten, wird leicht gefunden. Es ist also aus der Gleichung (16.):

$$17. \quad \frac{2\cos m\pi}{\sin\frac{(2m+1)\pi}{2^k}}(\sin 2^k x)^n \cos(2m+1)\left(x-\frac{\pi}{2^k}\right)$$
$$= 2^{k-1}(C_m + A\cos 2^k x + B\cos 2.2^k x + \ldots.).$$

Wird endlich diese Gleichung mit dx multiplicirt und in den Grenzen von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2^k}$, in welchen sie gilt, integrirt, so erhält man, weil nun aufser dem ersten Gliede alle übrigen verschwinden, eine Bestimmung des allgemeinen Coefficienten C_m der Reihe (12.), nämlich:

$$C_m = \frac{4\cos m\pi}{\pi\sin\frac{(2m+1)\pi}{2^k}}\int_0^{\frac{\pi}{2^k}} (\sin 2^k x)^n \cos(2m+1)\left(x-\frac{\pi}{2^k}\right)dx,$$

oder, wenn statt x gesetzt wird $\frac{\pi-z}{2^k}$,

$$18. \quad C_m = \frac{4\cos m\pi}{2^k\pi\sin\frac{(2m+1)\pi}{2^k}}\int_0^{\pi} (\sin z)^n \cos\frac{(2m+1)z}{2^k}.dz.$$

Dieses bestimmte Integral läfst sich, wie später gezeigt werden wird, durch eine bekannte transcendente Function ausdrücken, so dafs wir die Coefficienten C_m als bekannt annehmen können; daher haben wir nun schon, wenn in der Gleichung (12.) x verwandelt wird in $\frac{x}{2^k}$, unendlich viele Entwickelungen von $(\sin x)^n$:

$$19. \quad \pm(\pm\sin x)^n = C_0\cos\frac{x}{2^k} + C_1\cos\frac{3x}{2^k} + C_2\cos\frac{5x}{2^k} + \ldots..$$

Wenn nämlich für k andere und andere specielle Werthe ganzer Zahlen genommen werden, so gehen daraus eben so viele verschiedene Entwickelungen von $(\sin x)^n$ hervor. Es läfst sich aber sogar zeigen, wie diese Formel wieder nur ein sehr specieller Fall einer weit allgemeinern ist, welche sogar drei willkürliche ganze Zahlen enthält, so dafs jeder andere specielle Werth einer dieser ganzen Zahlen eine andere Entwickelung giebt. Dieses merkwürdige Resultat wird daraus gefolgert, dafs die Summe

der Reihe (12.) sich nur in Hinsicht der Vorzeichen ändert, wenn statt x gesetzt wird $x \pm \frac{h\pi}{2^\lambda}$, wo h und λ ganze positive Zahlen sind, und λ nicht gröfser ist, als k. Setzt man also in der Formel (12.) $x + \frac{h\pi}{2^\lambda}$ statt x und $x - \frac{h\pi}{2^\lambda}$ statt x, und addirt diese beiden Gleichungen, so ist:

$$20. \quad 0 \text{ oder } \pm(\pm \sin 2^k x)^n = C_0 \cos\frac{h\pi}{2^\lambda}\cos x + C_1 \cos\frac{3h\pi}{2^\lambda}\cos 3x + \ldots.$$

Ob die Summe dieser Reihe $= 0$ oder $= \pm(\pm \sin 2^k x)^n$ sei, hängt von den Grenzen ab, in welchen $x \pm \frac{h\pi}{2^\lambda}$ liegt; es ist indessen nicht nöthig, dies genauer zu untersuchen. Die Reihe (20.) kann auch folgendermafsen geschrieben werden:

$$21. \quad 0 \text{ oder } \pm(\pm \sin 2^k x)^n$$
$$= \begin{cases} + \cos\frac{h\pi}{2^\lambda}(C_0 \cos x + C_{2^\lambda-1}\cos(2.2^\lambda-1)x + C_{2^\lambda}\cos(2.2^\lambda+1)x + \ldots. \\ + \cos\frac{3h\pi}{2^\lambda}(C_1 \cos 3x + C_{2^\lambda-2}\cos(2.2^\lambda-3)x + C_{2^\lambda+1}\cos(2.2^\lambda+3)x + \ldots. \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

$2^{\lambda-1}$ Gleichungen, aus denen die gleiche Anzahl der unbekannten Gröfsen B_0, B_1, etc. bestimmt werden kann. Es ist übrigens hierbei leicht zu zeigen, dafs diese Gleichungen nicht unter einander identisch sein können, in welchem Falle sich im allgemeinen B_μ aus ihnen nicht würde bestimmen lassen. Da nämlich in allen Gleichungen alle unbekannten Gröfsen vorkommen, so können nur dann identische unter ihnen sein, wenn entweder die eine Gleichung mit einer andern vollkommen gleich, oder ein Vielfaches derselben ist, welches beides, wie leicht zu sehen, hier nicht Statt findet. Es mufs sich also B_μ aus diesen Gleichungen bestimmen lassen. Dies jedoch auf dem gewöhnlichen Wege zu thun, würde zu weitläufig sein. Man findet die allgemeine Auflösung aller dieser Gleichungen, welche in (22.) enthalten sind, sehr leicht, wenn man nur die Form betrachtet, welche das Resultat haben mufs, nämlich

$$25.\quad B_\mu = R(\pm\sin 2^k x)^n,$$

wo R eine Gröfse ist, welche aus den Coefficienten der in (22.) enthaltenen unbekannten B zusammengesetzt ist, und diese sind, wie wir sehen, von n und x vollkommen unabhängig. Nur wegen des Wechsels von 0, $+(\pm\sin 2^k x)^n$ und $-(\pm\sin 2^k x)^n$ kann R innerhalb anderer Grenzen des Bogens x auch andere Werthe erhalten. Diese Änderungen aber hängen nur von dem Incremente des Bogens x, nämlich $\frac{h\pi}{2^\lambda}$ ab; es mufs daher von einem Werthe desselben bis zum andern, also im allgemeinen von $x = \frac{h\pi}{2^\lambda}$ bis $x = \frac{(h+1)\pi}{2^\lambda}$, R durchaus unverändert bleiben. Wird nun in (25.) $n = 0$ gesetzt, so ist, weil R von dieser Gröfse n unabhängig,

$$26.\quad R = B_\mu \text{ (für } n = 0).$$

Es folgt nun für $n = 0$ aus (18.)

$$C_m(\text{für } n = 0) = \frac{4\cos m\pi}{2^k \pi \sin\frac{(2m+1)\pi}{2^k}} \int_0^\pi \cos\frac{(2m+1)z}{2^k}\, dz.$$

$$C_m \text{ (für } n = 0) = \frac{4\cos m\pi}{\pi(2m+1)}.$$

Also ist nach Gleichung (24.):

$$27.\quad B_\mu(\text{für } n = 0) = R = \frac{4\cos\mu\pi}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m \frac{\cos(m2^{\lambda+1}+2\mu+1)x}{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}.$$

Es ist nun die Summe dieser doppelt unendlichen Reihe zu suchen, welches dadurch sehr erleichtert wird, dafs wir schon gesehen haben, dafs sie, oder die Quantität R, nur scheinbar von x abhängig sein kann, und

innerhalb der einzelnen Grenzen $x = \frac{h\pi}{2^\lambda}$ und $x = \frac{(h+1)\pi}{2^\lambda}$ unverändert sein mufs. Um nämlich diese Reihe in diesen Grenzen zu bestimmen, reicht es hin, dem x den Werth $\frac{2h+1}{2^\lambda}\pi$ zu geben, woraus hervorgeht:

$$28. \quad R = \frac{4\cos\mu\pi \cdot \cos\frac{(2h+1)(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty m} \frac{\cos m\pi}{m\,2^{\lambda+1}+2\mu+1},$$

in den Grenzen

$$x = \frac{h\pi}{2^\lambda} \quad \text{bis} \quad x = \frac{(h+1)\pi}{2^\lambda}.$$

Setzt man für einen Augenblick $\frac{2\mu+1}{2^\lambda} = a$, so ist, wenn dem m alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ gegeben werden:

$$R = \frac{4\cos(2h+1)a\pi \cdot \cos\mu\pi}{\pi \cdot 2^\lambda}\left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+2} + \frac{1}{a-2} \cdots\right\}.$$

Die Summe der in Klammern stehenden Reihe ist aber bekanntlich $\frac{\pi}{\sin a\pi}$; also, wenn für a sein Werth zurück gesetzt wird:

$$29. \quad R = \frac{4\cos\mu\pi \cdot \cos\frac{(2h+1)(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}}{2^{\lambda+1}\sin\frac{(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}};$$

also nach Gleichung (25.):

$$(\pm\sin 2^k x)^n = \frac{2^{\lambda-1}\cos\mu\pi \cdot \sin\frac{(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}}{\cos\frac{(2h+1)(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}} B_\mu,$$

oder, wenn endlich für B_μ der Ausdruck (24.) gesetzt und x in $\frac{x}{2^k}$ verwandelt wird:

$$30. \quad (\pm\sin x)^n = \frac{2^{\lambda-1}\cos\mu\pi\sin\frac{(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}}{\cos\frac{(2h+1)(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}} \sum_{+\infty}^{-\infty m} C_{m2^\lambda+\mu}\cos\left(\frac{m\,2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^k}\right)x,$$

in den Grenzen $x = h \cdot 2^{k-\lambda}\pi$ bis $x = (h+1)2^{k-\lambda}\pi$.

Die ganzen Zahlen k, λ, μ sind willkürlich, nur mit der Einschränkung, dafs λ nie gröfser als k sein darf, und μ nicht gröfser als $2^{\lambda-1}-1$; denn ein Werth des μ, welcher gröfser wäre, würde zwar kein falsches Resultat geben, aber ein solches, was in denen von $\mu=0$ bis $\mu=2^{\lambda-1}-1$ schon enthalten wäre. Die Reihe (19.) ist, wie schon bei dieser bemerkt wurde, nur ein specieller Fall dieser allgemeinen Formel, welchen man

daraus erhält, indem man $\lambda = 1$ und $\mu = 0$ setzt und statt h, $2h$ nimmt. Es wird sich bald zeigen, dafs diese allgemeine Formel nicht etwa leer und inhaltslos ist; denn wir werden verschiedene sehr elegante Reihen aufstellen, welche in ihr enthalten sind: zuvor aber ist es nöthig, den Coefficienten C_m, welcher bereits bei (18.) in Form eines bestimmten Integrales gefunden wurde, durch bekannte Functionen auszudrücken. Dies geschieht durch die Function Π nach Gaufs Bezeichnung. (Man sehe *Commentationes societatis Goettingensis cl. math. Tom. II. a.* 1812, worin die Abhandlung von Gaufs enthalten ist: *Disquisitionis generales circa seriem* $1+\frac{\alpha.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$) Hier ist die Theorie der Function Π, auf wenigen Seiten vollständig auseinandergesetzt, nachzusehen. Etwas gewöhnlicher scheint die Bezeichnung dieser Function durch Γ zu sein, nach Legendre, welcher fast zu derselben Zeit, wie Gaufs, die Theorie derselben Function in seinen *Exercices de calcul intégral* gegeben, und, so wie auch Gaufs, eine Tafel derselben berechnet hat. Wem übrigens die Function Γ geläufiger ist, als die Function Π: der kann überall diese in jene verwandeln, indem er nur statt $\Pi(z)$ zu setzen hat $\Gamma(z+1)$. Durch diese Function wird folgendes Integral ausgedrückt:

$$31. \qquad \int_0^{\pi} (\sin z)^n \cos rz \,.\, dz = \frac{\pi \cos\frac{r\pi}{2}\,\Pi(n)}{2^n \Pi\left(\frac{n+r}{2}\right)\Pi\left(\frac{n-r}{2}\right)},$$

wo r und n beliebige Zahlen sind. Da, wie ich glaube, dieses bestimmte Integral nicht unbekannt ist, so will ich mich mit Herleitung desselben, welche vermittelst der von Gaufs gefundenen Resultate leicht ausgeführt wird, nicht aufhalten. Wird $r = \frac{2m+1}{2^k}$ gesetzt, so erhält man nach der Gleichung (18.):

$$32. \qquad C_m = \frac{\cos m\pi\,\Pi(n)}{2^{n+k-1}\pi \,.\, \sin\left(\frac{2m+1}{2^{k+1}}\right)\pi\,\Pi\left(\frac{n2^k+2m+1}{2^{k+1}}\right)\Pi\left(\frac{n2^k-2m-1}{2^{k+1}}\right)}.$$

Dieser Ausdruck des Coefficienten könnte nun in den Formeln substituirt werden; jedoch der Kürze wegen wollen wir die Bezeichnung durch C beibehalten.

Wenn man in der Gleichung (30.) x in $x-\frac{\pi}{2}$, und $x+\frac{\pi}{2}$ verwandelt, und addirt und subtrahirt, so erhält man, bei gehöriger Beachtung der angegebenen Grenzen:

33. $(\pm\cos x)^n$

$$= \frac{2^{\lambda-1}\cos\mu\pi\sin\frac{(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}}{\cos\frac{(2h+1)(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m C_{m2^\lambda+\mu}\cos\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^{k+1}}\right)\pi\cos\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^k}\right)x;$$

34. $$0 = \sum_{+\infty}^{+\infty}{}_m C_{m2^\lambda+\mu}\sin\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^{k+1}}\right)\pi\sin\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^k}\right)x;$$

in den Grenzen $x = [h2^{k-\lambda}+\frac{1}{2}]\pi$ bis $x = [(h+1)2^{k-\lambda}-\frac{1}{2}]\pi$;

35. $(\pm\cos x)^n$

$$= \frac{2^{\lambda-1}\cos\mu\pi\,\mathrm{tang}\frac{(2\mu+1)\pi}{2^{\lambda+1}}}{\cos\frac{h(2\mu+1)\pi}{2^\lambda}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m C_{m2^\lambda+\mu}\cos\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^{k+1}}\right)\pi\cos\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^k}\right)x;$$

36. $(\pm\cos x)^n$

$$= -\frac{2^{\lambda-1}\cos\mu\pi}{\sin\frac{h(2\mu+1)\pi}{2^\lambda}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m C_{m2^\lambda+\mu}\sin\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^{k+1}}\right)\pi\cos\left(\frac{m2^{\lambda+1}+2\mu+1}{2^k}\right)x;$$

in den Grenzen $x = (h2^{k-\lambda}-\frac{1}{2})\pi$ bis $x = (h2^{k-\lambda}+\frac{1}{2})\pi$.

Die merkwürdigsten speciellen Fälle dieser Reihen sind nun folgende.

Wenn $\lambda = k$, und wenn $\frac{2\mu+1}{2^{k+1}} = \alpha$ gesetzt wird, so erhält man, nach einigen leichten Reductionen:

37. $$(\pm\cos x)^n = \frac{\Pi(n)}{2^n\cos 2h\alpha\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\cos(2\alpha+2m)x}{\Pi\left(\frac{n}{2}+\alpha+m\right)\Pi\left(\frac{n}{2}-\alpha-m\right)};$$

38. $$(\pm\cos x)^n = \frac{\Pi(n)}{2^n\sin 2h\alpha\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\sin(2\alpha+2m)x}{\Pi\left(\frac{n}{2}+\alpha+m\right)\Pi\left(\frac{n}{2}-\alpha-m\right)};$$

in den Grenzen $x = (h-\frac{1}{2})\pi$ bis $x = (h+\frac{1}{2})\pi$;

39. $$(\pm\sin x)^n = \frac{\Pi(n)}{2^n\cos(2h+1)\alpha\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\cos m\pi\cos(2\alpha+2m)x}{\Pi\left(\frac{n}{2}+\alpha+m\right)\Pi\left(\frac{n}{2}-\alpha-m\right)};$$

40. $$(\pm\sin x)^n = \frac{\Pi(n)}{2^n\sin(2h+1)\alpha\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\cos m\pi\sin(2\alpha+2m)x}{\Pi\left(\frac{n}{2}+\alpha+m\right)\Pi\left(\frac{n}{2}-\alpha-m\right)};$$

in den Grenzen $x = h\pi$ bis $x = (h+1)\pi$.

Es ist leicht, zu zeigen, dafs in diesen Formeln die Gröfse α vollkommen beliebig ist. Dieselbe müfste nämlich eigentlich von der Form $\frac{2\mu+1}{2^{k+1}}$ sein, wo μ und k ganze Zahlen sind; da jedoch weder k noch μ

in diesen Formeln mehr vorkommt, so kann man beide unendlich grofs annehmen, so dafs $\alpha = \frac{\infty}{\infty}$ wird, welches jeden beliebigen Werth haben kann. Oder man kann dadurch, dafs man dem μ und k sehr grofse Werthe giebt, allemal eine Zahl finden, welche sich von einer gegebenen, wenn auch irrationalen Zahl α, um so wenig unterscheidet, als man will. Diese Reihen haben auch die Eigenschaft, dafs sich die Transcendente Π als gemeinschaftlicher Factor aller Glieder herausheben läfst; so kann z. B. die Reihe (37.) auf folgende Weise geschrieben werden:

41. $$(\pm\cos x)^n$$
$$= P.\left\{\begin{array}{l}\cos 2\alpha x + \frac{n-2\alpha}{n+2\alpha+2}\cos(2\alpha+2)x + \frac{(n-2\alpha)(n-2\alpha-2)}{(n+2\alpha+2)(n+2\alpha+4)}\cos(2\alpha+4)x + \ldots. \\ + \frac{n+2\alpha}{n-2\alpha+2}\cos(2\alpha-2)x + \frac{(n+2\alpha)(n+2\alpha+2)}{(n-2\alpha+2)(n-2\alpha+4)}\cos(2\alpha-4)x + \ldots.\end{array}\right\},$$

wo der Kürze wegen gesetzt ist:

$$P = \frac{\Pi(n)}{2^n \cos 2h\alpha\pi\, \Pi\left(\frac{n}{2}+\alpha\right)\Pi\left(\frac{n}{2}-\alpha\right)}.$$

Diese Reihen umfassen nun wieder besonders zwei wesentlich von einander verschiedene Arten, nämlich erstens die bekannten, schon von Euler gefundenen Reihen, deren Grenzen aber erst in neuerer Zeit berichtigt worden sind. Für $\alpha = \frac{n}{2}$ hebt sich nämlich die Transcendente Π ganz hinweg und man erhält:

42. $$(\pm\cos x)^n = \frac{1}{2^n \cos hn\pi}\left\{\cos nx + \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x + \ldots.\right\},$$

43. $$(\pm\cos x)^n = \frac{1}{2^n \sin hn\pi}\left\{\sin nx + \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x + \ldots.\right\},$$

in den Grenzen $x = (h - \frac{1}{2})\pi$ bis $x = (h + \frac{1}{2})\pi$;

44. $$(\pm\sin x)^n = \frac{1}{2^n \cos\frac{(2h+1)n\pi}{2}}\left\{\cos nx - \frac{n}{1}\cos(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)x - \ldots.\right\},$$

45. $$(\pm\sin x)^n = \frac{1}{2^n \sin\frac{(2h+1)n\pi}{2}}\left\{\sin nx - \frac{n}{1}\sin(n-2)x + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)x - \ldots.\right\},$$

in den Grenzen $x = h\pi$ bis $x = (h+1)\pi$.

Die andere Art einfacher Entwickelungen wird aus den Formeln (37.) bis (40.) hergeleitet, indem in (37.) und (39.) gesetzt wird $\alpha = 0$, und in (37.) und (40.) $\alpha = \frac{1}{2}$. Für diese Werthe ist:

46. $$(\pm\cos x)^n = \frac{\Pi(n)}{2^n\left(\Pi\frac{n}{2}\right)^2}\left\{1+\frac{2n}{n+2}\cos 2x+\frac{2n(n-2)}{(n+2)(n+4)}\cos 4x+\ldots.\right\},$$

47. $$(\pm\sin x)^n = \frac{\Pi(n)}{2^n\left(\Pi\frac{n}{2}\right)^2}\left\{1-\frac{2n}{n+2}\cos 2x+\frac{2n(n-2)}{(n+2)(n+4)}\cos 4x-\ldots.\right\},$$

48. $$(\pm\cos x)^n = \frac{\cos h\pi\,\Pi(n+1)}{2^n\left(\Pi\frac{n+1}{2}\right)^2}\left\{\cos x+\frac{n-1}{n+3}\cos 3x+\frac{(n-1)(n-3)}{(n+3)(n+5)}\cos 5x+\ldots.\right\},$$

49. $$(\pm\sin x)^n = \frac{\cos h\pi\,\Pi(n+1)}{2^n\left(\Pi\frac{n+1}{2}\right)^2}\left\{\sin x-\frac{n-1}{n+3}\sin 3x+\frac{(n-1)(n-3)}{(n+3)(n+5)}\sin 5x-\ldots.\right\}.$$

Dies sind die obigen Reihen (5.), (6.), (7.) und (8.), deren Coefficienten also auf diese Weise bestimmt sind. Zuerst ist auf die Reihe (46.) Crelle gekommen (man sehe dessen „Theorie der analytischen Facultäten, pag. 366") durch Addition der Quadrate (42.) und (43.); die Coefficienten gingen so in Form unendlicher Reihen hervor. Nachher hat Poisson beide Reihen aus einer Differenzial-Gleichung hergeleitet, jedoch die transcendenten Factoren nur durch bestimmte Integrale ausgedrückt. (Man sehe Ferussac *Bulletin etc.* Tom. IV. pag. 344 etc.)

Als Beispiele sehr einfacher Reihen, welche wieder in diesen enthalten sind, nehme man $n=0, 1, 2, 3$ in den Reihen (46.) und (48.).

50. $$\pm\frac{\pi}{4} = \cos x-\frac{1}{3}\cos 3x+\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{1}{7}\cos 7x+\ldots.$$

51. $$\cos x = \pm\frac{4}{\pi}\left\{\frac{1}{2}+\frac{\cos 2x}{1.3}-\frac{\cos 4x}{3.5}+\frac{\cos 6x}{5.7}-\frac{\cos 8x}{7.9}+\ldots.\right\},$$

52. $$\cos x^2 = \pm\frac{8}{\pi}\left\{\frac{\cos x}{1.1.3}+\frac{\cos 3x}{1.3.5}-\frac{\cos 5x}{3.5.7}+\frac{\cos 7x}{5.7.9}+\ldots.\right\},$$

53. $$\cos x^3 = \pm\frac{12}{\pi}\left\{\frac{1}{3.1.1.3}+\frac{2\cos 2x}{1.1.3.5}+\frac{2\cos 4x}{1.3.5.7}-\frac{2\cos 6x}{3.5.7.9}+\ldots.\right\},$$

Die beiden ersten von diesen finden sich in der *Theorie de la chaleur* von Fourier, wo sie auf eine höchst merkwürdige Weise hergeleitet sind.

Wenn in den Formeln (47.) bis (50.) n eine ganze Zahl ist, so verschwindet allemal die Transcendente Π. So erhält man z. B. für $n=1$ Entwickelungen der einfachen Sinus und Cosinus, welche nach Sinus und Cosinus der vielfachen Bogen geordnet sind. Ich will von diesen nur eine herschreiben, nämlich:

54. $$\cos x = \frac{-2\cos h\pi\,.\cos\alpha\pi}{\cos 2h\alpha\pi}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m\frac{\cos m\pi\cos(2\alpha+2m)x}{(2\alpha+2m+1)(2\alpha+2m-1)},$$

in den Grenzen $x=(h-\frac{1}{2})\pi$ bis $x=(h+\frac{1}{2})\pi$.

Dies giebt wieder, z. B. für $\alpha = \frac{1}{4}$, folgende Reihe:

$$55.\quad \cos x = \frac{8\cos h\pi \cos\frac{\pi}{2}}{\pi\cos\frac{h\pi}{2}}\left\{\frac{\cos\frac{x}{2}}{1.2}+\frac{\cos\frac{3x}{2}}{1.5}+\frac{\cos\frac{5x}{2}}{3.7}-\frac{\cos\frac{7x}{2}}{5.9}-\ldots\right\}.$$

Es ist leicht, aus den aufgestellten allgemeinen Formeln eine unendliche Menge ähnlicher einfacher Reihen zu ziehen, welches jetzt nicht in unserem Zwecke liegt. Dafs übrigens alle diese Reihen, welche in den allgemeinen Formeln enthalten sind, für jedes positive n convergiren, erhellt aus den zwei Aufsätzen in diesem Journal, welche Dirichlet und Dirksen über die Convergenz der trigonometrischen Reihen geliefert haben.

Sorau, im August 1832.

13.

Über die Integration der Differentialgleichungen von der Form

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr + \text{etc.}$$

(Von Herrn *Joseph L. Raabe*, Prof. der Math. zu Zürich.)

Einleitung.

Obwohl wir bereits ein allgemeines Verfahren besitzen, Differenzialgleichungen von obiger Form zu integriren, so bleibt es dennoch interessant, zu sehen, wie man, von einem ganz andern Gesichtspuncte ausgehend, auf dieselben Resultate geführt wird, die Pfaff in der berühmten Abhandlung, welche die Denkschriften der Berliner Akademie für die Jahre 1814 und 1815 enthalten, hinterlassen hat.

Pfaff's Methode beruht darauf, dafs die vorgelegte Differenzialgleichung, falls sie eine gerade Anzahl von Veränderlichen enthält, durch Einführung neuer Veränderlicher in eine Differenzialgleichung von derselben Form, welche eine Veränderliche weniger enthält, transformirt wird, und wenn die Anzahl der Veränderlichen ungerade ist, und wir einstweilen eine derselben als constant betrachten, der vorhergehende Fall wiederum herbeigeführt wird; auf welche Art die vorgelegte Gleichung denn, sie mag noch so viele Veränderlichen enthalten, endlich auf eine Gleichung, worin blofs zwei veränderliche Gröfsen vorkommen, sich reduzirt. Wird nun diese letzte Gleichung integrirt, und restituirt man successive die alten Variablen, und läfst die zuvor als constant betrachteten Gröfsen wiederum variabel sein, so gelangt man endlich zu einem, eine willkürliche Function mit sich führenden Systeme von n oder $n+1$ Integralgleichungen, je nachdem die Anzahl der Veränderlichen in der vorgelegten Differenzialgleichung $2n$ oder $2n+1$ war.

Allein diese Methode läfst, wenn ich nicht irre, noch die Frage unbeantwortet: „ob man auf diesem Wege auch die möglich kleinste Anzahl von Integralgleichungen, oder was dasselbe ist, die allgemeinste Auflösung der vorgelegten Differenzialgleichung erhält," indem Pfaff's

Verfahren, wie es bei der von Monge vorgeschlagenen Methode wirklich der Fall war, keineswegs das Vorhandensein dieser allgemeinsten Auflösung zu rechtfertigen scheint.

Um über diesen Punct Aufschluſs zu erhalten, habe ich mir hier die Aufgabe vorgelegt, die Bedingungen auszumitteln, unter welchen eine Differenzialgleichung von obiger Form ein einziges Integral, oder ein System von zwei, drei, etc. Integralgleichungen zuläſst.

Der zur Auflösung dieser Aufgabe von mir betretene Weg zeigt nicht nur, daſs Pfaff's Methode, so lange die Coefficienten H, K, L, M, N, etc. von einander unabhängig sind, die allgemeinste Auflösung darbietet; sondern sie setzt mich auch im Stande, wenn diese Coefficienten gewisse Relationen eingehen, dann noch die allgemeinste Auflösung anzugeben, die nunmehr in einem Systeme von weniger Integralgleichungen, als im vorgehendem Falle, besteht.

Um nicht unnöthigerweise diese Abhandlung in die Länge zu ziehen, wollen wir bloſs lineare Differenzialgleichungen von drei bis sechs Variablen betrachten, aus welchen wenigen Fällen die Anwendbarkeit unserer Methode auf eine beliebige Anzahl von Variablen zur Genüge ersichtlich werden wird.

I.

Über die lineare Differenzialgleichung dreier Variablen.

§. 1.

Man habe die Differenzialgleichung

$$1. \quad dz = Hdx + Hdy,$$

wo H und K bekannte Functionen von x, y, z, sind.

Soll nun diese Differenzialgleichung ein Integral zulassen, so muſs es von der Art sein, daſs, wenn aus demselben eine der Veränderlichen, z. B. z, als Function von x und y ausgedrückt wird, das Differenzial dieser Gleichungen mit der vorgelegten übereinstimmt. Wenn also das Differenzial dieses Integrals folgende Form hat:

$$2. \quad dz = Adx + Bdy,$$

wo A und B Functionen von x und y sind, die der Gleichung

$$3. \quad \frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}$$

Genüge thun, so müssen folgende zwei Gleichungen als identische bestehen

$$4. \qquad A = H, \qquad B = K,$$

wenn in den Theilen rechterhand der Gleichheitszeichen statt z sein Werth aus dem vorausgesetzten Integral substituirt gedacht wird.

Stellt man nun die Differenziale von H und K durch folgende Gleichungen dar:

$$dH = H_1\,dx + H_2\,dy + H_3\,dz,$$
$$dK = K_1\,dx + K_2\,dy + K_3\,dz,$$

wo der Kürze wegen H_1, H_2, H_3, K_1, K_2, K_3 statt $\frac{dH}{dx}$, $\frac{dH}{dy}$, $\frac{dH}{dz}$, $\frac{dK}{dx}$, $\frac{dK}{dy}$, $\frac{dK}{dz}$ gesetzt worden ist, so hat man, wenn in diese Gleichungen der Werth von dz aus (2.) substituirt wird, folgende Gleichungen:

$$dH = (H_1 + AH_3)\,dx + (H_2 + BH_3)\,dy,$$
$$dK = (K_1 + AK_3)\,dx + (K_2 + BK_3)\,dy,$$

und wegen der Gleichungen (3.) und (4.) erhält man folgende Gleichung:

$$H_2 + BH_3 = K_1 + AK_3,$$

oder, wenn für A und B ihre Werthe aus (4.) gesetzt werden,

$$5. \qquad KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1 = 0;$$

woraus also erhellet, dafs die vorgelegte lineare Differenzialgleichung (1.) nicht immer eines einzigen Integrals fähig ist, sondern dafs das Statthaben desselben vorläufig an die Erfüllung der letzten Bedingungsgleichung gebunden ist. Ob aber, umgekehrt, wenn die letzte Bedingungsgleichung Statt hat, die vorgelegte Differenzialgleichung (1.) nothwendig ein einziges Integral zulasse, wollen wir im folgenden Paragraph sehen.

§. 2.

Man betrachte in (1.) einstweilen eine der Variablen, z. B. y, als Constante, so bleibt eine gewöhnliche Differenzialgleichung mit den zwei Variablen z und x zurück, welche integrirt eine Gleichung von folgender Form geben wird:

$$6. \qquad z = \varphi(x, y, a),$$

wo das innerhalb der Klammern befindliche y von dem in dem Coefficienten H vorkommenden y herrührt und a die Constante der Integration vorstellt, die, so lange man in (1.) y als constant behandelt, jede willkürliche Function von y vorstellen kann. Soll hingegen die letzte Gleichung das Integral von (1.) auch für den Fall, dafs y eine Variable ist, vorstellen: so mufs sich a blofs als Function von y bestimmen las-

sen, d. h. es mufs dann nachgewiesen werden, dafs a von x unabhängig ist.

Zu diesem Behufe differenziiren wir die letzte Gleichung nach allen Gröfsen, die sie enthält. Dieses giebt

$$dz = \varphi'(x)\,dx + \varphi'(y)\,dy + \varphi'(a)\,da,$$

wo der Kürze wegen $\varphi'(x)$, $\varphi'(y')$, $\varphi'(a)$ statt $\frac{d.\varphi(x,y,a)}{dx}$, $\frac{d.\varphi(x,y,a)}{dy}$, $\frac{d.\varphi(x,y,a)}{da}$ gesetzt worden ist.

Wenn daher die Gleichung (6.) das Integral von (1.), auch unter der Annahme, dafs y variabel sei, sein soll, so müssen folgende Gleichungen Statt haben:

$$7. \quad H = \varphi'(x), \quad K\,dy = \varphi'(y)\,dy + \varphi'(a)\,da,$$

wenn in H und K statt der in derselben vorkommenden Gröfse z ihr Werth aus (6.) gesetzt wird.

Die zweite der letzten Gleichungen giebt:

$$8. \quad da = \frac{K - \varphi'(y)}{\varphi'(a)}\,dy.$$

Wenn daher, wie es hier erforderlich ist, a blofs eine Function von y sein soll, so darf der Coefficient von dy in der letzten Gleichung kein x enthalten, d. h. es mufs dann folgende Gleichung bestehen:

$$9. \quad \frac{d.\frac{K - \varphi'(y)}{\varphi'(a)}}{dx} = 0.$$

Entwickelt man nun den Theil dieser Gleichung linkerhand, so hat man

$$\frac{d.\frac{K - \varphi'(y)}{\varphi'(a)}}{dx} = \frac{\varphi'(a)\left[\frac{dK}{dx} - \varphi''(y,x)\right] - [K - \varphi'(y)]\,\varphi''(a,x)}{\varphi'(a)^2},$$

wo $\varphi''(y,x)$, $\varphi''(a,x)$ statt $\frac{d^2\varphi(x,y,a)}{dy\,dx}$, $\frac{d^2\varphi(x,y,a)}{da\,dx}$ gesetzt worden ist. Nun ist

$$\frac{dK}{dx} = K_1 + K_3\,\varphi'(x);$$

also geht die vorhergehende Gleichung in folgende über:

$$\frac{d.\frac{K - \varphi'(y)}{\varphi'(a)}}{dx} = \frac{\varphi'(a)[K_1 + K_3\,\varphi'(x) - \varphi''(y,x)] - [K - \varphi'(y)]\,\varphi''(a,x)}{\varphi'(a)^2}.$$

Ferner giebt die erste der Gleichungen (7.), wenn sie einmal nach y und das andere Mal nach a differenziirt wird, folgende Gleichungen:

$$\varphi''(x, y) = H_2 + H_3 \varphi'(y),$$
$$\varphi''(x, a) = H_3 \varphi'(a);$$

also geht die vorhergehende Gleichung, wenn statt $\varphi'(a)$ sein Werth aus der ersten der Gleichungen (7.) und statt $\varphi''(x, y)$, $\varphi''(x, a)$ ihre Werthe aus den letzten Gleichungen gesetzt werden, in folgende über:

$$10. \quad \frac{d.\frac{K - \varphi'(y)}{\varphi'(a)}}{dx} = -\frac{KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1}{\varphi'(a)};$$

woraus erhellet, dafs beim Statthaben der Bedingungsgleichung (5.) die Gleichung (9.) bestehe; daher sich denn a, mit Hülfe der Gleichung (8.), als Function von y und einer neuen willkürlichen Constante bestimmen läfst. Substituirt man nun den sich so ergebenden Werth von a in die Gleichung (6.), so hat man das Integral der vorgelegten Gleichung (1.).

§. 3.

Findet hingegen die Bedingungsgleichung (5.) nicht Statt, so zeigt die Gleichung (10.), dafs a sowohl von y als von x abhangen wird; daher an ein einziges Integral für (1.) nicht zu denken ist.

Setzt man, um in diesem Falle eine Auflösung zu haben,

$$a = \psi(y),$$

wo $\psi(y)$ jede willkürliche Function von y vorstellt, so gehen die Gleichungen (6.) und (8.) in folgende über:

$$z = \varphi(x, y, \psi(y)),$$
$$K = \varphi'(y) + \varphi'(\psi(y))\psi'(y),$$

welche zwei Gleichungen die Integrale von (1.) vorstellen.

II.

Über die lineare Differenzialgleichung mit vier variablen Gröfsen.

§. 4.

Man habe die Differenzialgleichung

$$11. \quad dz = H\,dx + K\,dy + L\,dp,$$

wo H, K, L bekannte Functionen von x, y, z, p sind.

Kann man dieser Differenzialgleichung durch ein einziges Integral Genüge thun, so müssen, wenn aus demselben eine der Variablen, z. B. z, als Function von x, y, p ausgedrückt gedacht wird, und das Differenzial von z, welches durch folgende Gleichung gegeben sein mag,

$$12. \quad dz = A\,dx + B\,dy + C\,dp$$

ausgemittelt wird, folgende Gleichungen identisch bestehen:

$$13. \quad A = H, \quad B = K, \quad C = L,$$

wenn nemlich in den Theilen rechterhand der Gleichheitszeichen statt z sein Werth aus dem vorausgesetzten Integrale substituirt gedacht wird. Nun sei

$$14. \quad \begin{cases} dH = H_1\,dx + H_2\,dy + H_3\,dz + H_4\,dp, \\ dK = K_1\,dx + K_2\,dy + K_3\,dz + K_4\,dp, \\ dL = L_1\,dx + L_2\,dy + L_3\,dz + L_4\,dp; \end{cases}$$

so hat man, wenn statt dz sein Werth aus (12.) substituirt wird:

$$\begin{aligned} dH &= (H_1 + AH_3)\,dx + (H_2 + BH_3)\,dy + (H_4 + CH_3)\,dp, \\ dK &= (K_1 + AK_3)\,dx + (K_2 + BK_3)\,dy + (K_4 + CK_3)\,dp, \\ dL &= (L_1 + AL_3)\,dx + (L_2 + BL_3)\,dy + (L_4 + CL_3)\,dp. \end{aligned}$$

Ferner ist der Theil rechterhand des Gleichheitszeichens in (12.) ein vollständiges Differenzial; daher hat man

$$\frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}, \quad \frac{dA}{dp} = \frac{dC}{dx}, \quad \frac{dB}{dp} = \frac{dC}{dy},$$

so dafs sich also vermöge der vorhergehenden Gleichungen und der Gleichungen (13.) folgende Relationen zwischen den Coefficienten H, K, L ergeben:

$$15. \quad \begin{cases} KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1 = 0, \\ LH_3 - HL_3 + H_4 - L_1 = 0, \\ LK_3 - KL_3 + K_4 - L_2 = 0, \end{cases}$$

woraus erhellet, dafs die Existenz eines Integrals für die Differenzialgleichung (11.) an die Erfüllung der letzten drei Bedingungsgleichungen gebunden ist.

§. 5.

Finden die Bedingungsgleichungen (15.) Statt, so bleibt noch zu zeigen übrig, dafs dann nothwendig ein einziges Integral für (11.) existirt.

Zu diesem Ende betrachte man in (11.) die Variable p einstweilen als Constante, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$dz = H\,dx + K\,dy.$$

Berücksichtigt man nun die erste der drei Bedingungsgleichungen (15.) und das, was in §. 2. erwiesen wurde: so kann man der letzten Differenzialgleichung durch ein einziges Integral Genüge thun. Dieses Integral denken wir uns durch folgende Gleichung dargestellt:

$$16. \quad z = \varphi(x, y, p, a),$$

wo p von den Coefficienten H und K herrührt, und a die Constante der Integration bedeutet, welche jede willkürliche Function von p vorstellen kann.

Soll nun dieselbe Gleichung (16.) der Differenzialgleichung (11.), wo p als Variable bleibt, ebenfalls Genüge thun, so mufs das Differenzial derselben, mit (11.) verglichen, folgende Gleichungen erzeugen:

$$17. \qquad H = \varphi'(x), \qquad K = \varphi'(y), \qquad L\,dp = \varphi'(p)\,dp + \varphi'(a)\,da.$$

Die letzte dieser Gleichungen, der man auch folgende Form geben kann:

$$18. \qquad da = \frac{L - \varphi'(p)}{\varphi'(a)}\,dp,$$

darf, nachdem für z der Werth aus (16.) gesetzt worden ist, weder x noch y enthalten; also müssen folgende zwei Gleichungen:

$$19. \qquad \frac{d.\frac{L-\varphi'(p)}{\varphi'(a)}}{dx} = 0, \qquad \frac{d.\frac{L-\varphi'(p)}{\varphi'(a)}}{dx} = 0,$$

identisch Statt haben können, damit aus der Gleichung (18.) a als Function von p bestimmt werden könne. Nun ist:

$$\frac{d.\frac{L-\varphi'(p)}{\varphi'(a)}}{dx} = \frac{\varphi'(a)[L_1 + L_3\,\varphi'(x) - \varphi''(p,x)] - \mu''(a,x)[L - \varphi'(p)]}{\varphi'(a)^2},$$

$$\frac{d.\frac{L-\varphi'(p)}{\varphi'(a)}}{dy} = \frac{\varphi'(a)[L_2 + L_3\,\varphi'(y) - \varphi''(p,y)] - \varphi''(a,y)[A - \varphi'(p)]}{\varphi'(a)^2},$$

und die beiden ersten der Gleichungen (17.) geben, nachdem statt z sein Werth aus (16.) gesetzt worden ist, folgende Gleichungen:

$$\varphi''(p,x) = H_4 + H_3\,\varphi'(p),$$
$$\varphi''(p,y) = K_4 + K_3\,\varphi'(p),$$
$$\varphi''(a,x) = H_3\,\varphi'(a),$$
$$\varphi''(a,y) = K_3\,\varphi'(a).$$

Wenn daher in die vorhergehenden Gleichungen für $\varphi''(p,x)$, $\varphi''(p,y)$, $\varphi''(a,x)$, $\varphi''(a,y)$ ihre Werthe aus den letzten Gleichungen, und für $\varphi'(x)$, $\varphi'(y)$ ihre Werthe aus (16.) substituirt werden, so reduciren sie sich auf folgende:

$$\frac{d.\frac{L-\varphi'(p)}{\varphi'(a)}}{dx} = -\frac{LH_3 - HL_3 + H_4 - L_1}{\varphi'(a)},$$

$$\frac{d.\frac{L-\varphi'(p)}{\varphi'(a)}}{dy} = -\frac{LK_3 - KL_3 + K_4 - L_2}{\varphi'(a)},$$

welche also, vermöge der beiden letzten Bedingungsgleichungen (15.), die Realität der Gleichungen (19.) bewähren; daher kann man im gegenwär-

tigen Falle aus (18.) a als Function von p und einer neuen willkürlichen Constante bestimmen, welcher Werth in (16.) gesetzt das allgemeinste Integral von (11.) darbieten wird.

§. 6.

Findet hingegen von den Bedingungsgleichungen (15.) nur eine einzige, z. B. die erste derselben, Statt; so läfst sich nicht mit Hülfe der Gleichung (18.) a als Function von p bestimmen und die vorgelegte Differenzialgleichung (11.) ist dann keines einzigen Integrals fähig, sondern es existirt ein System zweier Integrale, die auf folgende Art gefunden werden.

Man setze

$$a = \psi(p),$$

wo $\psi(p)$ eine willkürliche Function von p bedeutet. Setzt man diesen Werth von a in die Gleichungen (15.) und (18.), so erhält man

$$z = \varphi(x, y, p, \psi(p)),$$
$$L = \varphi'(p) + \varphi'(\psi(p))\psi'(p),$$

welche zwei Gleichungen die Integrale von (11.) vorstellen.

§. 7.

Findet endlich keine der Bedingungsgleichungen (15.) Statt, so ist um so weniger für die Differenzialgleichung (11.) an ein einziges Integral zu denken, und wir werden unmittelbar auf die Betrachtung geleitet, zu untersuchen, unter welchen Umständen sie ein System zweier Integrale zulasse.

Zu diesem Behufe nehmen wir an: es existiren solche zwei Integrale, und wenn aus denselben zwei der Variablen, z. B. z und p, als Functionen von x, y ausgedrückt gedacht werden, so erzeugen die Differenziale derselben folgende zwei Gleichungen:

$$20. \quad \begin{cases} dz = A\,dx + B\,dy, \\ dp = A'\,dx + B'\,dy, \end{cases}$$

wo A, B, A', B' Functionen von x und y sind, die an folgende Bedingungsgleichungen gebunden sind:

$$21. \quad \frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}, \qquad \frac{dA'}{dy} = \frac{dB'}{dx}.$$

Substituirt man nun die oben aufgestellten Werthe für dz, dp, in die vorgelegte Differenzialgleichung (11.), so geht sie in folgende über:

$$(A - H - A'L)dx + (B - K - B'L)dy = 0.$$

Da nun diese Gleichung, nachdem statt z und p ihre Werthe aus den bei-

den vorausgesetzten Integralen substituirt gedacht worden, eine identische sein mufs, oder, was auf dasselbe hinaus läuft: da diese Gleichung für jede Abhängigkeit zwischen y und x bestehen soll, so mufs sie in folgende zwei zerfallen:

$$22. \quad \begin{cases} A = H + A'L, \\ B = K + B'L. \end{cases}$$

Ferner setze man in die Gleichungen (14.) statt dz, dp ihre Werthe aus (20.), so hat man:

$$dH = (H_1 + AH_3 + A'H_4)dx + (H_2 + BH_3 + B'H_4)dy,$$
$$dK = (K_1 + AK_3 + A'K_4)dx + (K_2 + BK_3 + B'K_4)dy,$$
$$dL = (L_1 + AL_3 + A'L_4)dx + (L_2 + BL_3 + B'L_4)dy.$$

Führt man nun folgende abgekürzte Bezeichnungen ein:

$$23. \quad \begin{cases} KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1 = (2,1), \\ LH_3 - HL_3 + H_4 - L_1 = (3,1), \\ LK_3 - KL_3 + K_4 - L_2 = (3,2), \end{cases}$$

so erhält man, wenn die erste der Gleichungen (22.) nach y und die zweite nach x differenziirt wird und die so erhaltenen Gleichungen von einander subtrahirt werden, mit Berücksichtigung der Gleichungen (21.), (22.), folgende Gleichung:

$$24. \quad (2,1) + (3,1)B' - (3,2)A' = 0.$$

Da, wie eine einfache Überlegung zeigt, keine neue Gleichung aufser der letzten und den Gleichungen (22.), die die Unbekannten A, B, A', B' enthielten, erhalten werden kann, und aus diesen Gleichungen selbst keine, blofs die Coefficienten H, K, L enthaltende, Gleichung zu erhalten möglich ist: so wäre schon dieser Umstand hinreichend, uns zu dem Schlusse zu berechtigen, dafs die Differenzialgleichung (11.) immer durch ein System zweier Gleichungen integrirbar sei; allein wir sind auch, wenn wir auf dem bereits betretenen Wege fortfahren, zu zeigen im Stande, wie man zum besagten Systeme der beiden Gleichungen gelangen könne.

§. 8.

Sucht man nemlich aus den drei Gleichungen (22.) und (24.) die Werthe von was immer für drei der Gröfsen A, B, A', B', z. B. die der drei erstern, so hat man:

$$A = \frac{(3,2)H + (2,1)L}{(3,2)} + \frac{(3,1)L}{(3,2)} \cdot B',$$
$$B = K + LB',$$
$$A' = \frac{(2,1)}{(3,2)} + \frac{(3,1)}{(3,2)} \cdot B'.$$

Wenn diese Werthe von A, B, A' in die Gleichungen (20.) gesetzt werden, so gehen sie in folgende über:

$$25. \quad \begin{cases} dz = H\,dx + K\,dy + L\,dp, \\ dp = \frac{(3,1)}{(3,2)}\,dx + \left(dy + \frac{(3,1)}{(3,2)}\,dx\right) B', \end{cases}$$

und wenn man berücksichtigt, dafs B' völlig willkürlich ist, so zerfällt die letzte Gleichung in folgende zwei Gleichungen:

$$dp = \frac{(2,1)}{(3,2)}\,dx, \qquad dy = -\frac{(3,1)}{(3,2)}\,dx.$$

Werden diese Werthe für dp, dy in die ersten der beiden vorhergehenden Gleichungen gesetzt, so ergeben sich, mit Inbegriff der beiden letzten Gleichungen, folgende drei Gleichungen:

$$26. \quad \begin{cases} dx = \frac{(3,2)}{\Delta}\,dz, \\ dy = -\frac{(3,1)}{\Delta}\,dz, \\ dp = \frac{(2,1)}{\Delta}\,dz, \end{cases}$$

wo der Kürze wegen

$$\Delta = H(3,2) - K(3,1) + L(2,1)$$

gesetzt worden ist.

§. 9.

Stellt man nun die Integrale der drei Differenzialgleichungen (26.) durch

$$27. \quad \begin{cases} x = \varphi_1(z, a, b, c), \\ y = \varphi_2(z, a, b, c), \\ p = \varphi_3(z, a, b, c) \end{cases}$$

vor, wo a, b, c die willkürlichen Constanten der Integrationen sind, so thun dieselben den Gleichungen (25.), mithin auch der vorgelegten Differenzialgleichung (11.) Genüge; allein aus diesen Gleichungen, die nur eine particuläre Auflösung derselben sind, kann man sich zum allgemeinsten Integrale, welches in einem Systeme zweier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, besteht, erheben.

Zu diesem Zwecke differenziiren wir die Gleichungen (27.) nach allen Gröfsen, die sie enthalten. Daraus ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} dx &= \varphi_1'(z)\,dz + \varphi_1'(a)\,da + \varphi_1'(b)\,db + \varphi_1'(c)\,dc, \\ dy &= \varphi_2'(z)\,dz + \varphi_2'(a)\,da + \varphi_2'(b)\,db + \varphi_2'(c)\,dc, \\ dp &= \varphi_3'(z)\,dz + \varphi_3'(a)\,da + \varphi_3'(b)\,db + \varphi_3'(c)\,dc. \end{aligned}$$

Daher, wegen der Gleichungen (26.):

$$28. \quad \begin{cases} \varphi_1'(z) = \frac{(3,2)}{\Delta}, \\ \varphi_2'(z) = -\frac{(3,1)}{\Delta}, \\ \varphi_3'(z) = \frac{(2,1)}{\Delta}, \end{cases}$$

und wenn diese Werthe von dx, dy, dp in (11.) substituirt werden, so geht die Gleichung (11.), wegen

$$29. \quad H\varphi_1'(z) + K\varphi_2'(z) + L\varphi_3'(z) = 1,$$

in folgende über:

$$30. \quad \alpha da + \beta db + \gamma dc = 0,$$

wo der Kürze wegen

$$31. \quad \begin{cases} \alpha = H\varphi_1'(a) + K\varphi_2'(a) + L\varphi_3'(a), \\ \beta = H\varphi_1'(b) + K\varphi_2'(b) + L\varphi_3'(b), \\ \gamma = H\varphi_1'(c) + K\varphi_2'(c) + L\varphi_3'(c) \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Diese Gleichung (30.) hat die merkwürdige Eigenschaft, dafs sie entweder von z gänzlich frei ist, oder irgend eine Function von z, als einen allen ihren Gliedern gemeinschaftlichen Factor, enthält.

Das Dasein dieses Factors sowohl, als die Art, solchen *a priori* auszumitteln, wollen wir im folgenden Paragraphe zeigen.

§. 10.

Stellt nemlich Z irgend eine Function von z vor, und multiplicirt man die Gleichung (30.) mit Z, so hat man

$$Z\alpha da + Z\beta db + Z\gamma dc = 0.$$

Wir wollen nun nachweisen, dafs man Z immer dargestellt bestimmen könne, und dafs die letzte Gleichung von z befreit erscheine, weshalb folgende Gleichungen

$$32. \quad \frac{d.Z\alpha}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\beta}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\gamma}{dz} = 0$$

identisch bestehen können.

Multiplicirt man nemlich die erste der Gleichungen (31.) mit Z, so hat man

$$\begin{aligned} \frac{d.Z\alpha}{dz} = \alpha\frac{dZ}{dz} &+ Z[H\varphi_1''(a,z) + K_2''(a,z) + L\varphi_3''(a,z)] \\ &+ Z\varphi_1'(a)[H_1\varphi_1'(z) + H_2\varphi_2'(z) + H_3 + H_4\varphi_3'(z)] \\ &+ Z\varphi_2'(a)[K_1\varphi_1'(z) + K_2\varphi_2'(z) + K_3 + K_4\varphi_3'(z)] \\ &+ Z\varphi_3'(a)[L_1\varphi_1'(z) + L_2\varphi_2'(z) + L_3 + L_4\varphi_3'(z)]. \end{aligned}$$

Differenziirt man nun die Gleichung (29.) nach a, so hat man

$$\begin{aligned} H\varphi_1''(a,z) + K\varphi_2''(a,z + L\varphi_3''(a,z) = &-\varphi_1'(z)[H_1\varphi_1'(a) + H_2\varphi_2'(a) + H_4\varphi_3'(a)] \\ &-\varphi_2'(z)[K_1\varphi_1'(a) + K_2\varphi_2'(a) + K_4\varphi_3'(a)] \\ &-\varphi_3'(z)[L_1\varphi_1'(a) + L_2\varphi_2'(a) + L_4\varphi_3'(a)]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese letzte Gleichung mit Z und addirt sie zur vorhergehenden, so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{d.Z\alpha}{dz} = \alpha\frac{dZ}{dz} &+ Z\varphi_1'(a)[H_3 + (H_2 - K_1)\varphi_2'(z) + (H_4 - L_1)\varphi_3'(z)] \\ &+ Z\varphi_2'(a)[K_3 + (H_2 - K_2)\varphi_1'(z) + (K_4 - L_2)\varphi_3'(z)] \\ &+ Z\varphi_3'(a)[L_3 + (H_4 - L_1)\varphi_1'(z) + (K_4 - L_2)\varphi_2'(z)]. \end{aligned}$$

Setzt man hier statt $\varphi_1'(z)$, $\varphi_2'(z)$, $\varphi_3'(z)$ ihre Werthe aus (28.), so erhält man

$$H_3 + (H_2 - K_1)\varphi_2'(z) + (H_4 - L_1)\varphi_3'(z) = H_3 - (H_2 - K_1)\frac{(3,1)}{\Delta} + (H_4 - L_1)\frac{(2,1)}{\Delta},$$

und, wenn für Δ dessen Werth gesetzt wird,

$$\begin{aligned} &H_3 + (H_2 - K_1)\varphi_2'(z) + (H_4 - L_1)\varphi_3'(z) \\ &= \frac{HH_3(3,2) - [KH_3 + H_2 - K_1](3,1) + [LH_3 + H_4 - L_1](2,1)}{\Delta}; \end{aligned}$$

daher, wegen der beiden ersten Gleichungen (23.):

$$\begin{aligned} &H_3 + (H_2 - K_1)\varphi_2'(z) + (H_4 - L_1)\varphi_3'(z) \\ &= \frac{HH_3(3,2) - [(2,1) + HK_3](3,1) + [(3,1) + HL_3](2,1)}{\Delta}, \end{aligned}$$

oder

$$H_3 + (H_2 - K_1)\varphi_2'(z) + (H_4 - L_1)\varphi_3'(z) = \frac{H\Delta'}{\Delta},$$

wo der Kürze wegen

$$\Delta' = H_3(3,2) - K_3(3,1) + L_3(2,1)$$

gesetzt worden ist.

Auf gleiche Weise findet man

$$K_3 - (H_2 - K_1)\varphi_1'(z) + (K_4 - L_2)\varphi_3'(z) = \frac{K\Delta'}{\Delta}$$

und

$$L_3 - (H_4 - L_1)\varphi_1'(z) + (K_4 - L_2)\varphi_2'(z) = \frac{L\Delta'}{\Delta}.$$

Wenn daher diese Resultate in die obige Gleichung gesetzt werden, so erhält man

$$\frac{d.Z\alpha}{dz} = \alpha\frac{dZ}{dz} + Z\frac{\Delta'}{\Delta}(H\varphi_1'(a) + K\varphi_2'(a) + L\varphi_3'(a),$$

oder, wegen der ersten der Gleichungen (31.):

$$\frac{d.Z\alpha}{dz} = \alpha\left[\frac{dZ}{dz} + Z\frac{\Delta'}{\Delta}\right].$$

Vertauscht man hier α mit β und γ, so erhält man die Werthe von $\frac{d.Z\beta}{dz}$, $\frac{d.Z\gamma}{dz}$; woraus das Statthaben der Gleichungen (32.) erhellet, wenn man nur Z folgender Gleichung gemäfs bestimmen kann:

$$\frac{dZ}{dz} + Z\frac{\Delta'}{\Delta} = 0.$$

Dieses Letztere hat, wenigstens theoretisch, keine Schwierigkeiten; denn setzt man in dem Ausdrucke $\frac{\Delta'}{\Delta}$ statt x, y, p ihre Werthe aus den Gleichungen (27.), und bezeichnet man dann diese Gröfse durch ζ, so erhält man

$$Z = ge^{-\int \zeta dz},$$

wo g jede willkürliche Function von a, b, c bedeuten kann, und e die Basis der natürlichen Logarithmen ist.

Multiplicirt man nun mit der so eben gefundenen Gröfse Z die Gleichung (30.), so erscheint sie frei von z. Es hat mithin die particuläre Auflösung (27.) der vorgelegten Differenzialgleichung (11.) das Eigenthümliche, dafs sie letztere in eine Differenzialgleichung von derselben Form, die eine Variable weniger als die vorgelegte enthält, transformirt.

§. 11.

Die Gleichung (30.), welche nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors in z blofs die drei Variabeln a, b, c enthält, mufs sich immer durch ein System zweier Gleichungen integriren lassen; denn liefse sie auch ein einziges Integral zu, so erhielte man, wenn in dasselbe statt a, b, c ihre Werthe, die aus (27.) folgen, gesetzt werden, eine Gleichung mit den vier Variabeln x, y, z, p, welche das Integral der vorgelegten (11.) sein müfste; allein diese ist im vorliegenden Falle eines einzigen Integrals nicht fähig; daher es auch die Differenzialgleichung (30.) nicht sein kann. Sucht man daher nach §. 3. die Integrale von (30.) und substituirt dann statt a, b, c ihre Werthe, die aus (27.) folgen, so erhält man die allgemeinste Auflösung der vorgelegten Differenzialgleichung (11.) durch ein, eine willkürliche Function enthaltendes, System zweier Gleichungen dargestellt.

§. 12.

Eine Anwendung der Differenzialgleichung (11.) ist die Integration jeder partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung dreier verän-

derlicher Gröfsen. In der That: ist die partielle Differenzialgleichung erster Ordnung

$$33. \quad \varphi(x, y, z, p, q) = 0$$

vorgelegt worden, wo p und q statt $\frac{dz}{dx}$ und $\frac{dz}{dy}$ gesetzt wird: so mufs das Integral derselben, welches eine Function von x, y, z sein wird, durch Differenziation folgende gewöhnliche Differenzialgleichung geben:

$$34. \quad dz = p\,dx + q\,dy.$$

Drückt man nun aus der vorhergehenden Gleichung eine der Variabeln als Function der übrigen aus, und substituirt den Werth derselben in die letzte Gleichung, so erhält man eine gewöhnliche Differenzialgleichung von der Form (11.), welche nach dem Vorhergehenden durch ein System zweier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, integrirbar ist.

Diese zwei Gleichungen, mit der vorgelegten (33.) vereinigt, geben durch Elimination von p und q eine blofs x, y, z enthaltende Gleichung, die das Integral von (33.) ist.

Um solches durch ein Beispiel zu erläutern, sei folgende partielle Differenzialgleichung gegeben:

$$(a.) \quad pq = z.$$

Substituirt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von q in die Gleichung (34.), so geht sie in folgende über:

$$(b.) \quad dz = p\,dx + \frac{z}{p}\,dy.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen (11.), so hat man

$$H = p, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_4 = 1,$$
$$K = \frac{z}{p}, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \frac{1}{p}, \quad K_4 = -\frac{z}{p^2},$$
$$L = 0, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = 0, \quad L_4 = 0.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung (23.), so erhält man

$$(2,1) = -1, \quad (3,1) = 1, \quad (3,1) = -\frac{z}{p^2},$$

und, wenn diese Werthe in der letzten Gleichung des §. 8. substituirt werden:

$$\Delta = -\frac{2z}{p}.$$

Es gehen daher die Gleichungen (26.) in folgende über:

$$dx = \frac{dz}{2p}, \quad dy = \frac{p\,dz}{2z}, \quad dp = \frac{p\,dz}{2z}.$$

Integrirt man diese drei Differenzialgleichungen, so hat man:

$$(c.)\quad \begin{cases} x = \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)} + c, \\ y = \sqrt{(az)} + b, \\ p = \sqrt{(az)}, \end{cases}$$

wo a, b, c die Constanten der Integrationen bedeuten.

Diese drei Gleichungen sind dieselbe particuläre Auflösung der Gleichung ($b.$), wie es die Gleichungen (27.) für die Gleichung (11.) sind.

Differenziirt man nun diese Gleichungen nach allen Gröfsen, die sie enthalten, und substituirt die erhaltenen Resultate in die Gleichung ($b.$), so erhält man folgende Differenzialgleichung:

$$\sqrt{(az)}\,dc + \sqrt{\left(\frac{z}{a}\right)}\,db = 0.$$

Vernachläfsigt man den gemeinschaftlichen Factor $\sqrt{z}$, so geht diese Gleichung, nachdem sie mit $\sqrt{a}$ multiplicirt worden, in folgende über:

$$a\,dc + db = 0,$$

und diese Gleichung wird durch das System folgender zwei Gleichungen integrirt:

$$ac + b = \varphi(a),$$
$$c = \varphi'(a),$$

wo $\varphi(a)$ eine willkürliche Function von a vorstellt.

Substituirt man hier statt a, b, c ihre Werthe, die aus den Gleichungen ($c.$) folgen, so erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\frac{x}{z}p^2 + y - 2p = \varphi\left(\frac{p^2}{z}\right),$$

$$x - \frac{z}{p} = \varphi'\left(\frac{p^2}{z}\right).$$

Diese zwei Gleichungen stellen entweder das Integral der gewöhnlichen Differenzialgleichung (b) vor, oder, nach Elimination der Gröfse p aus denselben, das Integral der partiellen Differenzialgleichung ($a.$).

III.

Über die lineare Differenzialgleichung mit fünf variabeln Gröfsen.

§. 13.

Es sei folgende Differenzialgleichung gegeben:

$$35.\quad dz = H\,dx + K\,dy + L\,dp + M\,dq,$$

wo H, K, L, M bekannte Functionen von x, y, z, p, q sind: so wollen

wir zuerst die Bedingungsgleichungen aufsuchen, die Statt haben müssen, damit sie durch eine einzige Gleichung integrabel werde.

Denken wir uns, es existire eine solche Gleichung, so mufs sie von der Beschaffenheit sein, dafs, wenn aus derselben eine der Veränderlichen, z. B. z, als Function von x, y, p, q ausgedrückt und differenziirt wird, die vorgelegte Gleichung zum Vorschein kommt. Stellt man nun dieses Differenzial durch folgende Gleichung dar:

$$36. \quad dz = Adx + Bdy + Cdp + Ddq,$$

so müssen folgende Gleichungen als identische bestehen:

$$37. \quad A = H, \quad B = K, \quad C = L, \quad D = M,$$

wenn in den Theilen rechterhand der Gleichheitszeichen, überall wo z steht, dessen Werth aus dem angenommenen Integral substituirt wird.

Nun sei:

$$38. \quad \begin{cases} dH = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz + H_4 dp + H_5 dq, \\ dK = K_1 dx + K_2 dy + K_3 dz + K_4 dp + K_5 dq, \\ dL = L_1 dx + L_2 dy + L_3 dz + L_4 dp + L_5 dq, \\ dM = M_1 dx + M_2 dy + M_3 dz + M_4 dp + M_5 dq: \end{cases}$$

so hat man, wenn statt dz dessen Werth aus (36.) gesetzt wird,

$$\begin{aligned} dH &= (H_1 + AH_3)dx + (H_2 + BH_3)dy + (H_4 + CH_3)dp + (H_5 + DH_3)dq, \\ dK &= (K_1 + AK_3)dx + (K_2 + BK_3)dy + (K_4 + CK_3)dp + (K_5 + DK_3)dq, \\ dL &= (L_1 + AL_3)dx + (L_2 + BL_3)dy + (L_4 + CL_3)dp + (L_5 + DL_3)dq. \\ dM &= (M_1 + AM_3)dx + (M_2 + BM_3)dy + (M_4 + CM_3)dp + (M_5 + DM_3)dq. \end{aligned}$$

Es ist aber der Theil rechterhand des Gleichheitszeichens von (36.) ein vollständiges Differenzial; daher geben die letzten Gleichungen, in Vereinigung mit den Gleichungen (37.), folgende von A, B, C, D befreite Gleichungen:

$$39. \quad \begin{cases} KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1 = 0, \\ LH_3 - HL_3 + H_4 - L_1 = 0, \\ MH_3 - HM_3 + H_5 - M_1 = 0, \\ LK_3 - KH_3 + K_4 - L_2 = 0, \\ MK_3 - KM_3 + K_5 - M_2 = 0, \\ ML_3 - LM_3 + L_5 - M_4 = 0. \end{cases}$$

Finden diese Gleichungen Statt, so läfst sich für die vorgelegte Differenzialgleichung immer ein einziges Integral angeben, welches wir auf folgende Weise bestimmen wollen.

§. 14.

Man betrachte einstweilen eine der Variabeln, z. B. q, als eine Constante: so geht die vorgelegte Gleichung (35.) in folgende über:

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp.$$

Diese Gleichung hat, wegen des Statthabens der ersten, zweiten und vierten der Gleichungen (39.), nach §. 5., ein einziges Integral, welches wir durch

$$40. \quad z = \varphi(x, y, p, q, a)$$

vorstellen wollen, wo q von den Coefficienten H, K, L herrührt, und a die Constante der Integration ausdrückt, welche eine willkürliche Function von q sein kann. Wir wollen nun nachweisen, dafs man beim Statt-finden der noch übrigen drei Bedingungsgleichungen (39.) a dergestalt als Function von q bestimmen kann, dafs dadurch die letzte Gleichung auch das Integral von (35.) wird.

Zu diesem Behufe differenziire man die letzte Gleichung nach allen Gröfsen, die sie enthält, so hat man:

$$dz = \varphi'(x)\,dx + \varphi'(y)\,dy + \varphi'(p)\,dp + \varphi'(q)\,dq + \varphi'(a)\,da.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit (35.), so erhält man folgende Gleichungen:

$$\varphi'(x) = H, \qquad \varphi'(y) = K, \qquad \varphi'(p) = L,$$
$$\varphi'(q)\,dq + \varphi'(a)\,da = M\,dy,$$

und aus der letzten derselben:

$$41. \quad da = \frac{M - \varphi'(q)}{\varphi'(a)}\,dy.$$

Soll nun a als Function von q ausgedrückt werden können, so müssen folgende Gleichungen Statt haben:

$$\frac{d.\frac{M-\varphi'(q)}{\varphi'(a)}}{dx} = 0, \qquad \frac{d.\frac{M-\varphi'(q)}{\varphi'(a)}}{dy} = 0, \qquad \frac{d.\frac{M-\varphi'(q)}{\varphi'(a)}}{dp} = 0,$$

welche, da man auf gleiche Weise, wie in den §§. 2. und 5., auf folgende Gleichungen geführt wird:

$$\frac{d.\frac{M-\varphi'(q)}{\varphi'(a)}}{dx} = -\frac{MH_3 - HM_3 + H_5 - M_1}{\varphi'(a)},$$
$$\frac{d.\frac{M-\varphi'(q)}{\varphi'(a)}}{dy} = -\frac{MK_3 - KM_3 + K_5 - M_2}{\varphi'(a)},$$
$$\frac{d.\frac{M-\varphi'(q)}{\varphi'(a)}}{dp} = -\frac{ML_3 - LM_3 + L_5 - M_4}{\varphi'(a)},$$

unter den oben ausgesprochenen Bedingungen in der That realisirt werden. Bestimmt man also durch Integration der Gleichung (41.) a als Function von q und einer neuen willkürlichen Constante, und substituirt diesen Werth in der Gleichung (40.), so erhält man das gesuchte Integral der vorgelegten Differenzialgleichung (35.).

§. 15.

Finden hingegen blofs je drei der Bedingungsgleichungen (39.) Statt, in welchen einer der Coefficienten H, K, L, M gänzlich fehlt, z. B. die erste, zweite und vierte, die sämmtlich den Coefficienten M nicht enthalten: so gelangt man, wie im vorhergehenden Paragraphe, zu den Gleichungen (40.) und (41.) daselbst; allein, da man nunmehr auf gleiche Art wie daselbst nicht fortfahren kann, so setze man:

$$a = \psi(g),$$

wo $\psi(g)$ eine willkürliche Function von q vorstellt; dann gehen die eben citirten zwei Gleichungen in folgende über:

$$z = \varphi(x, y, p, q, \psi(q)),$$
$$M = \varphi'(q) + \varphi'(\psi(q))\psi'(q),$$

welche dann die Integrale von (35.) sind.

§. 16.

Findet auch dieses nicht Statt, so unterliegt es keinem Zweifel, dafs der Differenzialgleichung (35.) durch ein einziges Integral Genüge zu thun unmöglich ist; allein dann bleibt noch zu entscheiden übrig, unter welchen Umständen derselben durch ein System zweier Integralgleichungen Genüge gethan werden könne.

Um diese Frage, ebenfalls in ihrer Allgemeinheit, zu beantworten, setzen wir voraus, es existiren zwei Gleichungen, die die Variabeln x, y, z, p, q enthalten und der Differenzialgleichung (35.) als Integrale entsprechen. Denkt man sich aus diesen Gleichungen zwei der Variabeln, z. B. z und q, als Functionen von x, y, p, ausgedrückt, und stellt die Differenziale der letztern durch folgende Gleichungen dar:

$$42. \quad \begin{cases} dz = A\,dx + B\,dy + C\,dp, \\ dq = A'\,dx + B'\,dy + C'\,dp, \end{cases}$$

so hat man, durch Substitution dieser Werthe von dz, dq in (35.), folgende Gleichung:

$$(A - H - MA')\,dx + (B - K - MB')\,dy + (C - L - MC')\,dp = 0.$$

Es soll aber nach der Voraussetzung zwischen x, y, p keine Relation be-

stehen; daher müssen folgende Gleichungen

$$43. \quad \begin{cases} A = H + MA', \\ B = K + MB', \\ C = L + MC' \end{cases}$$

identisch Statt haben, wenn in H, K, L, M überall, wo z und q steht, ihre Werthe aus den vorausgesetzten Integralen substituirt gedacht werden.

Ferner hat man, wenn in die Gleichungen (38.) die obigen Werthe von dz, dq gesetzt werden, folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} dH &= (H_1 + AH_3 + A'H_5)\,dx + (H_2 + BH_3 + B'H_5)\,dy + (H_4 + H_3C + H_5C')\,dp, \\ dK &= (K_1 + AK_3 + A'K_5)\,dx + (K_2 + BK_3 + B'K_5)\,dy + (K_4 + K_3C + K_5C')\,dp, \\ dH &= (L_1 + AL_3 + A'L_5)\,dx + (L_2 + BL_3 + B'L_5)\,dy + (L_4 + L_3C + L_5C')\,dp, \\ dM &= (M_1 + AM_3 + A'M_5)\,dx + (M_2 + BM_3 + B'M_5)\,dy + (M_4 + M_3C + M_5C')\,dp. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun, dafs die Gleichungen (42.) vollständige Differenziale sind; ferner die Gleichungen (43.) und die zuletzt aufgestellten: so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$44. \quad \begin{cases} (2,1) - (4,2)A' + (4,1)B' = 0, \\ (3,1) - (4,3)A' + (4,1)C' = 0, \\ (3,2) - (4,3)B' + (4,2)C' = 0, \end{cases}$$

wo folgende Abkürzungen eingeführt worden sind:

$$45. \quad \begin{cases} KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1 = (2,1), \\ LH_3 - HL_3 + H_4 - L_1 = (3,1), \\ MH_3 - HM_3 + H_5 - M_1 = (4,1), \\ LK_3 - KL_3 + K_4 - L_2 = (3,2), \\ MK_3 - KM_3 + K_5 - M_2 = (4,2), \\ ML_3 - LM_3 + L_5 - M_4 = (4,3). \end{cases}$$

Multiplicirt man die erste der Gleichungen (44.) mit $(4,3)$ und die zweite mit $(4,2)$ und subtrahirt die so erhaltenen Gleichungen von einander, so ergiebt sich, wenn die dritte derselben Gleichungen berücksichtigt wird, folgende, blofs von den Coefficienten H, K, L, M abhängige Gleichung:

$$46. \quad (2,1)(4,3) - (3,1)(4,2) + (3,2)(4,1) = 0,$$

woraus ersichtlich wird, dafs die Existenz eines Systems zweier Integrale für die Differenzialgleichung (35.) an die Erfüllung der letzten Bedingungsgleichung gebunden ist. Läfst man irgend einen der im vorhergehenden Paragraphe erwähnten Fälle Statt finden, so geschieht der so eben aufgestellten Bedingungsgleichung Genüge, weshalb auch beim Statthaben eines dieser Fälle das System der beiden Integrale angebbar ist. Wie man

aber zu verfahren habe, wenn blofs die letztere Bedingungsgleichung Statt findet, wollen wir im nächsten Paragraphe zeigen.

§. 17.

Da die Gleichung (46.) eine der Gleichungen (44.) ersetzt, so kann man aus letztern blofs zwei der Gröfsen A', B', C' als Functionen der dritten bestimmen. Drückt man also aus den beiden ersten B' und C' aus, so hat man:

$$B' = -\frac{(2,1)}{(4,1)} + \frac{(4,2)}{(4,1)} A',$$

$$C' = -\frac{(3,1)}{(4,1)} + \frac{(4,3)}{(4,1)} A'.$$

Substituirt man diese Werthe von B', C' in (43.), so hat man:

$$A = H + MA',$$

$$B = K - \frac{(2,1)}{(4,1)} M + \frac{(4,2)}{(4,1)} MA',$$

$$C = L - \frac{(3,1)}{(4,1)} M + \frac{(4,3)}{(4,1)} MA',$$

und wenn diese Werthe von A, B, C, B', C' in (42.) gesetzt werden:

$$dz = Hdx + \left\{K - \frac{(2,1)}{(4,1)} M\right\} dy + \left\{L - \frac{(3,1)}{(4,1)} M\right\} dp$$
$$+ MA' \left\{dx + \frac{(4,2)}{(4,1)} dy + \frac{(4,3)}{(4,1)} dp\right\},$$

$$dq = -\frac{(2,1)}{(4,1)} dy + \frac{(3,1)}{(4,1)} dp$$
$$+ A' \left\{dx + \frac{(4,2)}{(4,1)} dy + \frac{(4,3)}{(4,1)} dp\right\},$$

oder

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq,$$

$$dq = -\frac{(2,1)}{(4,1)} dy - \frac{(3,1)}{(4,1)} dp,$$
$$+ A' \left\{dx + \frac{(4,2)}{(4,1)} dy + \frac{(4,3)}{(4,1)} dp\right\}.$$

Allein A' bleibt völlig unbestimmt; daher gehen die letzten Gleichungen in folgende drei über:

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq,$$

$$dq = -\frac{(2,1)}{(4,1)} dy - \frac{(3,1)}{(4,1)} dp,$$

$$dx = -\frac{(4,2)}{(4,1)} dy - \frac{(4,3)}{(4,1)} dp.$$

Man ersieht hieraus, dafs jede Auflösung die diesen Differenzialgleichungen Genüge thut, es auch der vorgelegten (35.) thun wird; denn die erste dieser Gleichungen ist mit der vorgelegten identisch; allein da wir hier blofs drei Differenzialgleichungen und fünf Variabeln x, y, z, p, q haben, so wollen wir einstweilen eine dieser Variabeln als Constante behandeln und zu Ende in der Rechnung auf diesen Umstand Rücksicht nehmen.

Betrachtet man also einstweilen q als eine Constante, so gehen die letzten drei Differenzialgleichungen, mit Berücksichtigung der Bedingungsgleichung (46.), in folgende über:

$$47. \quad \begin{cases} dx = \frac{(3,2)}{\Delta} dz, \\ dy = -\frac{(3,1)}{\Delta} dz, \\ dp = +\frac{(2,1)}{\Delta} dz, \end{cases}$$

wo

$$\Delta = H(3,2) - K(3,1) + L(2,1)$$

ist. Stellt man nun die Integrale der letzten drei Differenzialgleichungen durch

$$48. \quad \begin{cases} x = \varphi_1(z, q, a, b, c), \\ y = \varphi_2(z, q, a, b, c), \\ p = \varphi_3(z, q, a, b, c) \end{cases}$$

vor, wo q von den Coefficienten H, K, L, herrührt und a, b, c die Constanten der Integrationen vorstellen, so wird, wenn in die vorgelegte Differenzialgleichung (35.) diese Werthe für x, y, p, unter der Voraussetzung, dafs q constant und a, b, c veränderlich sind, substituirt werden, eine lineare Differenzialgleichung zwischen a, b, c zum Vorschein kommen, die wohl q enthalten kann, allein von z gänzlich befreit sein wird, oder höchstens irgend eine Function von z, die wir in §. 10. bestimmt haben, als gemeinschaftlichen Factor enthalten kann. Allein wir sind im Falle des Statthabens der Bedingungsgleichung (46.) nachzuweisen im Stande, dafs, wenn dieselben drei Integralgleichungen in die vorgelegte Differenzialgleichung (35.), auch unter der Voraussetzung, dafs q variabel sei, substituirt werden, dafs dann noch die erhaltene lineare Differenzialgleichung zwischen a, b, c, q von derselben Beschaffenheit rücksichtlich z verbleibt.

§. 18.

Zu diesem Ende differenziire man die Gleichungen (48.) nach allen Gröfsen, die sie enthalten, so hat man:

$$dx = \varphi_1'(z)\,dz + \varphi_1'(q)\,dq + \varphi_1'(a)\,da + \varphi_1'(b)\,db + \varphi_1'(c)\,dc,$$
$$dy = \varphi_2'(z)\,dz + \varphi_2'(q)\,dq + \varphi_2'(a)\,da + \varphi_2'(b)\,db + \varphi_2'(c)\,dc,$$
$$dp = \varphi_3'(z)\,dz + \varphi_3'(q)\,dq + \varphi_3'(a)\,da + \varphi_3'(b)\,db + \varphi_3'(c)\,dc.$$

Substituirt man diese Werthe von dx, dy, dp in die Gleichung (35.), so geht sie, wegen

$$49. \quad \begin{cases} \varphi_1'(z) = \dfrac{(3,2)}{\Delta}, \\ \varphi_2'(z) = -\dfrac{(3,1)}{\Delta}, \\ \varphi_3'(z) = \dfrac{(2,1)}{\Delta}, \end{cases}$$

aus welchen Gleichungen

$$50. \quad H\varphi_1'(z) + K\varphi_2'(z) + L\varphi_3'(z) = 1$$

folgt, in folgende über:

$$\alpha\,da + \beta\,db + \gamma\,dc + \delta\,dq = 0,$$

wo

$$\alpha = H\varphi_1'(a) + K\varphi_2'(a) + L\varphi_3'(a),$$
$$\beta = H\varphi_1'(b) + K\varphi_2'(b) + L\varphi_3'(b),$$
$$\gamma = H\varphi_1'(c) + K\varphi_2'(c) + L\varphi_3'(c),$$
$$\delta = H\varphi_1'(q) + K\varphi_2'(q) + L\varphi_3'(q) + M$$

ist. Giebt es nun eine Function von z, die wir Z nennen wollen, welche macht, dafs die Gleichung

$$51. \quad Z\alpha\,da + Z\beta\,db + Z\gamma\,dc + Z\delta\,dq = 0$$

von z befreit erscheint, so müssen folgende Gleichungen zugleich bestehen können:

$$52. \quad \frac{d.Z\alpha}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\beta}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\gamma}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\delta}{dz} = 0.$$

Die drei ersten dieser Gleichungen können, wie wir in §. 10. gezeigt haben, für jedes Z bestehen, welches der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial Z}{dz} + Z\frac{\Delta'}{\Delta} = 0$$

Genüge thut, wo Δ den im vorhergehenden Paragraph angegebenen Werth hat und

$$\Delta' = H_3(3,2) - K_3(3,1) + L_3(2,1)$$

ist; wir haben daher blofs noch nachzuweisen, dafs auch den vierten obigen Gleichungen durch das nemliche Z Genüge geschieht.

Es ist:

$$\frac{d.Z\delta}{dz} = \delta\frac{dZ}{dz} + Z[H\varphi_1''(q,z) + K\varphi_2''(q,z) + L\varphi_2''(q,z)]$$
$$+ Z\varphi_1'(q)[H_1\varphi_1'(z) + H_2\varphi_2'(z) + H_3 + H_4\varphi_3'(z)]$$
$$+ Z\varphi_2'(q)[K_1\varphi_1'(z) + K_2\varphi_2'(z) + K_3 + K_4\varphi_3'(z)]$$
$$+ Z\varphi_3'(q)[L_1\varphi_1'(z) + L_2\varphi_2'(z) + L_3 + L_4\varphi_3'(z)]$$
$$+ Z[M_1\varphi_1'(z) + M_2\varphi_2'(z) + M_3 + M_4\varphi_3'(z)].$$

Differenziirt man nun die Gleichung (50.) nach q, so hat man:

$$H\varphi_1''(q,z) + K\varphi_2''(q,z) + L\varphi_3''(q,z) = -\varphi_1'(z)[H_1\varphi_1'(q) + H_2\varphi_2'(q) + H_4\varphi_3'(q) + H_5]$$
$$- \varphi_2'(z)[K_1\varphi_1'(q) + K_2\varphi_2'(q) + K_4\varphi_3'(q) + K_5]$$
$$- \varphi_3'(z)[L_1\varphi_1'(q) + L_2\varphi_2'(q) + L_4\varphi_1'(q) + L_5].$$

Multiplicirt man die letzte Gleichung mit Z_1 und addirt sie zur vorhergehenden, so hat man:

$$\frac{d.Z\delta}{dz} = \delta\frac{dZ}{dz} + Z\varphi_1'(q)[H_3 + (H_2 - K_1)\varphi_2'(z) + (H_4 - L_1)\varphi_3'(z)]$$
$$+ Z\varphi_2'(q)[K_3 - (H_2 - K_1)\varphi_1'(z) + (K_4 - L_2)\varphi_3'(z)]$$
$$+ Z\varphi_3'(q)[L_3 - (H_4 - L_1)\varphi_1'(z) - (K_4 - L_2)\varphi_2'(z)]$$
$$+ Z[M_3 - (H_5 - M_1)\varphi_1'(z) - (K_5 - M_2)\varphi_2'(z) - (L_5 - M_4)\varphi_3'(z)].$$

Substituirt man hier für $\varphi_1'(z)$, $\varphi_2'(z)$, $\varphi_3'(z)$ ihre Werthe aus (49.), so hat man, wie in §. 10.:

$$H_3 + (H_2 - K_1)\varphi_2'(z) + (H_4 - L_1)\varphi_3'(z) = H\frac{\Delta'}{\Delta},$$

$$K_3 - (H_2 - K_1)\varphi_1'(z) + (K_4 - L_2)\varphi_3'(z) = K\frac{\Delta'}{\Delta},$$

$$L_3 - (H_4 - L_1)\varphi_1'(z) - (K_4 - L_2)\varphi_3'(z) = L\frac{\Delta'}{\Delta},$$

und der Coefficient von Z in der vierten Zeile der vorhergehenden Gleichung geht, wenn auch für Δ dessen Werth gesetzt wird, in folgenden über:

$$\frac{-(3,2)[-HM_3 + H_5 - M_1] + (3,1)[-KM_3 + K_5 - M_2] - (2,1)[-LM_3 + L_5 - M_4]}{\Delta},$$

oder wenn die Gleichungen (45.) berücksichtigt werden, in folgenden:

$$\frac{-(3\ 2)[(4,1) - MH_3] + (3,1)[(4,2) - MK_3] - (2,1)[(4,3 - ML_3]}{\Delta}.$$

und wenn der Zähler entwickelt und die Bedingungsgleichung (46.) berücksichtigt wird, in folgenden:

$$M\frac{\Delta'}{\Delta}.$$

Substituirt man diese Werthe in den obigen Werth von $\frac{d.Z\delta}{dz}$, so erhält man, wenn der Werth von δ berücksichtigt wird:

$$\frac{d.Z\delta}{dz} = \delta\left[\frac{dZ}{dz} + Z\frac{\Delta'}{\Delta}\right];$$

woraus erhellet, dafs man sämmtlichen Gleichungen (52.) durch ein und dasselbe Z Genüge thun kann; also ist die so reducirte Gleichung (51.) von z befreiet.

§. 19.

Nachdem wir nun gezeigt haben, wie im Falle des Statthabens der Bedingungsgleichung (46.) die vorgelegte Differenzialgleichung (35.), welche 5 Variabeln enthielt, in eine andere (51.), die blofs 4 Variabeln enthält, transformirt werden kann, hat es auch weiter keine Schwierigkeiten, die beiden Integrale von (35.) anzugeben.

Man integrire nemlich die Differenzialgleichung (51.) nach den §§. 7., 8., 9., 10., 11. durch ein System zweier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, und substituire in diese zwei Integrale statt a, b, c ihre Werthe, die aus (48.) folgen: so erhält man die zwei verlangten Integrale. Dafs man der Differenzialgleichung (51.) nicht durch ein einziges Integral genügen wird, läfst sich durch eine ähnliche Betrachtung, wie im §. 11. von der Gleichung (30.), darthun.

§. 20.

Als Anwendung des in den vier letzten Paragraphen Vorgetragenen kann man die Lösung des folgenden Problems ansehen.

Stellt z irgend eine Function von x, q, p vor, und bezeichnet man die partiellen Differenzialcoeffizienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dp}$ der Kürze wegen durch q, r, s: so entsteht die Frage, ob zwei gegebene Gleichungen, die die Gröfsen z, x, y, p, q, r, s enthalten, wie z. B.

$$53. \quad \begin{cases} \varphi(z, x, y, p, q, r, s) = 0, \\ \psi(z, x, y, p, q, r, s) = 0, \end{cases}$$

gleichzeitig bestehen können; und wenn dieses Statt findet, die Aufgabe: das Integral derselben anzugeben.

Haben die beiden vorgelegten partiellen Differenzialgleichungen ein einziges Integral, so mufs es, durch Differenziation, folgende Gleichung geben:

$$54. \quad dz = q\,dx + r\,dy + s\,dp.$$

Sucht man nun aus den vorgelegten Gleichungen (53.) zwei der Variabeln als Functionen der übrigen, z. B. r und s, als Functionen von x, y, p, q, und substituirt diese Werthe in die letzte Gleichung, so erhält man

eine lineare Differenzialgleichung zwischen den 5 Gröfsen z, x, y, p, q. Thun nun die Coefficienten dieser Gleichung der Bedingungsgleichung (46.) Genüge, so ist sie durch ein System zweier Gleichungen integrirbar, und wenn aus diesen gefundenen zwei Gleichungen q eliminirt wird, so erhält man das Integral von (53.).

Als Beispiel seien folgende zwei partielle Differenzialgleichungen gegeben:

$$(a.) \quad \begin{cases} r - \frac{q}{z} = 0, \\ s - \frac{q}{z^2} = 0. \end{cases}$$

Setzt man die Werthe von r und s aus diesen Gleichungen in (54.), so hat man:

$$(b.) \quad dz = q\,dx + \frac{q}{z}dy + \frac{q}{z^2}dp.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen (35.), so hat man:

$$H = q, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_4 = 0, \quad H_5 = 1,$$

$$K = \frac{q}{z}, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = \frac{q}{z^2}, \quad K_4 = 0, \quad K_5 = \frac{1}{z},$$

$$L = \frac{q}{z^2}, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = -\frac{2q}{z^3}, \quad L_4 = 0, \quad L_5 = \frac{1}{z^2},$$

$$M = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0, \quad M_4 = 0, \quad M_5 = 0.$$

Die Gleichungen (45.) gehen dann in folgende über:

$$(2,1) = \frac{q^2}{z^2}, \quad (3,1) = \frac{2q^2}{z^3}, \quad (4,1) = 1,$$

$$(3,2) = \frac{q^2}{z^4}, \quad (4,2) = \frac{1}{z}, \quad (4,3) = \frac{1}{z^2}.$$

Da beim Substituiren dieser Werthe in der Bedingungsgleichung (46.) dieselbe realisirt wird, so ist die Gleichung (*b.*) durch ein System zweier Gleichungen integrirbar; mithin können die partiellen Differenzialgleichungen (*a.*) gleichzeitig bestehen, deren Integrale wir nunmehr bestimmen wollen. Berücksichtigt man die so eben gefundenen Resultate, so gehen die Differenzialgleichungen (47.) in folgende über:

$$dz = 0, \quad dy = -2z\,dx, \quad dp = z^2\,dx.$$

Integrirt man diese drei Gleichungen, so hat man:

$$(c) \quad z = a, \quad y = -2ax + b, \quad p = a^2 x + c.$$

Differenziirt man dieselben nach allen Gröfsen, die sie enthalten, und substituirt die gefundenen Werthe von dz, dy, dp in der Gleichung (*b.*), so geht sie, nach allen Reductionen, in folgende über:

$$a^2\,da - aq\,db - q\,dc = 0.$$

Da nun diese Gleichung blofs die vier Variabeln a, b, c, q enthält, so integrire man sie nach den §§. 7., 8., 9., 10., 11. durch ein System zweier Gleichungen. Führt man diese Integration aus, so erhält man:

$$c + ab = \varphi(a),$$
$$\frac{a^2}{q} + b = \varphi'(a),$$

wo $\varphi(a)$ eine willkürliche Function von a vorstellt.

Setzt man hier statt a, b, c ihre Werthe aus den Gleichungen ($c.$), so hat man:

$$p + yz + xz^2 = \varphi(z),$$
$$+ qy + 2xqz + z^2 = q\varphi'(z),$$

welche zwei Gleichungen die Integrale von ($b.$) sind; und da die erste dieser Gleichungen von q bereits frei erscheint, so kann man sie als das Resultat der Elimination von q aus diesen beiden Gleichungen ansehen; sie stellt mithin das Integral der beiden partiellen Differenzialgleichungen ($a.$) vor.

§. 21.

Es bleibt uns also noch der Fall zu betrachten übrig, wenn auch der Bedingungsgleichung (46.) nicht Genüge geschieht.

Da in diesem Falle der Differenzialgleichung (35.) weder durch eine, noch durch ein System zweier Gleichungen Genüge geschehen kann, so bleibt uns jetzt die Untersuchung übrig, ob sie ein System dreier Gleichungen als Integral erfordert.

Man setze also irgend ein System dreier Gleichungen zwischen x, y, z, p, q, so kann man aus denselben drei der Variabeln, z. B. z, p, q, als Functionen der beiden andern x, y sich ausgedrückt denken. Stellt man die Differenziale dieser Gleichungen durch

$$55. \quad \begin{cases} dz = A\,dx + B\,dy, \\ dp = A'\,dx + B'\,dy, \\ dq = A''\,dx + B''\,dy \end{cases}$$

vor, so müssen diese Werthe von dz, dp, dq, in (35.), substituirt, derselben für jede beliebige Relation zwischen x und y Genüge thun, d. h. es müssen dann folgende Gleichungen:

$$56. \quad \begin{cases} A = H + LA' + MA'', \\ B = K + LB' + MB'' \end{cases}$$

identisch bestehen, wenn in H, K, L, M überall, wo z, p, q steht, ihre Werthe aus den vorausgesetzten Integralen substituirt gedacht werden.

Substituirt man nun in den Gleichungen (38.) statt dz, dp, dq ihre Werthe aus (55.), so hat man:

$$dH = (H_1 + AH_3 + A'H_4 + A''H_5)dx + (H_2 + BH_3 + B'H_4 + B''H_5)dy,$$
$$dK = (K_1 + AK_3 + A'K_4 + A''K_5)dx + (K_2 + BK_3 + B'K_4 + B''K_5)dy,$$
$$dL = (L_1 + AL_3 + A'L_4 + A''L_5)dx + (L_2 + BL_3 + B'L_4 + B''L_5)dy,$$
$$dM = (M_1 + AM_3 + A'M_4 + A''M_5)dx + (M_2 + BM_3 + B'M_4 + B''M_5)dy,$$

Berücksichtigt man, dafs die Gleichungen (55.) vollständige Differenziale sind; ferner die Gleichungen (56.), und die letzten Gleichungen: so erhält man noch folgende Gleichung:

57. $$(2,1) + (3,1)B' - (3,2)A' + (4,1)B'' - (4,2)A'' + (4,3)(A'B'' - A''B') = 0.$$

Da wir hier blofs drei Gleichungen, nemlich die (56.) und die letzte, gegen 6 unbekannte Gröfsen A, B, A', B', A'', B'' haben, und aus denselben, wie ein einfacher Anblick zeigt, keine Gleichung erhalten werden kann, die von den letzten 6 Gröfsen frei wäre, so ist kein Grund vorhanden, der vorgelegten Differenzialgleichung (35.) ein System dreier Integrale abzusprechen; allein wir wollen noch überdies zeigen, wie im vorliegenden Falle dieses System zu finden sei.

§. 22.

Sucht man aus den Gleichungen (56.), (57.) drei der Gröfsen A, B, A', B', A'', B'', z. B. A, B, A'', so hat man:

$$A = H + LA' \frac{+M\{(2,1) + (3,1)B' - (3,2)A' + [(4,1) + (4,3)A']B''\}}{(4,2) + (4,3)B'},$$
$$B = K + LB' + MB'',$$
$$A'' = \frac{(2,1) + (3,1)B' - (3,2)A' + [(4,1) + (4,3)A']B''}{(4,2) + (4,3)B'}.$$

Substituirt man diese Werthe in den Gleichungen (55.), so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq,$$
$$dp = A'dx + B'dy,$$
$$[(4,2) + (4,3)B']dq = [(2,1) + (3,1)B' - (3,2)A']dx + B''[(4,1)dx + (4,2)dy + (4,3)dp].$$

Allein da B'' ganz willkürlich bleibt, so zerfällt die letzte Gleichung in folgende zwei:

$$[(4,2) + (4,3)B']dq = [(2,1) + (3,1)B' - (3,2)A']dx,$$
$$0 = [(4,1)dx + (4,2)dy + (4,3)dp].$$

Vergleicht man die letzte dieser Gleichungen mit der zweiten der vorhergehenden drei Gleichungen, so sieht man, dafs

$$A' = -\frac{(3,1)}{(4,3)}, \qquad B' = -\frac{(4,2)}{(4,3)}$$

sein mufs, und wenn diese Werthe in die erste der vorhergehenden zwei Gleichungen substituirt werden, so erhält man:

$$0 = [(2,1)(4,3) - (3,1)(4,2) + (3,2)(4,1)]\,dx,$$

woraus also entweder

$$(2,1)(4,3) - (3,1)(4,2) + (3,2)(4,1) = 0,$$

oder

$$dx = 0, \quad \text{folglich} \quad x = \text{Const.}$$

folgt. Allein die erste Gleichung, die mit der Bedingungsgleichung (46.) identisch ist, findet, vermöge Voraussetzung, im vorliegenden Falle nicht Statt; also mufs die zweite bestehen; woraus wir daher ersehen, dafs man in der vorgelegten Differenzialgleichung (35.) eine der Variabeln einstweilen als Constante ansehen müsse, um zu den drei Integralen derselben zu gelangen.

§. 23.

Betrachtet man also in der vorgelegten Differenzialgleichung (35.) eine der Variabeln, z. B. q, einstweilen als Constante, so geht sie in folgende über:

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp.$$

Diese Gleichung reduzire man nach den §§. 7., 8., 9., 10., 11. in eine andere von der Form:

$$\alpha da + \beta db + \gamma dc = 0,$$

wo α, β, γ, die neuen Variabeln a, b, c enthalten; ferner einen allen drei Gröfsen gemeinschaftlichen Factor, der eine Function von z sein wird, und endlich die Gröfse q, in so fern sie aus den Coefficienten H, K, L entspringt.

Integrirt man nun die letzte Gleichung durch ein System zweier Gleichungen, indem noch immer q als constant behandelt wird, so hat man, wenn diese Gleichung mit der in den §§. 1., 2., 3. verglichen wird, folgende zwei Integrale:

$$a = \varphi(b, c, \psi(c)),$$

$$-\frac{\gamma}{\alpha} = \varphi'(c) + \varphi'(\psi(c))\psi'(c),$$

wo φ eine bekannte und ψ eine willkürliche Function vorstellt.

Berücksichtigt man die Variabilität von q, so mufs man unter der willkürlichen Function ψ aufser c auch q noch bringen, so dafs

$$a = \varphi(b, c, \psi(c, q)),$$
$$-\gamma = \alpha\varphi'(c) + \alpha\varphi'(\psi(c, q))\psi'(c).$$

Substituirt man in diese Gleichungen die Werthe von a, b, c, die durch x, y, z, p, q ausgedrückt sein werden, und differenziirt dann die erste derselben nach sämmtlichen 5 Variabeln, so mufs sie, vermöge der zweiten dieser Gleichungen, von der Gleichung (35.) blofs in dem mit dq behafteten Gliede abweichen; denn wenn q als eine Constante behandelt wird, mufs die Übereinstimmung vollständig sein. Setzt man also diese verschiedenartig aussehenden Coefficienten von dq einander gleich, so ergiebt sich eine dritte Gleichung, welche, mit den beiden ersten vereinigt, die drei Integrale der vorgelegten Differenzialgleichung darbieten wird.

IV.

Über die lineare Differenzialgleichung mit sechs variabeln Gröfsen.

§. 24.

Es sei

$$58. \quad dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr$$

und

$$59. \quad \begin{cases} dH = H_1 dx + H_2 dy + H_3 dz + H_4 dp + H_5 dq + H_6 dr, \\ dK = K_1 dx + K_2 dy + K_3 dz + K_4 dp + K_5 dq + K_6 dr, \\ dL = L_1 dx + L_2 dy + L_3 dz + L_4 dp + L_5 dq + L_6 dr, \\ dM = M_1 dx + M_2 dy + M_3 dz + M_4 dp + M_5 dq + M_6 dr, \\ dN = N_1 dx + N_2 dy + N_3 dz + N_4 dp + N_5 dq + N_6 dr. \end{cases}$$

Soll nun die Differenzialgleichung (58.) ein einziges Integral zulassen, so denken wir uns aus demselben die Variabele z entwickelt, und wenn dann

$$60. \quad dz = Adx + Bdy + Cdp + Ddq + Edr$$

gesetzt wird, so bestehen folgende Gleichungen:

$$61. \quad A = H, \quad B = K, \quad C = L, \quad D = M, \quad E = N,$$

wenn in den Gröfsen rechterhand der Gleichheitszeichen, überall wo z steht, sein Werth aus dem vorausgesetzten Integral substituirt gedacht wird.

Setzt man nun den letzten Werth von dz in die Gleichungen (59.) und berücksichtigt, dafs die Gleichung (60.) ein vollständiges Differenzial vorstellt: ferner die Gleichungen (61.): so erhält man folgende Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
1)\quad & KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1 = 0,\\
2)\quad & LH_3 - HL_3 + H_4 - L_1 = 0,\\
3)\quad & MH_3 - HM_3 + H_5 - M_1 = 0,\\
4)\quad & NH_3 - HN_3 + H_6 - N_1 = 0,\\
5)\quad & LK_2 - KL_3 + K_4 - L_2 = 0,\\
6)\quad & MK_3 - KM_3 + K_5 - M_2 = 0,\\
7)\quad & NK_3 - KN_3 + K_6 - N_2 = 0,\\
8)\quad & ML_3 - LM_3 + L_5 - M_4 = 0,\\
9)\quad & NL_3 - LN_3 + L_6 - N_4 = 0,\\
10)\quad & NM_3 - MN_3 + M_6 - N_5 = 0,
\end{aligned}
$$

woraus erhellet, dafs die Existenz eines einzigen Integrals für die Differenzialgleichung (58.) an die Erfüllung der so eben aufgestellten Bedingungsgleichungen gebunden ist.

§. 25.

Finden dieselben Statt, so betrachte man einstweilen eine der Variabeln, z. B. r, als constant. Die Differenzialgleichung (58.) geht dann in folgende über:

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq.$$

Diese Gleichung läfst, wegen des Statthabens der 1sten, 2ten, 3ten, 5ten, 6ten, 8ten obiger Bedingungsgleichungen, nach den §§. 13., 14. ein einziges Integral zu. Stellt man dasselbe durch

$$62.\quad z = \varphi(x, y, p, q, r, a)$$

vor, wo r von den Coefficienten H, K, L, M herrührt, und a die Constante der Integration vorstellt, die auch jeder willkürlichen Function von r gleich gesetzt werden kann; so kann man durch die Annahme, dafs r veränderlich sei, a dergestalt als Function von r bestimmen, dafs dieselbe Integralgleichung der Differenzialgleichung (58.) beim Variabelsein des r ebenfalls genügt.

Zu diesem Zwecke differenziire man diese Integralgleichung, so hat man:

$$dz = \varphi'(x)dx + \varphi'(y)dy + \varphi'(p)dp + \varphi'(q)dq + \varphi'(r)dr + \varphi'(a)da.$$

Diese Gleichung mufs identisch mit (58.) sein, unter der Voraussetzung, dafs r, foglich auch a, constant sei; daher hat man folgende Gleichung:

$$Ndr = \varphi'(r)dr + \varphi'(a)da,$$

oder

$$63.\quad da = \frac{N - \varphi'(r)}{\varphi'(a)}dr.$$

Von dieser Gleichung kann man auf gleiche Weise, wie in §§. 2., 5., 14. nachweisen, dafs sie beim Statthaben der 4ten, 7ten, 9ten, 10ten obiger

Bedingungsgleichungen von den Variabeln x, y, z, p, q befreit ist; man kann daher durch Integration der letzten Gleichung a als Function von r und einer neuen willkürlichen Constante bestimmen, und wenn dieser Werth von a in (62.) gesetzt wird, so erhält man das unter diesen Umständen Statt habende allgemeinste Integral.

§. 26.

Finden hingegen von den obigen Bedingungsgleichungen blofs je 6, die einen der Buchstaben H, K, L, M, N nicht enthalten, Statt, z. B. die 1ste, 2te, 3te, 5te, 6ste, 8te Gleichung, in welchen der Buchstabe N gänzlich fehlt: so verfahre man, wie im vorhergehenden Paragraphe bis zu der Gleichung (62.), in welche man statt a jede willkürliche Function von r setzen kann. Ferner gelangt man zur Gleichung (63.), aus welcher sich im gegenwärtigen Falle a nicht mehr als bekannte Function von r angeben läfst. Daher setze man:

$$\frac{N - \varphi'(r)}{\varphi'(a)} = \psi(r),$$

so ist $a = \psi(r)$, und die vorgelegte Differenzialgleichung (58.) wird dann durch das System folgender zwei Gleichungen:

$$z = \varphi(x, y, p, q, r, \psi(r)),$$
$$N = \varphi'(r) + \varphi'(\psi(r))\,\psi'(r)$$

integrirt, in welchen $\psi(r)$ jede willkürliche Function von r bedeuten kann.

§. 27.

Findet also nur irgend eine der obigen Bedingungsgleichungen nicht Statt, so ist die vorgelegte Differenzialgleichung (58.) eines einzigen Intetegrals nicht fähig. Es bleibt uns mithin die Untersuchung anzustellen übrig, unter welchen Umständen sie ein System zweier Integrale zuläfst.

Man denke sich, die Differenzialgleichung (58.) habe zwei Integrale, und es ergeben sich, wenn aus derselben zwei der Variabeln, z. B. z und q, ausgedrückt und differenziirt werden, folgende Gleichungen:

$$64. \quad \begin{cases} dz = A\,dx + B\,dy + C\,dp + D\,dr, \\ dq = A'\,dx + B'\,dy + C'\,dp + D'\,dr, \end{cases}$$

Setzt man diese Werthe von dz, dq in (58.), so mufs die Gleichung für jede beliebige Relation zwischen x, y, p, r bestehen, wodurch sich dann folgende Gleichungen ergeben:

$$65. \quad \begin{cases} A = H + MA', \\ B = K + MB', \\ C = L + MC', \\ D = N + MD'. \end{cases}$$

Substituirt man ferner dieselben Werthe von dz, dq in (59.) und berücksichtigt, dafs die Gleichungen (64.) vollständige Differenziale sind, so erhält man aufser den Gleichungen (65.) noch folgende Gleichungen:

$$66.\quad \begin{cases} (2,1)-(4,2)A'+(4,1)B' = 0, \\ (3,1)-(4,3)A'+(4,1)C' = 0, \\ (5,1)+(5,4)A'+(4,1)D' = 0, \\ (3,2)-(4,3)B'+(4,2)C' = 0, \\ (5,2)+(5,4)B'+(4,2)D' = 0, \\ (5,3)+(5,4)C'+(4,3)D' = 0, \end{cases}$$

zur Bestimmung von A, B, C, D, A', B', C', D', wo folgende Abkürzungen eingeführt worden sind:

$$\begin{aligned} KH_3 - HK_3 + H_2 - K_1 &= (2,1), \\ LH_3 - HL_3 + H_4 - L_1 &= (3,1), \\ MH_3 - HM_3 + H_5 - M_1 &= (4,1), \\ NH_3 - HN_3 + H_6 - N_1 &= (5,1), \\ LK_3 - KL_3 + K_4 - L_2 &= (3,2), \\ MK_3 - KM_3 + K_5 - M_2 &= (4,2), \\ NK_3 - KN_3 + K_6 - N_2 &= (5,2), \\ ML_3 - LM_3 + L_5 - M_4 &= (4,3), \\ NL_3 - LN_3 + L_6 - N_4 &= (5,3), \\ NM_3 - MN_3 + M_6 - N_5 &= (5,4). \end{aligned}$$

Die Gleichungen (66.) bieten, gehörig verbunden, folgende, blofs von den Coefficienten H, K, L, M, N abhängige, Gleichungen dar:

$$67.\quad \begin{cases} (2,1)(4,3)-(3,1)(4,2)+(3,2)(4,1) = 0, \\ (2,1)(5,4)-(4,1)(5,2)+(4,2)(5,1) = 0, \\ (3,1)(5,4)-(4,1)(5,3)+(4,3)(5,1) = 0. \end{cases}$$

Es bieten mithin die letzten Gleichungen die Bedingungen dar, unter welchen die Differenzialgleichung (58.) ein System zweier Integrale zuläfst.

§. 28.

Um im Falle des Statthabens dieser Bedingungsgleichungen die beiden Integrale zu erhalten, bestimmen wir aus je drei der Gleichungen (66.) drei der Gröfsen A', B', C', D' und lassen die vierte derselben völlig unbestimmt oder willkürlich. Benutzt man zu diesem Zwecke die drei ersten der Gleichungen (66.), so hat man

$$B' = -\frac{(2,1)}{(4,1)} + \frac{(4,2)}{(4,1)}A', \quad C' = -\frac{(3,1)}{(4,1)} + \frac{(4,3)}{(4,1)}A', \quad D' = -\frac{(5,1)}{(4,1)} - \frac{(5,4)}{(4,1)}A',$$

und wenn diese Werthe von B', C', D' in den Gleichungen (65.) substi-

tuirt werden, so hat man:

$$A = H + MA',$$
$$B = K - M\frac{(2,1)}{(4,1)} + M\frac{(4,2)}{(4,1)}A',$$
$$C = L - M\frac{(3,1)}{(4,1)} + M\frac{(4,3)}{(4,1)}A',$$
$$D = N - M\frac{(5,1)}{(4,1)} - M\frac{(5,4)}{(4,1)}A'.$$

Substituirt man endlich diese Werthe von A, B, C, D, B', C', D' in (64.), und berücksichtigt die Willkürlichkeit von A', so erhält man folgende drei Gleichungen:

$$dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr,$$
$$dx = -\frac{(4,2)}{(4,1)}dy - \frac{(4,3)}{(4,1)}dp + \frac{(5,4)}{(4,1)}dr,$$
$$dq = -\frac{(2,1)}{(4,1)}dy - \frac{(3,1)}{(4,1)}dp + \frac{(5,1)}{(4,1)}dr.$$

§. 29.

Betrachtet man nun in den letzten drei Differenzialgleichungen zwei der Variabeln, z. B. q und r, als constant, so gehen sie, mit Hülfe der Gleichungen (67.), in folgende über:

$$dx = \frac{(3,2)}{\Delta}dz, \qquad dy = -\frac{(3,1)}{\Delta}dz, \qquad dp = \frac{(2,1)}{\Delta}dz,$$

wo der Kürze wegen

$$\Delta = H(3,2) - K(3,1) + L(2,1)$$

gesetzt worden ist.

Denken wir uns nun die Integrale der letzten drei Differenzialgleichungen durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$68. \quad \begin{cases} x = \varphi_1(z, q, r, a, b, c), \\ y = \varphi_2(z, q, r, a, b, c), \\ p = \varphi_3(z, q, r, a, b, c); \end{cases}$$

wo q und r von den Coefficienten H, K, L, in welchen sie etwa vorkommen möchten, herrühren, und a, b, c die Constanten der Integrationen vorstellen, die beliebige Functionen von q und r sein können.

Differenziirt man diese Gleichungen, unter der Voraussetzung, dafs q und r, mithin auch a, b, c, variabel seien, so hat man, wenn die auf diese Art sich ergebenden Werthe von dx, dy, dp in der vorgelegten Differenzialgleichung (58.) substituirt werden, wegen

$$69. \quad \varphi_1'(z) = \frac{(3,2)}{\Delta}, \qquad \varphi_2'(z) = -\frac{(3,1)}{\Delta}, \qquad \varphi_3'(z) = \frac{(2,1)}{\Delta}:$$

und wegen

$$70. \qquad H\varphi'_1(z) + K\varphi'_2(z) + L\varphi'_3(z) = 1,$$

folgende von dz befreite Gleichung:

$$71. \qquad \alpha\, da + \beta\, db + \gamma\, dc + \delta\, dq + \varepsilon\, dr = 0,$$

wo der Kürze halber

$$72. \quad \begin{cases} \alpha = H\varphi'_1(a) + K\varphi'_2(a) + L\varphi'_3(a), \\ \beta = H\varphi'_1(b) + K\varphi'_2(b) + L\varphi'_3(b), \\ \gamma = H\varphi'_1(c) + K\varphi'_2(c) + L\varphi'_3(c), \\ \delta = H\varphi'_1(q) + K\varphi'_2(q) + L\varphi'_3(q) + M, \\ \varepsilon = H\varphi'_1(r) + K\varphi'_2(r) + L\varphi'_3(r) + N \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

§. 30.

Nun, behaupte ich, giebt es im vorliegenden Falle, nemlich beim Statt haben der Bedingungsgleichungen (67.), eine Function von z, die wir Z nennen wollen, welche, wenn sämmtliche Glieder der Gleichung (71.) mit derselben multiplicirt werden, macht, dafs die dann gebildete Gleichung, nemlich

$$Z\alpha\, da + Z\beta\, db + Z\gamma\, dc + Z\delta\, dq + Z\varepsilon\, dr = 0,$$

von z befreit ist.

Um dieses nachzuweisen, haben wir blofs die Existenz folgender Gleichungen:

$$73. \quad \frac{d.Z\alpha}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\beta}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\gamma}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\delta}{dz} = 0, \quad \frac{d.Z\varepsilon}{dz} = 0$$

darzuthun.

Vergleicht man die Resultate der §§. 16., 17., 18. mit dem vorliegenden Falle, so sieht man, dafs den vier ersten der so eben aufgestellten Gleichungen durch jene Function Z von z, die der folgenden Differenzialgleichung

$$74. \qquad \frac{dZ}{dz} + Z\frac{\Delta'}{\Delta} = 0$$

entspricht, Genüge geschieht, wo

$$\Delta' = H_3(3,2) - K_3(3,1) + L_3(2,1)$$

ist. Wir haben daher noch zu zeigen, dafs auch der fünften der obigen Gleichungen durch dieselbe Function von z Genüge geschehen kann.

Es ist nemlich

$$\begin{aligned} \frac{d.Z\varepsilon}{dz} = \varepsilon\frac{dZ}{dz} &+ Z[H\varphi''_1(r,z) + K\varphi''_2(r,z) + L\varphi''_3(r,z)] \\ &+ Z\varphi'_1(r)[H_1\varphi'_1(z) + H_2\varphi'_2(z) + H_3 + H_4\varphi'_3(z)] \\ &+ Z\varphi'_2(r)[K_1\varphi'_1(z) + K_2\varphi'_2(z) + K_3 + K_4\varphi'_3(z)] \\ &+ Z\varphi'_3(r)[L_1\varphi'_1(z) + L_2\varphi'_2(z) + L_3 + L_4\varphi'_1(z)] \\ &+ Z[N_1\varphi'_1(z) + N_2\varphi'_2(z) + N_3 + N_4\varphi'_3(z)], \end{aligned}$$

Ferner giebt die Gleichung (70.), wenn sie nach r differenziirt wird:

$$\begin{aligned} H\varphi_1''(r,z) + K\varphi_2''(r,z) + L\varphi_3''(r,z) = & -\varphi_2'(z)[H_1\varphi_1'(r) + H_2\varphi_2'(r) + H_3\varphi_3'(r) + H_6] \\ & -\varphi_2'(z)[K_1\varphi_1'(r) + K_2\varphi_2'(r) + K_3\varphi_3'(r) + K_6] \\ & -\varphi_2'(z)[L_1\varphi_1'(r) + L_2\varphi_2'(r) + L_3\varphi_3'(r) + L_6]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit Z, und addirt sie zur vorhergehenden, so erhält man, wenn für $\varphi_1'(z)$, $\varphi_2'(z)$, $\varphi_3'(z)$ ihre Werthe aus (69.) gesetzt werden und auf die Bedingungsgleichungen (67.) Rücksicht genommen wird, folgende Gleichung:

$$\frac{d.Z\varepsilon}{dz} = \varepsilon\left[\frac{dZ}{dz} + Z\frac{\Delta'}{\Delta}\right],$$

woraus das Bestehen sämmtlicher Gleichungen (73.), für das der Differenzialgleichung Genüge thuende Z, von selbst erhellet.

§. 31.

Dividirt man nun die Gleichung (71.) durch α, so ergiebt sich folgende Gleichung:

$$da = -\frac{\beta}{\alpha}db - \frac{\gamma}{\alpha}dc - \frac{\delta}{\alpha}dq - \frac{\varepsilon}{\alpha}dr.$$

Diese Gleichung enthält, dem Vorhergehenden zufolge, blofs die 5 Variabeln a, b, c, q, r, und wenn sie mit der allgemeinen Gleichung (35.), die ebenfalls 5 Variabeln enthält, verglichen wird, so überzeugt man sich bald, dafs beim Statthaben der Bedingungsgleichungen (67.) die Coefficienten der vorliegenden Gleichung die Bedingungsgleichung (46.) eingehen; woraus erhellet, dafs dieser Gleichung durch ein System zweier Integrale Genüge geschehen kann. Denkt man sich dieselben nach den §§. 17., 18., 19. hergestellt, und substituirt man statt a, b, c ihre Werthe aus den Gleichungen (68.), so ergeben sich zwei Gleichungen, die die Variabeln x, y, z, p, q, r und eine willkürliche Function derselben enthalten, welche dann die Integrale von (58.) vorstellen.

§. 32.

Die Lösung des folgenden Problems wird das in den 5 letzten Paragraphen Vorgetragene deutlicher machen.

Es stelle z irgend eine Function der vier Variabeln x, y, p, q vor. Werden nun die partiellen Differenzialquotienten $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$, $\frac{dz}{dp}$, $\frac{dz}{dq}$ der Kürze wegen durch r, s, t, u vorgestellt, so entsteht die Frage, ob in dem Falle, wenn drei Gleichungen zwischen den Variabeln und den par-

tiellen Differenzialquotienten vorgelegt sind, dieselben aus einer Gleichung zwischen x, y, z, p, q entsprungen sind, oder nicht.

Es seien also folgende drei Gleichungen gegeben:

$$75. \quad \begin{cases} \varphi(x, y, z, p, q, r, s, t, u) = 0, \\ \psi(x, y, z, p, q, r, s, t, u) = 0, \\ \Omega(x, y, z, p, q, r, s, t, u) = 0. \end{cases}$$

Sollen dieselben aus einer Relation zwischen x, y, z, p, q entstanden sein, so mufs folgende Gleichung bestehen:

$$76. \quad dz = r\,dx + s\,dy + t\,dp + u\,dq.$$

Sucht man nun aus den vorhergehenden Gleichungen drei der Gröfsen r, s, t, u, z. B. die drei letzten, und substituirt sie in dieser Gleichung, so erhält man eine lineare Differenzialgleichung zwischen den 6 Variabeln z, x, y, p, q, u. Finden nun bei dieser Gleichung die Bedingungsgleichungen (67.) Statt, so kann man sie durch ein System zweier Gleichungen integriren, und wenn aus denselben r eliminirt wird, so erhält man das den Gleichungen (75.) gemeinschaftliche Integral; im entgegengesetzten Falle lassen die Gleichungen (75.) kein gemeinschaftliches Integral zu, oder sie können nicht gleichzeitig bestehen.

Um einen besondern Fall vor Augen zu haben, seien die Gleichungen folgende:

$$(a.) \quad s - \frac{r}{z} = 0, \quad t - \frac{r}{z^2} = 0, \quad u - \frac{r}{z^3} = 0.$$

Die Werthe von s, t, u aus diesen Gleichungen in (76.) gesetzt, giebt

$$(b.) \quad dz = r\,dx + \frac{r}{z}\,dy + \frac{r}{z^2}\,dp + \frac{r}{z^3}\,dq.$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der allgemeinen (58.), so hat man:

$$H = r, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_4 = 0, \quad H_5 = 0, \quad H_6 = 1,$$

$$K = \frac{r}{z}, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = -\frac{r}{z^2}, \quad K_4 = 0, \quad K_5 = 0, \quad K_6 = \frac{1}{z},$$

$$L = \frac{r}{z^2}, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = -\frac{2r}{z^3}, \quad L_4 = 0, \quad L_5 = 0, \quad L_6 = \frac{1}{z^2},$$

$$M = \frac{z^3}{r}, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = -\frac{3r}{z^4}, \quad M_4 = 0, \quad M_5 = 0, \quad M_6 = \frac{1}{z^3},$$

$$N = 0, \quad N_1 = 0, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = 0, \quad N_4 = 0, \quad N_5 = 0, \quad N_6 = 0.$$

Es ist daher nach §. 27.:

$$(2,1) = \frac{r^2}{z^2}, \quad (3,1) = \frac{2r^3}{z^3}, \quad (4,1) = \frac{3r^2}{z^4}, \quad (5,1) = 1,$$

$$(3,2) = \frac{r^2}{z^4}, \quad (4,2) = \frac{2r^2}{z^5}, \quad (5,2) = \frac{1}{z},$$

$$(4,3) = \frac{r^2}{z^6}, \quad (5,3) = \frac{1}{z^2},$$

$$(5,4) = \frac{1}{z^3}.$$

Da beim Substituiren dieser Ausdrücke in den Bedingungsgleichungen (67.) dieselben identisch bestehen, so ist die Gleichung (*b.*) eines Systems zweier Integrale, mithin sind die Gleichungen (*a.*) eines einzigen Integrals fähig.

Substituirt man nemlich die so eben aufgestellten Werthe von (2,1), (3,1), (3,2) in den ersten Gleichungen in §. 29., so hat man, wegen $\Delta = 0$, folgende drei Differenzialgleichungen:

$$dz = 0, \quad dy = -2z\,dx, \quad dp = z^2\,dx.$$

Integrirt man dieselben, so hat man:

$$(c.) \quad z = a, \quad y = -2ax + b, \quad p = a^2x + c.$$

Differenziirt man diese Gleichungen nach allen Gröfsen, die sie enthalten, und setzt die so gefundenen Werthe dz, dy, dp, in (*b.*), so hat man:

$$(d.) \quad da = \frac{r}{a}\,db + \frac{r}{a^2}\,dc + \frac{r}{a^3}\,dq.$$

Es ist also mit Hülfe der Gleichungen (*c.*) die Differenzialgleichung (*b.*) mit 6 veränderlichen Gröfsen in die so eben gefundene umgesetzt worden, welche blofs 5 veränderliche Gröfsen enthält.

Um nun bequemer diese Gleichung mit der allgemeinen (35.) vergleichen zu können, setzen wir einstweilen $a = z'$, $b = x'$, $c = y'$, $q = p'$, $r = q'$; dieses giebt:

$$dz' = \frac{q'}{z'}\,dx' + \frac{q'}{z'^2}\,dy' + \frac{q'}{z'^3}\,dp'.$$

Es ist also, wenn diese Gleichung mit (35.) verglichen wird:

$$H = \frac{q'}{z'}, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = -\frac{q'}{z'^3}, \quad H_4 = 0, \quad H_5 = \frac{1}{z'},$$

$$K = \frac{q}{z'^2}, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = -\frac{2q}{z'^3}, \quad K_4 = 0, \quad K_5 = \frac{1}{z'^2},$$

$$L = \frac{q'}{z'^3}, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = -\frac{3q'}{z'^4}, \quad L_4 = 0, \quad L_5 = \frac{1}{z'^3},$$

$$M = 0, \quad M_1 = 0, \quad M_2 = 0, \quad M_3 = 0, \quad M_4 = 0, \quad M_5 = 0,$$

und mithin nach den Gleichungen (45.):

$$(2,1) = \frac{q'^2}{z'^4}, \qquad (3,1) = \frac{2q'^2}{z'^5}, \qquad (4,1) = \frac{1}{z'},$$
$$(3,2) = \frac{q'^2}{z'^6}, \qquad (4,2) = \frac{1}{z'^2},$$
$$(4,3) = \frac{1}{z'^3}.$$

Wenn diese Werthe in (46.) gesetzt werden, so wird sie identisch erfüllt; mithin läfst die Gleichung (*d*.) ein System zweier Integrale zu.

Wie nun weiter zu verfahren sei, ist bereits im §. 20. gezeigt worden, weswegen wir uns nicht länger bei diesem Beispiele aufhalten wollen.

§. 33.

Thun endlich die Coefficienten H, K, L, M, N der linearen Differenzialgleichung (58.) auch den Bedingungsgleichungen (67.) nicht Genüge, so läfst die Differenzialgleichung auch ein System zweier Integrale nicht zu, und es bleibt daher noch zu untersuchen übrig, ob sie eines Systems dreier Integrale fähig sei.

Zu diesem Zwecke denken wir uns, wie es bisher geschah: es existiren drei Integrale, und wenn aus denselben drei der Variabeln, z. B. z, q, r, als Functionen von x, y, p ausgedrückt gedacht werden, so seien die Differenziale derselben durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$77. \quad \begin{cases} dz = A\,dx + B\,dy + C\,dp, \\ dq = A'\,dx + B'\,dy + C'\,dp, \\ dr = A''\,dx + B''\,dy + C''\,dp, \end{cases}$$

wo A, B, C .... Functionen von x, y, p sind, die an folgende Gleichungen gebunden sind:

$$78. \quad \begin{cases} \frac{dA}{dy} = \frac{dB}{dx}, & \frac{dA}{dp} = \frac{dC}{dx}, & \frac{dB}{dp} = \frac{dC}{dy}, \\ \frac{dA'}{dy} = \frac{dB'}{dx}, & \frac{dA'}{dp} = \frac{dC'}{dx}, & \frac{dB'}{dp} = \frac{dC'}{dy}, \\ \frac{dA''}{dy} = \frac{dB''}{dx}, & \frac{dA''}{dp} = \frac{dC''}{dx}, & \frac{dB''}{dp} = \frac{dC''}{dy}. \end{cases}$$

Substituirt man diese Werthe von dz, dq, dr in der vorgelegten Differenzialgleichung (58.), so mufs sie unabhängig von dx, dy, dp bestehen, wodurch sich folgende drei Gleichungen ergeben:

$$79. \quad \begin{cases} A = H + MA' + NA'', \\ B = K + MB' + NB'', \\ C = L + MC' + NC'', \end{cases}$$

Setzt man ferner die Werthe von dz, dq, dr aus (77.) in (59.), und berücksichtigt die Gleichungen (78.) und (79.), so erhält man entweder folgende:

$$80.\quad \begin{cases} [(5,2)+(5,4)B']A''-[(5,1)+(5,4)A']B''+(4,2)A'-(4,1)B'-(2,1)=0, \\ [(5,3)+(5,4)C']A''-[(5,1)+(5,4)A']C''+(4,3)A'-(4,1)C'-(3,1)=0, \\ [(5,3)+(5,4)C']B''-[(5,2)+(4,4)B']C''+(4,3)B'-(4,2)C'-(3,2)=0, \end{cases}$$

oder folgende drei Gleichungen:

$$81.\quad \begin{cases} [(4,2)-(5,4)B'']A'-[(4,1)-(5,4)A'']B'+(5,2)A''-(5,1)B''-(2,1)=0, \\ [(4,3)-(5,4)C'']A'-[(4,1)-(5,4)A'']C'+(5,3)A''-(5,1)C''-(3,1)=0, \\ [(4,3)-(5,4)C'']B'-[(4,2)-(5,4)B'']C'+(5,3)B''-(5,2)C''-(3,2)=0. \end{cases}$$

Die Gleichungen (80.) geben, gehörig verbunden, folgende Gleichung:

$$82.\quad \begin{cases} [(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)]A' \\ -[(3,1)(5,4)-(4,1)(5,3)+(4,3)(5,1)]B' \\ +[(2,1)(5,3)-(3,1)(5,2)+(3,2)(5,1)]C' \\ +[(2,1)(4,3)-(3,1)(5,2)+(3,2)(5,1)]=0, \end{cases}$$

und die Gleichungen (81.) folgende:

$$83.\quad \begin{cases} [(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)]A'' \\ -[(3,1)(5,4)-(4,1)(5,3)+(4,3)(5,1)]B'' \\ +[(2,1)(5,4)-(4,1)(5,2)+(4,2)(5,1)]C'' \\ -[(2,1)(4,3)-(3,1)(4,2)+(3,2)(4,1)]=0. \end{cases}$$

Wir haben also aufser den Gleichungen (79.) die beiden zuletzt aufgestellten Gleichungen und irgend eine der Gleichungen (80.) oder (81.), z. B. die folgende:

$$84.\quad [(5,2)+(5,4)B']A''-[(5,1)+(5,4)A']B''+(4,2)A'-(4,1)B'-(2,1)=0,$$

um die Unbekannten A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' zu bestimmen.

Da nun, aufser diesen eben angeführten Gleichungen, keine, die nicht eine Folge derselben wäre, erhalten werden kann, und aus diesen Gleichungen selbst keine, die blofs die Coefficienten H, K, L, M, N und ihre Differenziale enthielte, erzeugt werden kann: so ist die Auflösung des Problems, eine Differenzialgleichung, wie (58.), durch ein System dreier Gleichungen zu integriren, an keine Bedingungsgleichungen gebunden; es bleibt uns daher noch zu zeigen übrig, wie man die aufgestellten Gleichungen (77.), (79.), (82.), (83.), (84.) benutzen kann, um zu diesen drei Integralgleichungen selbst zu gelangen.

§. 34.

Zuerst sieht man, wie die Gleichungen (82.) und (83.) zeigen, dafs weder die sämmtlichen drei Gröfsen A', B', C', noch A'', B'', C'', jede Parthie für sich, zugleich unbestimmt bleiben können. Es sind vielmehr entweder zwei der erstern und eine der letztern Gröfsern, oder umgekehrt, willkürlich.

Sieht man also B', C' und A'' als willkürlich an, so hat man, wenn der Werth von A' aus (82.) in die zweite der Gleichungen (77.) gesetzt wird, folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} dq = &- \frac{(2,1)(5,3)-(3,1)(5,2)+(3,2)(5,1)}{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}dx \\ &+ B'\left\{dy + \frac{(3,1)(5,4)-(4,1)(5,3)+(4,3)(5,1)}{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}dx\right\} \\ &+ C'\left\{dp - \frac{(2,1)(5,4)-(4,1)(5,2)+(4,2)(5,1)}{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}dx\right\}. \end{aligned}$$

Da aber B' und C' willkürlich sind, so zerfällt diese Gleichung in folgende drei Gleichungen:

$$85.\quad \begin{cases} dy = -\dfrac{(3,1)(5,4)-(4,1)(5,3)+(4,3)(5,1)}{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}dx, \\ dp = -\dfrac{(2,1)(5,4)-(4,1)(5,2)+(4,2)(5,1)}{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}dx, \\ dq = -\dfrac{(2,1)(5,3)-(3,1)(5,2)+(3,2)(5,1)}{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}dx. \end{cases}$$

Diese Werthe von dy, dp in die dritte der Gleichungen (77.) gesetzt, giebt, wegen (83.):

$$86.\quad dr = \frac{(2,1)(4,3)-(3,1)(4,2)+(3,2)(4,1)}{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}dx.$$

Substituirt man endlich in der ersten der Gleichungen (77.) statt A, B, C ihre Werthe aus (79.) und berücksichtigt die letzten 4 Gleichungen, wie auch (82.) und (83.), so erhält man:

$$87.\quad dz = Hdx + Kdy + Ldp + Mdq + Ndr,$$

welche Gleichung mit der Vorgelegten (58.) identisch ist.

Es wird daher jedes System von Integralen, welches den Differenzialgleichungen (85.), (86.) und der letzten Genüge thut, auch der vorgelegten Differenzialgleichung entsprechen.

Setzt man also, um mehr Symmetrie in die Formeln zu bringen:

$$88.\quad \begin{cases} H[(3,2)(5,4) - (4,2)(5,3) + (4,3)(5,2)] \\ -K[(3,1)(5,4) - (4,1)(5,3) + (4,3)(5,1)] \\ +L[(2,1)(5,4) - (4,1)(5,2) + (4,2)(5,1)] \\ -M[(2,1)(5,3) - (3,1)(5,2) + (3,2)(5,1)] \\ +N[(2,1)(4,3) - (3,1)(4,2) + (3,2)(4,1)] = \Delta, \end{cases}$$

so geben die Gleichungen (85.), (86.), (87.) folgende Differenzialgleichungen:

$$89.\quad \begin{cases} dx = \dfrac{(3,2)(5,4) - (4,2)(5,3) + (5,3)(5,2)}{\Delta} dz, \\ dy = -\dfrac{(3,1)(5,4) - (4,1)(5,3) + (4,3)(5,1)}{\Delta} dz, \\ dp = \dfrac{(2,1)(5,4) - (4,1)(5,2) + (4,2)(5,1)}{\Delta} dz, \\ dq = -\dfrac{(2,1)(5,3) - (3,1)(5,2) + (3,2)(5,1)}{\Delta} dz, \\ dr = \dfrac{(2,1)(4,3) - (3,1)(4,2) + (3,2)(4,1)}{\Delta} dz. \end{cases}$$

Da wir nunmehr 5 Differenzialgleichungen und 6 Variabeln haben, so kann man sie immer durch ein System von 5 Gleichungen, die eben so viele willkürliche Constanten enthalten, integriren; allein diese 5 Gleichungen bilden ein solches particuläres Integral der vorgelegten Differenzialgleichung (58.), dafs man sich aus demselben zum allgemeinen Integral, welches in einem Systeme dreier, eine willkürliche Function mit sich führenden, Gleichungen besteht, erheben kann.

§. 35.

In der That: denkt man sich die Integrale der 5 Differenzialgleichungen (89.) durch folgende Gleichungen

$$90.\quad \begin{cases} x = \varphi_1(z, a, b, c, g, h), \\ y = \varphi_2(z, a, b, c, g, h), \\ p = \varphi_3(z, a, b, c, g, h), \\ q = \varphi_4(z, a, b, c, g, h), \\ r = \varphi_5(z, a, b, c, g, h) \end{cases}$$

dargestellt, wo φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, φ_5, bekannte Functionen und a, b, c, g, h willkürliche Constanten vorstellen, so müssen folgende Gleichungen bestehen:

$$91.\quad \begin{cases} \varphi'_1(z) = \dfrac{(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)}{\Delta}, \\ \varphi'_2(z) = -\dfrac{(3,1)(5,4)-(4,1)(5,3)+(4.3)(5,1)}{\Delta}, \\ \varphi'_3(z) = \dfrac{(2,1)(5,4)-(4,1)(5,1)+(4.2)(5,1)}{\Delta}, \\ \varphi'_4(z) = -\dfrac{(2,1)(5,3)-(3,1)(5,2)+(3,2)(5,1)}{\Delta}, \\ \varphi'_5(z) = \dfrac{(2,1)(4,3)-(3,1)(4,2)+(3,2)(4,1)}{\Delta}, \end{cases}$$

und wegen der Gleichung (88.) geben diese Gleichungen folgende Gleichung:

$$92.\quad H\varphi'_1(z)+K\varphi'_2(z)+L\varphi'_3(z)+M\varphi'_4(z)+N\varphi'_5(z) = 1.$$

Differenziirt man nun die Gleichungen (90.) nach allen Gröfsen, die sie enthalten, und substituirt die sich so ergebenden Werthe von dx, dy, dp, dq, dr in der vorgelegten Differenzialgleichung (58.), so nimmt dieselbe, wegen der letzten Gleichung, folgende Form an:

$$93.\quad \alpha\, da+\beta\, db+\gamma\, dc+\delta\, dg+\varepsilon\, dh = 0,$$

wo der Kürze wegen

$$94.\quad \begin{cases} \alpha = H\varphi'_1(a)+K\varphi'_2(a)+L\varphi'_3(a)+M\varphi'_4(a)+N\varphi'_5(a), \\ \beta = H\varphi'_1(b)+K\varphi'_2(b)+L\varphi'_3(b)+M\varphi'_4(b)+N\varphi'_5(b), \\ \gamma = H\varphi'_1(c)+K\varphi'_2(c)+L\varphi'_3(c)+M\varphi'_4(c)+N\varphi'_5(c), \\ \delta = H\varphi'_1(g)+K\varphi'_2(g)+L\varphi'_3(g)+M\varphi'_4(g)+N\varphi'_5(g), \\ \varepsilon = H\varphi'_1(h)+K\varphi'_2(h)+L\varphi'_3(h)+M\varphi'_4(h)+N\varphi'_5(h) \end{cases}$$

gesetzt worden ist.

Diese Gleichung nun ist entweder gänzlich von z befreit, oder sie enthält irgend eine Function von z, als gemeinschaftlichen Factor.

Stellt daher Z irgend eine Function von z vor, so kann man immer Z dergestalt bestimmen, dafs die Gleichung

$$Z\alpha\, da+Z\beta\, db+Z\gamma\, dc+Z\delta\, dg+Z\varepsilon\, dh = 0$$

von z gänzlich befreit erscheint.

Um dieses zu beweisen, bestimme man den Werth von $\frac{d.Z\alpha}{dz}$; ferner differenziire man die Gleichung (92.) nach a, multiplicire die so erhaltene Gleichung mit Z und addire sie dann zur vorhergehenden Gleichung, welche den Werth von $\frac{d.Z\alpha}{dz}$ angiebt, so erhält man folgende Gleichung:

$$95.\quad \frac{d.Z\alpha}{dz} = \alpha\left[\frac{dZ}{dz}+Z\frac{\Delta'}{\Delta}\right],$$

wo Δ den Werth aus (88.) hat und

$$\begin{aligned}\Delta' = {} & H_3[(3,2)(5,4)-(4,2)(5,3)+(4,3)(5,2)]\\ & -K_3[(3,1)(5,4)-(4,1)(5,3)+(4,3)(5,1)]\\ & +L_3[(2,1)(5,4)-(4,1)(5,2)+(4,2)(5,1)]\\ & -M_3[(2,1)(5,3)-(3,1)(5,2)+(3,2)(5,1)]\\ & +N_3[(2,1)(4,3)-(3,1)(4,2)+(3,2)(4,1)]\end{aligned}$$

ist.

Nun zeigen die Gleichungen (94.), dafs man, wenn a mit b, c, g, h vertauscht wird, in derselben Ordnung statt α die Gröfsen β, γ, δ, ε erhält; daher giebt die Gleichung (95.) die Werthe von $\frac{d.Z\beta}{dz}$, $\frac{d.Z\gamma}{dz}$, $\frac{d.Z\delta}{dz}$, $\frac{d.Z\varepsilon}{dz}$, wenn man gleichfalls α mit β, γ, δ, ε vertauscht. Es werden mithin folgende Gleichungen:

$$\frac{d.Z\alpha}{dz}=0,\quad \frac{d.Z\beta}{dz}=0,\quad \frac{d.Z\gamma}{dz}=0,\quad \frac{d.Z\delta}{dz}=0,\quad \frac{d.Z\varepsilon}{dz}=0$$

zugleich bestehen können, wenn man Z folgender Gleichung gemäfs bestimmt:

$$\frac{d.Z}{dz}+Z\frac{\Delta'}{\Delta}=0.$$

Bestimmt man also aus dieser Differenzialgleichung Z, und multiplicirt die Gleichung (93.) mit dem so gefundenen Werthe von Z, so ist die letztere Gleichung von z gänzlich frei, und hiermit ist die Differenzialgleichung (58.), welche sechs Variabeln enthielt, in die Gleichung (93.), mit blofs 5 Variabeln, umgesetzt worden.

Nun haben wir in den Paragraphen 21., 22., 23. gezeigt, dafs jede lineare Differenzial-Gleichung mit 5 Variabeln durch ein System dreier Gleichungen, die eine willkürliche Function mit sich führen, integrabel ist; daher gilt eben das auch von der Gleichung (93.).

Denkt man sich diese drei Integrale hergestellt, und substituirt in denselben statt a, b, c, g, h ihre Werthe aus (90.), so erhält man das verlangte System der drei Integrale, die nunmehr die ursprünglichen Variabeln x, y, z, p, q, r enthalten werden.

§. 36.

Zum Schlusse wollen wir noch die Anwendung des in den drei letzten Paragraphen Vorgetragenen auf die Integration einer partiellen Differenzialgleichung erster Ordnung mit vier veränderlichen Gröfsen zeigen.

Stellt z irgend eine Function der drei Variabeln x, y, p vor, und

bedeuten q, r, s die partiellen Differenzialquotienten von z nach x, y, p, so ist allgemein

$$dz = q\,dx + r\,dy + s\,dp.$$

Nun sei folgende partielle Differenzialgleichung:

$$(a.) \qquad qrs = z$$

gegeben.

Setzt man den aus dieser Gleichung folgenden Werth von s in die erste, so hat man

$$(b.) \qquad dz = q\,dx + r\,dy + \frac{z}{qr}\,dp.$$

Vergleicht man diese lineare Differenzialgleichung mit der allgemeinen (58.), so hat man

$$H = q, \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_4 = 0, \quad H_5 = 1, \quad H_6 = 0,$$
$$K = r, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = 0, \quad K_5 = 0, \quad K_6 = 1,$$
$$L = \frac{z}{qr}, \quad L_1 = 0, \quad L_2 = 0, \quad L_3 = \frac{1}{qr}, \quad L_4 = 0, \quad L_5 = -\frac{z}{q^2 r}, \quad L_6 = -\frac{z}{qr^2},$$
$$M = 0, \qquad N = 0.$$

Daher ist nach §. 27.:

$$(2,1) = 0, \quad (3,1) = -\frac{1}{r}, \quad (4,1) = 1, \quad (5,1) = 0,$$
$$(3,2) = -\frac{1}{q}, \quad (4,2) = 0, \quad (5,2) = 1,$$
$$(4,3) = -\frac{z}{q^2 r}, \quad (5,3) = -\frac{z}{qr^2},$$
$$(5,4) = 0,$$

und die Gleichung (88.) giebt:

$$\Delta = -\frac{3z}{qr}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (89.), so hat man folgende fünf gewöhnliche Differenzialgleichungen:

$$dx = \frac{dz}{3q}, \quad dy = \frac{dz}{3r}, \quad dp = \frac{qr}{3z}\,dz, \quad dq = \frac{q\,dz}{3z}, \quad dr = \frac{r\,dz}{3z}.$$

Integrirt man dieselben, so hat man

$$(c.) \quad \begin{cases} x = \frac{1}{2b}\sqrt[3]{z^2} + h, \\ y = \frac{1}{2a}\sqrt[3]{z^2} + g, \\ p = \frac{ab}{2}\sqrt[3]{z^2} + c, \\ q = b\sqrt[3]{z}, \\ r = a\sqrt[3]{z}. \end{cases}$$

Differenziirt man diese Gleichungen nach allen Gröfsen, die sie enthalten, und substituirt die sich ergebenden Werthe von dx, dy, dp in der Gleichung ($b.$), so erhält man, nach Weglassung des gemeinschaftlichen Factors $\sqrt[3]{z}$, folgende Gleichung:

$$(d.) \qquad bdh + adg + \frac{dc}{ab} = 0;$$

und hiemit haben wir, vermittelst der Gleichungen ($c.$), die Differenzialgleichung ($b.$), von sechs Variabeln, in die letzte, welche blofs 5 enthält, transformirt.

In dieser letzten Gleichung mufs nach §. 22. einstweilen eine der Variabeln als Constante betrachtet werden. Sehen wir b als solche an, und setzen, um diese Gleichung leichter mit der allgemeinen Differenzialgleichung (11.) vergleichen zu können, $c = z'$, $h = x'$, $g = y'$, $a = p'$, so geht sie in folgende über:

$$(e.) \qquad dz' = -p'b^2 dx' - bp'^2 dy',$$

wodurch man, nach §. 4., Gleichungen (11.) und (14.), folgende Gleichungen erhält:

$$H = -b^2 p', \quad H_1 = 0, \quad H_2 = 0, \quad H_3 = 0, \quad H_4 = -b^2,$$
$$K = -bp'^2, \quad K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0, \quad K_4 = -2bp',$$
$$L = 0.$$

Die Gleichungen (23.) gehen dann in folgende über:

$$(2,1) = 0, \quad (3,1) = -b^2, \quad (3,2) = -2bp',$$

und die letzte Gleichung aus §. 8. giebt:

$$\Delta = b^3 p'^2;$$

daher geben die Gleichungen (26.)

$$dx' = -\frac{2dz'}{b^2 p'}, \qquad dy' = \frac{dz'}{bp'^2}, \qquad dp' = 0;$$

folglich, durch Integration:

$$(f.) \qquad x' = -\frac{2z'}{a'b^2} + c', \qquad y' = \frac{z'}{a'^2 b} + b', \qquad p' = a'.$$

Differenziirt man diese Gleichungen, indem man auch a', b', c' als variabel betrachtet, und substituirt die gefundenen Werthe von dx', dy' in ($e.$), so hat man

$$bdc' + a'db' = 0.$$

Es ist also mit Hülfe der Gleichungen ($f.$) die Differenzialgleichung ($e.$) mit 4 Variabeln z', x', y', p' in die zuletzt aufgestellte mit den drei Variabeln a', b', c' umgesetzt worden.

Diese letzte Gleichung wird nach §. 3., wenn anfänglich a' als Constante vorausgesetzt wird, durch das System folgender zwei Gleichungen:

$$bc' + a'b' = \varphi(a'), \qquad b' = \varphi'(a')$$

integrirt; wo $\varphi(a')$ jede willkürliche Function von a' vorstellt.

Setzt man hier statt a', b', c' ihre Werthe aus $(f.)$, so hat man

$$bx' + y'p' + \frac{z'}{bp'} = \varphi(p'), \qquad y' - \frac{z'}{bp'^2} = \varphi'(p').$$

Setzt man die obigen Werthe von x', y', z', p' zurück, nemlich $x' = h$, $y' = g$, $z' = c$, $p' = a$, so hat man statt der letzten Gleichungen folgende:

$$bh + ag + \frac{c}{ab} = \varphi(a), \qquad g - \frac{c}{a^2 b} = \varphi'(a).$$

Diese Gleichungen stellen die Integrale von $(d.)$ unter der Voraussetzung, dafs b constant ist, vor; läfst man aber b variabel sein, so wird die willkürliche Function aufser a auch b enthalten, und man wird dann folgende drei Integrale der Gleichung $(d.)$ haben:

$$ag + bh + \frac{c}{ab} = \varphi(a, b),$$

$$g - \frac{c}{a^2 b} = \varphi'(a),$$

$$h - \frac{c}{ab^2} = \varphi'(b).$$

Setzt man hier endlich statt a, b, c, g, h ihre Werthe aus $(c.)$, so hat man:

$$qx + ry + \left(\frac{p}{qr} - \frac{r}{2}\right) z = \sqrt[3]{z}\, \varphi\left(\frac{q}{\sqrt[3]{z}}, \frac{r}{\sqrt[3]{z}}\right),$$

$$x - \frac{pz}{q^2 r} = \varphi'\left(\frac{q}{\sqrt[3]{z}}\right),$$

$$y - \frac{pz}{qr^2} = \varphi'\left(\frac{r}{\sqrt[3]{z}}\right),$$

welche drei Gleichungen die Integrale von $(b.)$ vorstellen. Wenn aus denselben q und r eliminirt werden, so erhält man eine einzige Gleichung zwischen x, y, z, p, die das Integral der partiellen Differenzialgleichung $(a.)$ sein wird.

14.

Integralia elliptica tertiae speciei reducendi methodus simplicior, quae simul ad ipsorum applicationem facillimam et computum numericum expeditum perducit.

Sectionum conico-sphaericarum quadratura et rectificatio.

(Auct. Dr. *Chr. Gudermann*, prof. math. Monast. Guestph.)

1.

Theorema Geometriae sphaericae generalissimum de relatione inter quadraturam curvae cujuslibet sphaericae et rectificationem curvae reciprocae, quod ante biennium analytice inveni, posteaque et geometrice demonstravi, mira gaudet simplicitate, et simul relationem sistit inter integrale qualecunque datum et integrale alterum lege quadam cum dato conjunctum. Si in specie theorema hoc applicamus ad relationem inter quadraturam sectionis conico-sphaericae et rectificationem curvae reciprocae, incidimus in relationem quandam inter integralia elliptica tertiae speciei, quae ipsam sagacitatem virorum illustrissimorum de excolenda theoria functionum ellipticarum summopere meritorum per longum tempus effugit. Cl^mus^ *Legendre* ipsam, uti videtur, primus invenit, ipsamque cummunicavit in operis sui excellentis tomo tertio (*Deuxième Supplément pag.* 44. *formula* 72.). Haec formula, cujus et significatio geometrica cognita mihi est, ad reducendum aptissima esse videtur.

Studio Cl^mi^ *Jacobi* theoria functionum ellipticarum et earum, quae sunt tertiae speciei, mirum in modum promota est; ea vero integralis elliptici forma, quae ipsi est primitiva realis, naturae est hyperbolicae; theoria hujus integralis est simplicior, at minus prodest, quia in applicationibus Analyseos ad Geometriam, imprimis sphaericam et Dynamicam, rarissime incidimus in integrale, quod sit naturae hyperbolicae (*à paramètre logarithmique, in terminis Ill^mi^ Legendre*) frequentissime vero incidimus in integralia elliptica tertiae speciei, quae cyclicae sunt naturae (*à paramètre circulaire*), quae adjumento signorum Cl^mi^ *Jacobi* nonnisi in forma

imaginaria exhiberi possunt. Displicet nobis haec forma, aliisque igitur utimur signis, ne formae attentione dignissimae sint imaginariae. Alias insuper functiones ellipticae tertiae speciei sequuntur leges, si sunt cyclicae naturae, alias si sunt hyperbolicae, ideoque functiones cum diligentia sunt distinguendae, ne falsa habeamus pro veris.

Incidit et ipse Cl^mus^ *Jacobi* in errorem (si vera refert Cl^mus^ *Legendre*, *Deuxième Supplément pag.* 142, nam hanc illius affirmationem alio non inveni loco), si existimavit, functiones quae cyclicae sunt naturae, pari modo ac eas, quae hyperbolicae sunt, *in forma reali* reduci posse ad functiones duorum tantum argumentorum.

Ubi vero agitur de computando valore functionis, quae est cyclicae naturae, vix ullam invenies in Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum formulam, qua hunc in finem uti queas.

Ill^mus^ *Legendre* fuit primus, qui formulas e formulis Cl^mi^ *Jacobi* eruerit, formulas pro $\operatorname{tang}\Omega$ et $\operatorname{tang}\Omega'$ (*Deuxième Supplement pag.* 146 *et* 147), quibus uti queamus ad computum numericum functionis, si est cyclicae naturae. Formulae modo dictae paullum mutatae sunt adjumento signorum, quibus ego functiones hyperbolicas designavi, in dissertatione excellenti. „De motu gyratorio corporis rigidi, auctore *A. St. Rueb* (Roterodamensi)," quae Trajecti ad Rhenum edita anno 1834 sine epistola per longas ambages nuperrime ad manus meas pervenit, donum mihi pergratum.

Intellexit jam auctor huius dissertationis spectatissimus, calculum numericum functionum ellipticarum earum, quae cyclicae sunt generis, magnopere promoveri adjumento tabularum, quas paravi, functionum hyperbolicarum.

Alias vero inveni formulas, et quidem series simplices tam rapide convergentes, ut plerumque jam duo aut tres termini primi functionis computandae valorem accuratius, quam desideratur, exhibeant, functio sit hyperbolicae naturae, nec ne.

Calculum invenietis esse tam expeditum, ut meditationes de conficiendis tabulis, quae valores functionis $\Theta(x)$ contineant etiam tunc, si est x formae $a \pm b\sqrt{-1}$, mittere queamus omnes; ipsarum vanitas hodie jam satis elucet.

Abbreviationes sequentes, ne manus in pingendis formulis defatigetur, benigne excusabitis:

sn u loco sinam u; cn u loco cosam u; tn u loco tangam u; et dn u loco $\triangle$am u.

Functionum dn u equidem lego *Differentem* amplitudinis argumenti u, in lingua vernacula: Die Differente, quia in hac potissimum functione omnes functiones ellipticae (primae speciei) differunt a functionibus tum cyclicis, tum hyperbolicis vulgaribus.

Si loco moduli k alius, e. g. ipsius complementum $k' = \sqrt{(1-k^2)}$ intelligendus est, modulus hic eodem modo, quo in *Fundamentis novis theoriae functionum ellipticarum* postponetur argumento parametri, vel si parameter non adest, argumento amplitudinis. Sit uti in Fundamentis $\text{am}(K,k) = \text{am}(K',k') = \frac{\pi}{2}$.

2.

De functionibus ellipticis secundae speciei praemittamus pauca, quibus utimur in sequentibus. Secundum ipsa praecepta Ill^mi *Jacobi* post edita Fundamenta in huius diarii tomo quarto (pag. 373.) ponamus

$$1. \qquad E(u) = \int_0^u \text{dn}\, u^2 . \partial u,$$

et sit $E(K,k) = E$, et $E(K',k') = E'$. Functio elliptica $E(u)$ est secundae speciei, a duobus pendens elementis, argumento amplitudinis u et modulo k.

Cum functione $E(u)$ conjuncta est per legem reciprocitatis alia. Ponatur ui loco u, et dejiciatur factor i ($i = \sqrt{-1}$); functio nova iterum realis est et, designetur signo $\overset{1}{E}(u)$; e definitione hac est

$$\overset{1}{E}(u) = \int_0^u (\text{dn}\, ui)^2 . \partial u;$$

quia vero est $\text{dn}(ui) = \frac{\text{dn}(u,k')}{\text{cn}(u,k')}$, eadem formula in forma reali est

$$2. \qquad \overset{1}{E}(u) = \int_0^u \frac{\text{dn}(u,k')^2}{\text{cn}(u,k')^2} \partial u.$$

Legem reciprocitatis exprimunt formulae

$$3. \qquad E(ui) = i . \overset{1}{E}(u) \quad \text{et} \quad \overset{1}{E}(ui) = iE(u)$$

in formis imaginariis. Eadem vero lex, sive idem nexus etiam in forma reali exprimi potest. Notum est, differentiando productum tn u dn u obtineri $\partial(\text{tn}\, u\, \text{dn}\, u) = \frac{\text{dn}\, u^2}{\text{cn}\, u^2} \partial u - k^2 \text{sn}\, u^2 \partial u$, quare integrando oritur formula persimplex

$$4. \qquad \overset{1}{E}(u,k') + E(u) = u + \text{tn}\, u\, \text{dn}\, u.$$

3.

Ponamus brevitatis causa in sequentibus

$$\eta = \frac{\pi}{K} \quad \text{et} \quad \eta' = \frac{\pi}{K'},$$
$$h = e^{-\eta K'} \quad \text{et} \quad h' = e^{+\eta' K},$$

tunc permutatis duobus modulis k et k' permutantur η et η', porro h et h'. Nota est ex Fundamentis series (pag. 110. forml. 1.)

$$k^2 . \frac{4}{\eta^2} . \left(\operatorname{sn}\frac{2x}{\eta}\right)^2 = \frac{4}{\eta^2} - \frac{4}{\eta} . \frac{E}{\pi} - 8\left[\frac{h\cos 2x}{1-h^2} + \frac{2h^2\cos 4x}{1-h^4} + \frac{3h^3\cos 6x}{1-h^6} + \text{etc.}\right],$$

quae ponendo $\frac{2x}{\eta} = u$ abit in hanc:

$$k^2 \operatorname{sn} u^2 = 1 - \frac{E}{K} - 2\eta^2\left[\frac{h\cos\eta u}{1-h^2} + \frac{2h^2\cos 2\eta u}{1-h^4} + \frac{3h^3\cos 3\eta u}{1-h^6} \ldots\right],$$

sive, quia $1 - k^2 \operatorname{sn} u^2 = \operatorname{dn} u^2$ est, in hanc simpliciorem

$$\operatorname{dn} u^2 = \frac{E}{K} + \frac{2\eta^2 h\cos\eta u}{1-h^2} + \frac{4\eta^2 h^2\cos 2\eta u}{1-h^4} + \frac{6\eta^2 h^3\cos 3\eta u}{1-h^6} + \text{etc.}$$

Si aequationem hanc multiplicamus factore ∂u, integrando provenit

$$E(u) = \frac{E}{K}u + \frac{2\eta h\sin\eta u}{1-h^2} + \frac{2\eta h^2\sin 2\eta u}{1-h^4} + \frac{2\eta h^3\sin 3\eta u}{1-h^6} + \text{etc.}$$

Ponamus nunc brevitatis causa

1. $$M(u) = \frac{2h\eta\sin\eta u}{1-h^2} + \frac{2h^2\eta\sin 2\eta u}{1-h^4} + \frac{2h^3\eta\sin 3\eta u}{1-h^6} + \text{etc.}$$

tunc enim est

2. $$E(u) = \frac{E}{K} . u + M(u).$$

Ponendo in serie pro $M(u)$ inventa ui loco u, et factorem inde ortum i dejiciendo, nova oritur functio, quam per $\overset{1}{M}(u)$ designemus; quare est

3. $$\overset{1}{M}(u) = \frac{2h . \eta\,\mathfrak{Sin}\,\eta u}{1-h^2} + \frac{2h^2\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{1-h^4} + \frac{2h^3 . \eta\,\mathfrak{Sin}\,3\eta u}{1-h^6} + \text{etc.},$$

et functio $\overset{1}{E}(u)$ nunc exprimitur formula

4. $$\overset{1}{E}(u) = \frac{E}{K} . u + \overset{1}{M}(u).$$

Quia est $\frac{2h^n}{1-h^{2n}} = \frac{2}{h^{-n} - h^{+n}} = \frac{2}{h^{n\eta K'} - h^{-n\eta K'}}$, duae series elegantiori modo exhibentur hoc

5. $$M(u) = \frac{\eta\sin\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\eta\sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\eta\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.},$$

6. $$\overset{1}{M}(u) = \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.}$$

Nunc clarius perspicitur, seriem 5. semper rapide convergere, seriem vero 6. lente convergere, si est $u < K'$.

4.

Series in articulo praecedenti inventae ita transformari possunt, ut multo rapidius convergant. Quia enim est

$$\frac{h^n}{1-h^{2n}} = h^n + h^{3n} + h^{5n} + h^{7n} + \text{etc.}$$

invenimus

$$\begin{aligned} M(u) = \quad & 2h\eta \sin \eta u + 2h^3\eta \sin 2\eta u + 2h^5\eta \sin 3\eta u + \text{etc.} \\ & + 2h^3\eta \sin \eta u + 2h^6\eta \sin 2\eta u + 2h^9\eta \sin 3\eta u + \text{etc.} \\ & + 2h^5\eta \sin \eta u + 2h^{10}\eta \sin 2\eta u + 2h^{15}\eta \sin 3\eta u + \text{etc.} \\ & + \text{etc.} \end{aligned}$$

Quaevis vero series horizontaliter posita summari potest; notissima enim est formula

$$h \sin z + h^2 \sin 2z + h^3 \sin 3z + \text{etc.} = \frac{h \sin z}{1 - 2h\cos z + h^2},$$

qua adhibita obtinemus

$$M(u) = \frac{2h\eta \sin \eta u}{1-2h\cos \eta u + h^2} + \frac{2h^3\eta \sin \eta u}{1-2h^3\cos \eta u + h^6} + \frac{2h^5\eta \sin \eta u}{1-2h^5\cos \eta u + h^{10}} + \text{etc.},$$

et

$$\mathfrak{M}(u) = \frac{2h\eta \operatorname{Sin} \eta u}{1-2h\operatorname{Cos}\eta u + h^2} + \frac{2h^3\eta \operatorname{Sin} \eta u}{1-2h^3\operatorname{Cos}\eta u + h^6} + \frac{2h^5\eta \operatorname{Sin} \eta u}{1-2h^5\operatorname{Cos}\eta u + h^{10}} + \text{etc.}$$

Quia est

$$\frac{2h^n . \eta \sin \eta u}{1-2h^n\cos \eta u + h^{2n}} = \frac{\eta . \sin \eta u}{\frac{h^{-n}+h^{+n}}{2} - \cos \eta u} = \frac{\eta \sin \eta u}{\operatorname{Cos}(n\eta K') - \cos \eta u},$$

formulae hoc elegantiori exhiberi possunt modo

1. $$M(u) = \frac{\eta \sin \eta u}{\operatorname{Cos}\eta K' - \cos \eta u} + \frac{\eta \sin \eta u}{\operatorname{Cos} 3\eta K' - \cos \eta u} + \frac{\eta \sin \eta u}{\operatorname{Cos} 5\eta K' - \cos \eta u} + \text{etc.}$$

2. $$\mathfrak{M}(u) = \frac{\eta \operatorname{Sin} \eta u}{\operatorname{Cos}\eta K' - \operatorname{Cos}\eta u} + \frac{\eta \operatorname{Sin} \eta u}{\operatorname{Cos} 3\eta K' - \operatorname{Cos}\eta u} + \frac{\eta \operatorname{Sin} \eta u}{\operatorname{Cos} 5\eta K' - \operatorname{Cos}\eta u} + \text{etc.}$$

Series 1. etiam in his formis repraesentari potest

3. $$M(K-u) = \frac{\eta \sin \eta u}{\operatorname{Cos}\eta K' + \cos \eta u} + \frac{\eta \sin \eta u}{\operatorname{Cos} 3\eta K' + \cos \eta u} + \frac{\eta \sin \eta u}{\operatorname{Cos} 5\eta K' + \cos \eta u} + \text{etc.},$$

4. $$M\left(\frac{K}{2} - u\right) = \frac{\eta \cos \eta u}{\operatorname{Cos}\eta K' - \sin \eta u} + \frac{\eta \cos \eta u}{\operatorname{Cos} 3\eta K' - \sin \eta u} + \frac{\eta \cos \eta u}{\operatorname{Cos} 5\eta K' - \sin \eta u} + \text{etc.}$$

E serie 3. facillime perspicitur, esse $M(K) = 0$,

5. $$\begin{cases} M(K+u) = -M(K-u), & \text{ergo } M(2K-u) = -M(u), \\ M(2K+u) = M(u). \end{cases}$$

E serie 2. perspicitur, esse

$$6. \quad \dot{M}(u) = \tfrac{1}{0}, \quad \text{si est} \quad u = (2n+1).K'$$

qua in formula n designat numerum integrum quemcunque. Quia est

$$E(u) = \frac{E}{K}.u + M(u), \quad \text{ergo}$$

$$E(2K-u) = \frac{E}{K}(2K-u) - M(u),$$

addendo provenit

$$7. \quad E(u) + E(2K-u) = 2E.$$

5.

Si in aequatione $\dot{E}(uk') + E(u) = u + \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u$ substituimus valores

$$E(u) = u.\frac{E}{K} + M(u) \quad \text{et} \quad E'(u,k') = u.\frac{E'}{K'} + \dot{M}(u,k')$$

provenit $u\left[\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1\right] + M(u) + \dot{M}(u,k') = \operatorname{tn} u.\operatorname{dn} u$; quia vero ab Illmo *Legendre* inventum est, esse $\frac{E}{K} + \frac{E'}{K'} - 1 = \frac{\pi}{2KK'}$, formula reducitur ad

$$1. \quad \dot{M}(u,k') + M(u) = \operatorname{tn} u.\operatorname{dn} u - \frac{\pi u}{2KK'},$$

qua functiones $\dot{M}(u,k')$ et $M(u)$ ad se invicem reducuntur. Ponamus in sequentibus modulos duos

$$k = \sin\vartheta \quad \text{et} \quad k' = \sin\theta',$$

tunc est

$$\theta + \theta' = 90°.$$

Quantitas K' eodem modo pendet ab angulo θ', quo K ab angulo θ. Crescente θ crescit K, et decrescit θ', quare etiam K'. Est

$$K' = K, \text{ si est } \theta = \theta' = 45°.$$

Si est $\theta < 45°$, $\frac{K'}{K} > 1$ est, quare $\eta K' > \pi$, et si vice versa est

$$\theta' < 45°, \text{ etiam } \eta' K > \pi \text{ est.}$$

Ponamus, θ esse $< 45°$, tunc et $\eta K' > \pi$; $3\eta K' > 3\pi$; $5\eta K' > 5\pi$ etc.; quare functiones hyperbolicae $\mathfrak{Cos}\,\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,3\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,5\eta K'$ etc. citissime crescunt; est e. g. $\mathfrak{Cos}(5\eta K') > 10000000$; *quare series articuli praecedentis rapidissime convergunt, si est* $\theta < 45°$.

Si est $\theta > 45°$, est $\theta' < 45°$, et quia tum

$$M(u) = \operatorname{tn} u.\operatorname{dn} u - \frac{\pi u}{2KK'} - \dot{M}(u,k'), \quad \text{tum}$$

$$\dot{M}(u) = \operatorname{tn}(u,k').\operatorname{dn}(u,k') - \frac{\pi u}{2KK'} - M(u,k')$$

est, quibus formulis $M(u)$ et $\overset{\text{I}}{M}(u)$ ad $\overset{\text{I}}{M}(u,k)$ et $M(u,k')$ reducuntur, nunc utimur seriebus

$$\overset{\text{I}}{M}(u,k') - \frac{\eta' \mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K - \mathfrak{Cos}\,\eta' u} + \frac{\eta' \mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K - \mathfrak{Cos}\,\eta' u} + \frac{\eta' \mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K - \mathfrak{Cos}\,\eta' u} + \text{etc.},$$

$$M(u,k') - \frac{\eta' \sin \eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K - \cos \eta' u} + \frac{\eta' \sin \eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K - \cos \eta' u} + \frac{\eta' \sin \eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K - \cos \eta' u} + \text{etc.},$$

quae, quia $\theta' < 45^\circ$ est, iterum rapidissime convergunt. Ceterum series articuli praecedentis ea gaudent proprietate, quod semper convergunt.

Si vero reductionem modo dictam adhibemus, calculus ita instituitur, ut tria aut quatuor serierum membra prima sufficiant ad valorem quaesitum accuratius, quam plerumque desideratur, inveniendum.

Quia in tabulis a Cl^mo *Legendre* editis valores functionis $E(u)$ contenti sunt, vice versa his etiam uti possumus tabulis, ad valores functionum $M(u)$ et $\overset{\text{I}}{M}(u)$ inveniendos; quare tunc utimur formulis

2. $M(u) = E(u) - u \cdot \frac{E}{K}$, et $\overset{\text{I}}{M}(u) = u + \text{tn}(u,k')\,\text{dn}(u,k') - E(u,k') - u \cdot \frac{E}{K}$

sive

$$3. \qquad \overset{\text{I}}{M}(u) = u + \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u - E(u) - u \cdot \frac{E'}{K'},$$

sive

$$\overset{\text{I}}{M}(u,k') = \text{tn}\,u\,\text{dn}\,u - \frac{\pi u}{2KK'} - E(u) + u \cdot \frac{E}{K}.$$

6.

Differentiando $v = \frac{\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{dn}\,u^2}{1 - k^2\,\text{sn}\,a^2 \cdot \text{sn}\,u^2}$ invenimus formulam

$$\partial v = \frac{-2k^2\,\text{sn}\,a\,\text{cn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u\,\text{dn}\,u}{(1 - k^2\,\text{sn}\,a^2\,\text{sn}\,u^2)^2} \cdot \partial u;$$

quia vero est $\text{dn}(a+u) + \text{dn}(a-u) = \frac{2\,\text{dn}\,a\,\text{dn}\,u}{1 - k^2\,\text{sn}\,a^2\,\text{sn}\,u^2}$ et

$$\text{dn}(a+u) - \text{dn}(a-u) = \frac{-2k^2\,\text{sn}\,a\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,a\,\text{cn}\,u}{1 - k^2\,\text{sn}\,a^2\,\text{sn}\,u^2}$$

multiplicando oritur

$$\frac{\text{dn}(a+u)^2 - \text{dn}(a-u)^2}{2} = \frac{dv}{du},$$

sive

$$\frac{\partial E(a+u) + \partial E(a-u)}{2} = \partial v,$$

quare integratio praebet $\frac{E(a+u) + E(a-u)}{2} = \text{const.} + \frac{\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{dn}\,u^2}{1 - k^2\,\text{sn}\,a^2\,\text{sn}\,u^2}$; pro $u = 0$ formula abit in $E(a) = \text{const.} + \text{tn}\,a\,\text{dn}\,a$, quare est

$$1. \qquad \frac{E(a+u) + E(a-u)}{2} - E(a) = \frac{\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{dn}\,u^2}{1 - k^2\,\text{sn}\,a^2\,\text{sn}\,u^2} - \text{tn}\,a\,\text{dn}\,a.$$

Reducendo membrum aequationis secundum formula est

$$2. \qquad \frac{E(a+u)+E(a-u)}{2} - E(a) = -\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u^2}{1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2}.$$

Permutatis inter se a et u, quo $a-u$ abit in $-(a-u)$, ideoque $E(a-u)$ in $-E(a-u)$ oritur formula

$$\frac{E(a+u)-E(a-u)}{2} - E(u) = -\frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a^2}{1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2},$$

quae addita aequationi priori praebet

$$E(a+u)-E(a)-E(u) = -k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u . \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a}{1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2};$$

quia vero est $\operatorname{sn}(a+u) = \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u + \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \operatorname{sn} a}{1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2}$, formula reducitur ad simplicem hanc

$$3. \qquad E(u)+E(a)-E(a+u) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+u).$$

Si ponimus $a+u=K$, ergo $a=K-u$, est $\operatorname{sn}(a+u)=1$, $\operatorname{sn} a = \frac{\operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}$, quare

$$4. \qquad E(K-u)+E(u) = E + \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}.$$

Si in formula (3.) ponitur ai loco a et ui loco u, dejecto factore i formula abit in

$$5. \qquad \overset{1}{E}(u)+\overset{1}{E}(a)-\overset{1}{E}(a+u) = -k^2 \operatorname{tn}(a,k') . \operatorname{tn}(u,k') . \operatorname{tn}(a+u,k').$$

Si in formula 2. substituimus

$$E(a+u) = (a+u) . \frac{E}{K} + M(a+u),$$

$$E(a-u) = (a-u) . \frac{E}{K} + M(a-u),$$

$$E(a) = a . \frac{E}{K} + M(a),$$

formula abit in hanc

$$6. \qquad \frac{M(a+u)+M(a-u)}{2} - M(a) = -\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u^2}{1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2}.$$

Pari modo formula 3. abit in

$$7. \qquad M(u)+M(a)-M(a+u) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+u).$$

Quia est $M(K)=0$, e formula hac sequitur, esse

$$8. \qquad M(K-u)+M(u) = \frac{k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u};$$

addimus adhuc formulam

$$9. \qquad \overset{1}{M}(u)+\overset{1}{M}(a)-\overset{1}{M}(a+u) = -k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{tn}(u,k') \operatorname{tn}(a+u,k').$$

7.

Formula in articulo praecedenti inventa

$$1. \qquad \frac{k^2 . \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u^2}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2} = M(a) - \frac{M(a+u) + M(a-u)}{2},$$

sive

$$\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u^2}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2} = M(a) - \frac{M(a+u) + M(a-u)}{2}$$

pro theoria functionum ellipticarum tertiae speciei gravissimi est momenti. Formulam hanc alio etiam modo exhibere possumus. Quia enim est

$$\overset{\imath}{M}(a, k') + M(a) = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a - \frac{\pi a}{2KK'},$$

est

$$2. \qquad \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn} u^2}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2} = \overset{\imath}{M}(a, k') + \frac{\pi a}{2KK'} + \frac{M(a+u) + M(a-u)}{2}.$$

Si in formulis his ponitur simul ai loco a et ui loco u, functiones $M(a+u)$ et $M(a-u)$ abeunt in $i\overset{\imath}{M}(a+u)$ et $i\overset{\imath}{M}(a-u)$, $M(a)$ mutatur in $i\overset{\imath}{M}(a)$ et $\overset{\imath}{M}(a, k')$ in $iM(a, k')$, quare in utraque formula factor communis i dejici postest, quo formulae in formam realem redeunt.

Si vero u realem retinemus, at ai loco a ponimus, vel si a realem retinemus et ui loco u ponimus, utraque formula formam imaginariam induit, quae non in formam realem redigi potest, nisi functiones $M(ai+u)$ et $M(ai-u)$ in casu primo, sive $M(a+ui)$ et $M(a-ui)$ in casu secundo evolvimus; hac vero evolutione forma aequationum (1.) et (2.) simplex perit, et ad identitates relabimur.

8.

Si aequationem (1.) calculi praecedentis multiplatam factore ∂u integramus, prodit, posito

$$1. \qquad \mathfrak{P}(u, a) = \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{sn} a . \operatorname{cn} a . \operatorname{dn} a . \operatorname{sn} u^2 . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2},$$

formula

$$\mathfrak{P}(u, a) = u . M(a) - \int_0^u \frac{du\, M(a+u) + du\, M(a-u)}{2}.$$

Ponamus porro

$$\mathfrak{N}(u, a) = \tfrac{1}{2} \int_0^u [\partial u\, M(a+u) + \partial u\, M(a-u)]$$

sive

$$2. \qquad \frac{\partial \mathfrak{N}(u, a)}{\partial u} = \frac{M(a+u) + M(a-u)}{2},$$

tunc est formula

$$3. \qquad \mathfrak{P}(u, a) = u . M(a) - \mathfrak{N}(u, a).$$

Punctio $\mathfrak{P}(u, a)$ est idem integrale ellipticum, quod in Fundamentis a Cl^mo *Jacobi* designatur per $\Pi(u, a)$. Quia vero haec functio, quod mox videbimus, est naturae hyperbolicae, signum Germanicum $\mathfrak{P}(u, a)$ praeferimus; functiones eas, quae sunt cyclicae naturae, signis latinis designabimus. Functionem $\mathfrak{N}(u, a)$ nunc in seriem evolvamus.

Est secundum articulum 3.

$$M(a+u) = \frac{2h\eta \sin(\eta a+\eta u)}{1-h^2} + \frac{2h^2\eta \sin(2\eta a+2\eta u)}{1-h^4} + \frac{2h^3\eta \sin(3\eta a+3\eta u)}{1-h^6} + \text{etc.},$$

$$M(a-u) = \frac{2h\eta \sin(\eta a-\eta u)}{1-h^2} + \frac{2h^2\eta \sin(2\eta a-2\eta u)}{1-h^4} + \frac{2h^3\eta \sin(3\eta a-3\eta u)}{1-h^6} + \text{etc.}$$

quare addendo provenit

$$\frac{M(a+u)+M(a-u)}{2}$$

$$= \frac{2h\eta \sin\eta a \,.\, \cos\eta u}{1-h^2} + \frac{2h^2\eta \sin 2\eta a \cos 2\eta u}{1-h^4} + \frac{2h^3\eta \sin 3\eta a \cos 3\eta u}{1-h^6} + \text{etc.};$$

si series haec multiplicata factore ∂u integratur, obtinemus seriem adhuc simpliciorem

$$4.\quad \mathfrak{N}(u, a) = \frac{2h \sin\eta a \sin\eta u}{1(1-h^2)} + \frac{2h^2 \sin 2\eta a \,.\, \sin 2\eta u}{2(1-h^4)} + \frac{2h^3 \sin 3\eta a \sin 3\eta u}{3(1-h^6)} + \text{etc.}$$

Constantem uon addimus terminum, quia integrale hoc jam evanescit, si $u = 0$ ponitur. Si a et u sunt numeri reales, quod hic supponimus, series semper satis cito convergit. Formula haec etiam hoc modo exhiberi potest

$$4.\quad \mathfrak{N}(u, a) = \left[\frac{h\cos(\eta a-\eta u)}{1(1-h^2)} + \frac{h^2\cos(2\eta a-2\eta u)}{2(1-h^4)} + \frac{h^3\cos(3\eta a-3\eta u)}{3(1-h^6)} + \text{etc.}\right]$$
$$- \left[\frac{h\cos(\eta a+\eta u)}{1(1-h^2)} + \frac{h^2\cos(2\eta a+2\eta u)}{2(1-h^4)} + \frac{h^3\cos(3\eta a+3\eta u)}{3(1-h^6)} + \text{etc.}\right]$$

Si signum h rejicimus applicando functiones hyperbolicas, est in formis elegantioribus

$$5.\quad \mathfrak{N}(u, a) = \frac{\sin\eta a \,.\, \sin\eta u}{1\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\sin 2\eta a \,.\, \sin 2\eta u}{2\,.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\sin 3\eta a \,.\, \sin 3\eta u}{3\,.\,\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.}$$

et series 4. nunc, pari modo transformata, est

$$2\,\mathfrak{N}(u, a) = \begin{cases} \dfrac{\cos(\eta a-\eta u)}{1\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \dfrac{\cos(2\eta a-2\eta u)}{2\,.\,\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \dfrac{\cos(3\eta a-3\eta u)}{3\,.\,\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.} \\ -\dfrac{\cos(\eta a+\eta u)}{1\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - \dfrac{\cos(2\eta a+2\eta u)}{2\,.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \dfrac{\cos(3\eta a+3\eta u)}{3\,.\,\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.} \end{cases}$$

Novam eligamus functionem $\mathfrak{O}(x)$ talem, ut sit

$$6.\quad \text{const.} - \frac{\cos\eta x}{1\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta K'} - \frac{\cos 2\eta x}{2\,.\,\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} - \frac{\cos 3\eta x}{3\,.\,\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} - \text{etc.} = \log\mathfrak{O}(x)$$

formula pro $2.\mathfrak{N}(u, a)$ modo inventa simpliciori hoc exprimi potest modo:

$$2.\mathfrak{N}(u, a) = \log \mathfrak{D}(a+u) - \log \mathfrak{D}(a-u),$$

sive

$$7. \quad \mathfrak{N}(u, a) = \tfrac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{D}(a+u)}{\mathfrak{D}(a-u)},$$

ideoque integrale ellipticum $\mathfrak{P}(u, a)$ ipsum exprimitur formula

$$8. \quad \mathfrak{P}(u, a) = u.M(a) - \tfrac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{D}(a+u)}{\mathfrak{D}(a-u)}.$$

Functiones $M(x)$ et $\mathfrak{D}(x)$, ad quas integrale $\mathfrak{P}(u, a)$ a tribus argumentis u, a et k pendens revocatum, nonnisi duorum argumentorum x et k functiones sunt. Si igitur tabulae conficeruntur, e quibus pro omnibus valoribus argumentorum x et k quantitates $M(x)$ et $\mathfrak{D}(x)$ desumendae essent, hinc etiam valores $M(a)$, $\mathfrak{D}(a, -u)$ et $\mathfrak{D}(a+u)$ in formula (8.) substituendi desumi possent, ideoque computus functionis $\mathfrak{P}(u, a)$ numericus ad usum tabularum revocaretur, qui numeros continerent a duobus tantummodo argumentis pendentes. Quod inventum egregium Cl^mi *Jacobi* est summi specimen ingenii, studiique profundi laurea. Eo magis vero dolendum est, inventi hujus gloriosi utilitatem esse exiguam, cum functio $\mathfrak{P}(u, a)$ ob hyperbolicam naturam extra Analysin, scilicet in ipsius applicationibus ad Geometriam et Mechanicam tam raro in usum venit, ut tabulas pro functione $\mathfrak{D}(x)$ elaborari pro tempore adhuc vix operae pretium esse videatur.

Necessitas, si aliquando erit, tabularum pro functione nova $\mathfrak{D}(x)$ non causam in Geometria et Dynamica, sed in ipsa Analysi pura promota sive promovenda habebit.

9.

Si in serie 5. articuli praecedentis $K-u$ loco u, ergo $\pi-\eta u$ loco ηu, obtinemus

$$1. \quad \mathfrak{N}(K-u, a) = \frac{\sin \eta a \sin \eta u}{1.\mathfrak{Sin}\, \eta K'} - \frac{\sin 2\eta a \sin 2\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} + \frac{\sin 3\eta a \sin 3\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\, 3\eta K'} - + \text{etc.}$$

quia in serie hac posito $u = 0$, omnes termini evanescunt, est

$$2. \quad \mathfrak{N}(K, a) = 0.$$

Si etiam in formula $\mathfrak{P}(u, a) = u.M(a) - \mathfrak{N}(u, a)$ ponimus $u = K$, obtinemus

$$3. \quad \begin{cases} \mathfrak{P}(K, a) = K.M(a), \text{ sive} \\ \mathfrak{P}(K, a) = K.E(a) - a.E; \end{cases}$$

ubi vero in serie 5. articuli praecedentis ponitur $K-a$ loco a, est

$$4. \quad \mathfrak{N}(u, K-a) = \frac{\sin \eta a \sin \eta u}{1.\mathfrak{Sin}\, \eta K'} - \frac{\sin 2\eta a \sin 2\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} + \frac{\sin 3\eta a \sin 3\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\, 3\eta K'} - + \text{etc.},$$

quare est et

$$5. \quad \mathfrak{N}(u, K) = 0, \text{ et}$$

$$6. \quad \mathfrak{N}(K-u, a) = \mathfrak{N}(u, K-a).$$

Etiam in formula $\mathfrak{P}(u,a) = u.M(a) + \mathfrak{N}(u,a)$ ponatur $a = 0$, ob $M(K) = 0$ et $\mathfrak{N}(u,K) = 0$, est

$$7. \quad \mathfrak{P}(u, K) = 0.$$

Permutatis in serie 5. articuli praecedentis duobus argumentis, a et u, series eadem manet, quare est

$$8. \quad \mathfrak{N}(u,a) = \mathfrak{N}(a,u).$$

Si etiam in formula $\mathfrak{P}(u,a) = u.M(a) - \mathfrak{N}(u,a)$ argumenta a et u permutamus, est $\mathfrak{P}(a,u) = a.M(u) - \mathfrak{N}(u,a)$, quare

$$9. \quad \mathfrak{P}(u,a) - \mathfrak{P}(a,u) = u.M(a) - a.M(u),$$

quae formula exprimit theorema de permutatione argumenti amplitudinis cum argumento parametri.

10.

Si in aequatione 6. articuli 8. constantem aequationis terminum designamus per $\log A$, est

$$1. \quad \log \mathfrak{D}(x) = \log A - \frac{\cos \eta x}{1.\mathfrak{Sin}\, \eta K'} - \frac{\cos 2\eta x}{2.\mathfrak{Sin}\, 2\eta K} - \frac{\cos 3\eta x}{3.\mathfrak{Sin}\, 3\eta K} + \text{etc.}$$

Si in formula $\mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{D}(a+u)}{\mathfrak{D}(a-u)}$ ponimus $a = u$, provenit $\mathfrak{N}(u,u) = \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{D}(2u)}{\mathfrak{D}(0)}$, quare est

$$2. \quad \log \mathfrak{D}(2u) = \log \mathfrak{D}(0) + 2\left[\frac{(\sin \eta u)^2}{1.\mathfrak{Sin}\, \eta K'} + \frac{(\sin 2\eta u)^2}{2.\mathfrak{Sin}\, 2\eta K'} + \frac{(\sin 3\eta u)^2}{3.\mathfrak{Sin}\, 3\eta K'} + \text{etc.}\right].$$

Si nonnisi functionem $\mathfrak{P}(u,a)$ tractare vellemus, series modo inventae jam sufficerent, cum citissime convergunt, et singuli ipsarum termini facillime computari possunt. Quare seriem 1. nunc transformemus. Est

$$\log \mathfrak{D}(u) = A - \frac{2h \cos \eta u}{1(1-h^2)} - \frac{2h^2 \cos 2\eta u}{2(1-h^4)} - \frac{2h^3 \cos 3\eta u}{3(1-h^3)} - \text{etc.}$$

et quia $\frac{h^n}{1-h^{2n}} = h^n + h^{3n} + h^{5n} + h^{7n} + \text{etc.}$ est, obtinemus

$$\begin{aligned}\log \mathfrak{D}(u) = \log A &- 2\left(\frac{h \cos \eta u}{1} + \frac{h^2 \cos 2\eta u}{2} + \frac{h^3 \cos 3\eta u}{3} + \frac{h^4 \cos 4\eta u}{4} + \text{etc.}\right) \\ &- 2\left(\frac{h^3 \cos \eta u}{1} + \frac{h^6 \cos 2\eta u}{2} + \frac{h^9 \cos 3\eta u}{3} + \frac{h^{12} \cos 4\eta u}{4} + \text{etc.}\right) \\ &- 2\left(\frac{h^5 \cos \eta u}{1} + \frac{h^{10} \cos 2\eta u}{2} + \frac{h^{15} \cos 3\eta u}{3} + \frac{h^{20} \cos 4\eta u}{4} + \text{etc.}\right) \\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Quaevis series horizontaliter posita summari potest; notissima est formula

$$-2\left(\frac{h\cos u}{1}+\frac{h^2\cos 2u}{2}+\frac{h^3\cos 3u}{3}+\text{etc.}\right)=\log(1-2h\cos u+h^2),$$

qua adhibita provenit

$$\log\mathfrak{D}(u)$$
$$=\log A+\log[(1-2h\cos\eta u+h^2)(1-2h^3\cos\eta u+h^6)(1-2h^5\cos\eta u+h^{10})\ldots.],$$

Quia vero

$$1-2h^n\cos\eta u+h^{2n}=2h^n\left(\frac{h^{-n}+h^{+n}}{2}-\cos\eta u\right)=2h^n(\mathfrak{Cos}\,u\eta K'-\cos\eta u)$$

est, formula abit in

$$\log\mathfrak{D}(u)=\log A+\log[(1+h^2)(1+h^6)(1+h^{10})(1+h^{14})\ldots.]$$
$$+\log\left[\left(1-\frac{\cos\eta u}{\cos\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'}\right)\ldots.\right].$$

Constantem in aequatione terminum nunc ita determinemus, ut aequatio fiat quantum potest simplex; ponamus igitur

$$\log A=-\log[(1+h^2)(1+h^6)(1+h^{10})\ldots.],$$

sive

$$3.\qquad A=\frac{1}{(1+h^2)(1+h^6)(1+h^{10})(1+h^{14})\ldots.},$$

tunc enim aequatio abit in

$$4.\qquad \mathfrak{D}(u)=\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'}\right)\ldots.$$

Hinc facillime sequitur, esse $\mathfrak{D}(u)=0$, si est $u=(2n+1).iK'$, et n numerum designat quemcunque integrum. Si est $u=\frac{K}{2}$, est $\eta u=\frac{\pi}{2}$, quare $\cos\eta u=0$, ideoque quivis producti infiniti factor nunc $=1$ est, unde sequitur, esse

$$\mathfrak{D}\left(\frac{K}{2}\right)=1;$$

nunc etiam perspicitur, esse $\mathfrak{D}(u)<1$, si sit u inter limites 0 et $\frac{K}{2}$, et esse $\mathfrak{D}(u)>1$, si sit u inter limites $\frac{K}{2}$ et K. Pro $u=0$ habemus

$$\mathfrak{D}(0)=\left(1-\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)\left(1-\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\left(1-\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)\ldots.$$

et pro $u=K$ est

$$\mathfrak{D}(K)=\left(1+\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)\left(1+\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\left(1+\frac{1}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)\ldots.$$

(Cont. seq. prox.)

15.

Methodus nova et simplex computandi valores integralium $\int_0^\varphi P\partial\Phi$, et iteratorum $\iint P\partial\Phi^2$, $\iiint P\partial\Phi^3$ etc., in quibus P est functio qualiscunque quantitatis $\sin\Phi$ sive $\cos\Phi$ per series rapide convergentes.

(Auct. Dr. *Chr. Gudermann*, prof. math. Monast. Guestph.)

Notissima cuique est methodus *Euleri*, integrale $Q=\int_0^\varphi P\partial\Phi$, in quo P est functio qualiscunque quadrati $\sin\Phi^2$, redigendi in seriem formae

$$Q = a\Phi + b\sin 2\Phi + c\sin 4\Phi + d\sin 6\Phi + \text{etc.},$$

cujus negotii pars difficillima in eo consistit, ut functio P evolvatur in seriem $P = a + 2b\cos 2\Phi + 4c\cos 4\Phi + 6d\cos 6\Phi + \text{etc.}$ Omnes confitemur atque dolemus, methodum *Euleri* hanc esse parum expeditam, pluribusque laborare incommodis. Aliam inveni methodum et praecipue ad computandas tabulas idoneam, quam cum Geometris communicare placet. Ponamus primo, P esse functionem quadrati $\sin\Phi^2$, quam posito $x=\sin\Phi^2$, adjumento seriei, quae dicitur a *Maclaurin* sive aliis modis evolvimus in seriem formae $P = p + \overset{1}{p}x + \overset{2}{p}x^2 + \overset{3}{p}x^3 + \text{etc.}$; quo facto est

1. $$Q = p\Phi + \overset{1}{p}\int_0^\varphi \partial\Phi\sin\Phi^2 + \overset{2}{p}\int_0^\varphi \partial\Phi\sin\Phi^4 + \overset{3}{p}\int_0^\varphi \partial\Phi\sin\Phi^6 + \text{etc.}$$

Inveni primo, posito integrali $\int_0^\varphi \partial\Phi\sin\Phi^{2r} = \frac{1.3.5....(2r-1)}{2.4.6....(2r)}.\overset{r}{\Phi}$, formulas elegantia exellentes

$$\overset{1}{\Phi} = \Phi - \sin\Phi\cos\Phi,$$

$$\overset{2}{\Phi} = \Phi - \sin\Phi\cos\Phi - \frac{2}{3}\sin\Phi^3\cos\Phi,$$

$$\overset{3}{\Phi} = \Phi - \sin\Phi\cos\Phi - \frac{2}{3}\sin\Phi^3\cos\Phi - \frac{2.4}{3.5}\sin\Phi^5\cos\Phi,$$

$$\overset{4}{\Phi} = \Phi - \sin\Phi\cos\Phi - \frac{2}{3}\sin\Phi^3\cos\Phi - \frac{2.4}{3.5}\sin\Phi^5\cos\Phi - \frac{2.4.6}{3.5.7}\sin\Phi^7\cos\Phi$$

et reliquas.

Sit brevitatis causa

$$\overset{1}{g} = \sin\Phi\cos\Phi, \quad \overset{2}{g} = \frac{2}{3}\sin\Phi^3\cos\Phi, \quad \overset{3}{g} = \frac{2.4}{3.5}\sin\Phi^5\cos\Phi, \quad \ldots.$$

$$\overset{r+1}{g} = \frac{2.4.6\ldots.(2r)}{3.5.7\ldots.(2r+1)}\sin\Phi^{2r+1}\cos\Phi;$$

quare

$$\overset{1}{\Phi} = \Phi - \overset{1}{g}, \quad \overset{2}{\Phi} = \Phi - \overset{1}{g} - \overset{2}{g}, \quad \overset{3}{\Phi} = \Phi - \overset{1}{g} - \overset{2}{g} - \overset{3}{g}, \quad \overset{4}{\Phi} = \Phi - \overset{1}{g} - \overset{2}{g} - \overset{3}{g} - \overset{4}{g}, \text{ etc.}$$

Jam perspicitur, functiones $\overset{1}{g}, \overset{2}{g}, \overset{3}{g}$, etc. rapide convergere, quare functiones $\overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi}, \overset{3}{\Phi}$, etc. in infinitum decrescentes versus limitem quemdam Φ celerrime convergunt, qui est $\Phi = \Phi - \overset{1}{g} - \overset{2}{g} - \overset{3}{g} - \overset{4}{g} - \overset{5}{g} \ldots.$ Series (1.) primo abit in

$$2. \quad Q = \Phi.p + \frac{1}{2}\overset{1}{\Phi}\overset{1}{p} + \frac{1.3}{2.4}\overset{2}{\Phi}\overset{2}{p} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\overset{3}{\Phi}\overset{3}{p} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\overset{4}{\Phi}\overset{4}{p} + \text{etc.},$$

quae, quia functiones $\overset{1}{\Phi}, \overset{2}{\Phi}, \overset{3}{\Phi}$, etc. versus limitem Φ convergunt, ipsa convergit, si series haec altera, in infinitum prolongata

$$3. \quad q = p + \frac{1}{2}\overset{1}{p} + \frac{1.3}{2.4}\overset{2}{p} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\overset{3}{p} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\overset{4}{p} + \text{etc.},$$

quam per q designemus, non solum tandem convergit, sed et versus summam finitam q ut limitem convergit. Ubi in serie (2.) ponitur $\Phi = \frac{\pi}{2}$, quo fit $\overset{1}{\Phi} = \overset{2}{\Phi} = \overset{3}{\Phi} = \text{etc.} = \frac{\pi}{2}$ et quo Q abeat in

$$4. \quad Q' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} P.\partial\Phi,$$

invenimus $Q' = \frac{\pi}{2}\left(p + \frac{1}{2}\overset{1}{p} + \frac{1\,3}{2.4}\overset{2}{p} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\overset{3}{p} + \ldots.\right) = p.\frac{\pi}{2}$, quare vice versa est

$$5. \quad q = \frac{2Q'}{\pi} = \frac{2}{\pi}.\int_0^\varphi P.\partial\Phi,$$

ideoque q duplici modo computari potest, sive adjumento seriei (3.), sive adjumento formulae (5.). Conditio, ut quantitas q finita sit, eadem est, quam adimpletam esse etiam in *Euleri* methodo supponitur.

Seriem (2.) nunc transformemus, ut citissime convergat; substituendo $\overset{1}{\Phi} = \Phi - \overset{1}{g}, \quad \overset{2}{\Phi} = \Phi - \overset{1}{g} - \overset{2}{g}, \quad \overset{3}{\Phi} = \Phi - \overset{1}{g} - \overset{2}{g} - \overset{3}{g}$, etc. oritur series haec

$$Q = q\Phi - q\overset{1}{g}\overset{1}{} - q\overset{2}{g}\overset{2}{} - q\overset{3}{g}\overset{3}{} - q\overset{4}{g}\overset{4}{} - q\overset{5}{g}\overset{5}{} - \ldots.;$$

est vero

$$6.\quad \begin{cases} \overset{1}{q} = q-p \\ \overset{2}{q} = \overset{1}{q} - \frac{1}{2}\overset{1}{p} \quad = q-p-\frac{1}{2}\overset{1}{p}, \\ \overset{3}{q} = \overset{2}{q} - \frac{1.3}{2.4}\overset{2}{p} \quad = q-p-\frac{1}{2}\overset{1}{p}-\frac{1.3}{2.4}\overset{2}{p}, \\ \overset{4}{p} = \overset{3}{q} - \frac{1.3.5}{2\,4.6}\overset{3}{p} \quad = q-p-\frac{1}{2}\overset{1}{p}-\frac{1.3}{2.4}\overset{2}{p}-\frac{1.3\,5}{2.4.6}\overset{3}{p}, \\ \overset{5}{q} = \overset{4}{q} - \frac{1.3\,5.7}{2.4.6.8}\overset{4}{p} = q-p-\frac{1}{2}\overset{1}{p}-\frac{1.3}{2.4}\overset{2}{p}-\frac{1.3.5}{2.4\,6}\overset{3}{p}-\frac{1\,3.5.7}{2.4.6.8}\overset{4}{p}, \\ \text{etc.}\quad\text{etc.} \end{cases}$$

Si coefficientem q computamus adjumento seriei (3.), simul computamus numeros $\overset{1}{q}, \overset{2}{q}, \overset{3}{q}, \overset{4}{q}$ etc., quos ex iisdem fere terminis componimus, quare calculus hic est facillimus; nec non perspicitur, quantitates $\overset{1}{q}, \overset{2}{q}, \overset{3}{q}, \overset{4}{q}$ etc. cito convergere, et esse $\overset{\infty}{q} = 0$. Substitutis valoribus pro $\overset{1}{g}, \overset{2}{g}, \overset{3}{g}$, etc. supra positis, adest series rapide convergens

$$7.\quad Q = q.\Phi - \overset{1}{q}\sin\Phi\cos\Phi - \frac{2}{3}\overset{2}{q}\sin\Phi^3\cos\Phi - \frac{2.4}{3.5}\overset{3}{q}\sin\Phi^5\cos\Phi$$
$$- \frac{2.4.6}{3.5.7}\overset{4}{q}\sin\Phi^7\cos\Phi - \frac{2.4.6.8}{3.5.7.9}\overset{5}{q}\sin\Phi^9\cos\Phi - \ldots.$$

Rem satis perspicuam exemplis illustrare superfluum esse videtur; si Ill. *Legendre* hanc adhibuisset formulam, tabulas functionum ellipticarum computasset facillime. Si integrationem repetimus, et $R = \int_0^\varphi Q\partial\Phi$ ponimus, illico oritur series magis etiam convergens

$$R = \frac{q\varphi^2}{2} - \overset{1}{q}.\frac{\sin\varphi^2}{2} - \frac{2}{3}\overset{2}{q}.\frac{\sin\varphi^4}{4} - \frac{2.3}{3.5}\overset{3}{q}.\frac{\sin\varphi^6}{6} - \frac{2.4.6}{3.5.7}\overset{4}{q}.\frac{\sin\varphi^8}{8} - \ldots.$$

Quia $\frac{q\varphi^2}{R} = \frac{\overset{1}{q}\sin\varphi^2}{2} + \frac{2\overset{2}{q}\sin\varphi^4}{3.4} + \frac{2.4\overset{3}{q}\sin\varphi^6}{3.5.6} + \frac{2.4.6\overset{4}{q}\sin\varphi^8}{3.5.7.8}$ + etc. iterum est ejusdem formae series, cujus est series P, integrationes eodem modo iterari possunt: series vero inde ortae citius citiusque convergunt. Si P non satis commode in seriem formae $p + \overset{1}{p}\sin\Phi^2 + \overset{2}{p}\sin\Phi^4 +$ etc. evolvi potest, derivabis functionem $\frac{\partial P}{\partial\varphi}$, sive $\frac{\partial^2 P}{\partial\varphi^2}$ ipsamque evolves. Si P eius est generis, ut in seriem formae $a\sin\Phi + b\sin\Phi^3 + c\sin\Phi^5 +$ etc. sive in seriem formae $a+b\sin\varphi+c\sin\varphi^2+d\sin\varphi^3\ldots. = (a+c\sin\varphi^2+e\sin\varphi^4+\ldots.)+(b\sin\varphi+d\sin\varphi^3+f\sin\varphi^5+\ldots.)$ evolvi queat, pari modo series obtines cito convergentes nec non, si $\cos\Phi$ loco $\sin\Phi$ ponitur.

Scripsi Monast. Guest. d. 7mo Maii 1835.

16.

Integralia elliptica tertiae speciei reducendi methodus simplicior, quae simul ad ipsorum applicationem facillimam et computum numericum expeditum perducit.

Sectionum conico-sphaericarum quadratura et rectificatio.

(Cont. dissert. 14. tom. XIV. lib. 2.)

(Auct. Dr. *Chr. Gudermann*, prof. math. Monast. Guestph.)

11.

E serie

$$\log \mathfrak{D}(u) = \log A - \frac{\cos \eta u}{1 \mathfrak{Sin} \eta K'} - \frac{\cos 2\eta u}{2 \mathfrak{Sin} 2\eta K'} - \frac{\cos 3\eta u}{3 \mathfrak{Sin} 3\eta K'} - \text{etc.}$$

differentiando invenimus

$$\frac{\partial \mathfrak{D}(u)}{\partial u . \mathfrak{D}(u)} = \frac{\eta \sin \eta u}{\mathfrak{Sin} \eta K'} + \frac{\eta \sin 2\eta u}{\mathfrak{Sin} 2\eta K'} + \frac{\sin 3\eta u}{\mathfrak{Sin} 3\eta K'} + \text{etc.},$$

quare est

$$\frac{\partial \mathfrak{D}(u)}{\mathfrak{D}(u)} = \partial u . M(u),$$

unde sequitur integrando

$$\int_0^u \partial u . M(u) = \log \mathfrak{D}(u) + \text{Const.}$$

Posito $u = 0$ habemus $0 = \log \mathfrak{D}(0) + \text{Const.}$, sive $\text{Const.} = -\log \mathfrak{D}(0)$, ideoque

$$1. \qquad \int_0^u \partial u . M(u) = \log \frac{\mathfrak{D}(u)}{\mathfrak{D}(0)}.$$

Differentiando functionem $\log(1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2)$ obtinemus

$$\partial \log(1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2) = \frac{-2k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2},$$

quare est

$$\int_0^u \frac{-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u \, \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2} = \tfrac{1}{2} \log(1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2).$$

Si vero formula 6. articuli 6. permutamus argumenta a et u, est

$$\frac{M(u+a) + M(u-a)}{2} - M(u) = -\frac{k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u \operatorname{cn} u \operatorname{dn} u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2},$$

quam aequationem multiplicando factore u et integrando adjumento formulae 1. obtinemus

$$\frac{\log \mathfrak{O}(u+a)+\log \mathfrak{O}(u-a)}{2} - \log \mathfrak{O}(u) = \text{Const.} + \tfrac{1}{2}\log(1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2).$$

Si in formula hac ponitur $u = 0$, quia $\mathfrak{O}(-a) = \mathfrak{O}(+a)$ est, formula reducitur ad

$$\log \mathfrak{O}(a) - \log \mathfrak{O}(0) = \text{Const.},$$

quare est

$$\frac{\log \mathfrak{O}(u+a)+\log \mathfrak{O}(u-a)}{2} = \log \mathfrak{O}(u)+\log \mathfrak{O}(a)-\log \mathfrak{O}(0)+\tfrac{1}{2}\log(1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2)$$

sive

$$2. \quad \mathfrak{O}(u+a).\mathfrak{O}(u-a) = \left(\frac{\mathfrak{O}(u).\mathfrak{O}(a)}{\mathfrak{O}(0)}\right)^2.(1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2).$$

Si in formula hac ponimus $u = \frac{K}{2}$, quia $\mathfrak{O}\left(\frac{K}{2}\right) = 1$ et $\operatorname{sn}\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{(1+k')}}$ est, provenit

$$3. \quad \mathfrak{O}\left(\frac{K}{2}+a\right).\mathfrak{O}\left(\frac{K}{2}-a\right) = \left(\frac{\mathfrak{O}(a)}{\mathfrak{O}(0)}\right)^2.\left(1-\frac{k^2 \operatorname{sn} a^2}{1+k'}\right),$$

formula, cujus ope calculus in conficiendis tabulis functionis $\mathfrak{O}(x)$ sublevabitur. E formula 4. articuli praecedentis sequitur; esse

$$\mathfrak{O}(K-u) = \left(1+\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\left(1+\frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)\ldots.$$

unde concludimus, esse

$$4. \quad \mathfrak{O}(K+u) = \mathfrak{O}(K-u),$$

quod et simplicius sequitur et formula 2.

12.

E formula

$$\mathfrak{N}(u,a) = \frac{\sin \eta a.\sin \eta u}{1.\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\sin 2\eta a.\sin 2\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\sin 3\eta a.\sin 3\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.}$$

facillime aliam deducimus relationem generalem; sumamus tertium argumentum v arbitrarium, tunc est pariter

$$\mathfrak{N}(u+v+a,v) = \frac{\sin \eta(u+v+a).\sin \eta v}{1.\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\sin 2\eta(u+v+a).\sin \eta v}{2.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \text{etc. et}$$

$$\mathfrak{N}(u+v,a+v) = \frac{\sin \eta(u+v).\sin \eta(a+v)}{1.\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\sin 2\eta(u+v).\sin 2\eta(a+v)}{2.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \text{etc.}$$

Quia vero est

$$\sin n\eta a.\sin n\eta u + \sin n\eta v.\sin n\eta(u+v+a) = \sin n\eta(u+v).\sin n\eta(v+a),$$

adest relatio simplex generalis et nova

$$1. \quad \mathfrak{N}(u,a)+\mathfrak{N}(u+v+a,v) = \mathfrak{N}(u+v,a+v).$$

Quia est

$$\mathfrak{N}(u,a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(a+u)}{\Theta(a-u)},$$

pariter est

$$\mathfrak{N}(v,u+v+a) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(u+2v+a)}{\Theta(u+a)} \text{ et}$$
$$\mathfrak{N}(a+v,u+v) = \tfrac{1}{2}\log\frac{\Theta(a+u+2v)}{\Theta(a-u)};$$

valoribus his in aequatione praecedenti substitutis, obtinemus

$$\frac{\Theta(a+u)}{\Theta(a-u)}\cdot\frac{\Theta(u+2v+a)}{\Theta(u+a)} = \frac{\Theta(a+u+2v)}{\Theta(a-u)},$$

quae aequatio est identitas. Quare formula 5. etiam alio modo et quidem ope formulae $\mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(a+v)}{\Theta(a-u)}$ **demonstrari potest.**

Quia est

$$\mathfrak{P}(u,a) = u.M(a) - \mathfrak{N}(u,a),$$

pariter est

$$\mathfrak{P}(v,u+v+a) = v.M(u+v+a) - \mathfrak{N}(v,u+v+a) \text{ et}$$
$$\mathfrak{P}(u+v,a+v) = (u+v)M(a+v) - \mathfrak{N}(u+v,a+v);$$

hinc adjumento formulae 1. deducimus relationem

$$\text{2.}\quad \mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(v,u+v+a)-\mathfrak{P}(u+v,a+v)$$
$$= u.M(a)+v.M(u+v+a)-(u+v).M(a+v).$$

Ponatur $a+v=c$, **et** $a+v+u=b$, **tunc est vice versa**

$$v = c-a, \qquad u = b-c \quad \text{et} \quad u+v = b-a.$$

Valoribus his in aequatione 1. substitutis emergit formula magis concinna

$$\text{3.}\quad \mathfrak{N}(b-c,a)+\mathfrak{N}(c-a,b) = \mathfrak{N}(b-a,c)$$

unde deducimus relationes

$$\text{4.}\quad \mathfrak{P}(b-c,a)+\mathfrak{P}(c-a,b)$$
$$= \mathfrak{P}(b-a,c)+(b-c)M(a)+(c-a)M(b)-(b-a)M(c),$$
$$\text{5.}\quad \mathfrak{P}(a,b-c)+\mathfrak{P}(b,c-a)$$
$$= \mathfrak{P}(c,b-a)+a.M(b-c)+b.M(c-a)-c.M(b-a).$$

in quibus argumenta a, b, c **sunt arbitraria. Ob formulam** $M(a) = E(a) - a.\frac{E}{K}$ **est**

$$(b-c).M(a) = (b-c).E(a)-(ab-ac).\frac{E}{K},$$
$$(c-a).M(b) = (c-a).E(b)-(bc-ab).\frac{E}{K},$$
$$(b-a).M(c) = (b-a).E(c)-(bc-ac).\frac{E}{K},$$

ideoque formula 4. etiam hoc modo exhiberi potest

$$6. \quad \mathfrak{P}(b-c,a)+\mathfrak{P}(c-a,b) = \mathfrak{P}(b-a,c)+(b-c)E(a)+(c-a)E(b)-(b-a)E(c).$$

Quare pronunciamus theorema hoc novum:

Summa integralium $\mathfrak{P}(m,a)+\mathfrak{P}(n,b)$, *si est* $m+n=b-a$, *semper ad integrale unum ejusdem generis* $\mathfrak{P}(m+n,c)$ *et ad functiones ellipticas secundae speciei reduci potest, et pari modo etiam summa* $\mathfrak{P}(a,m)+\mathfrak{P}(b,n)$ *sub eadem conditione ad integrale simile* $\mathfrak{P}(c,m+n)$ *et ad integralia elliptica secundae speciei reducitur.*

Argumentum c determinatur formula $c=b-m=n+a$.

Duae formulae etiam hoc modo exhiberi possunt

$$7. \quad \mathfrak{P}(b-c,a)+\mathfrak{P}(c-a,b)+\mathfrak{P}(a-b,c) = (b-c)E(a)+(c-a)E(b)+(a-b).E(c).$$

$$8. \quad \mathfrak{P}(a,b-c)+\mathfrak{P}(b,c-a)+\mathfrak{P}(c,a-b) = a.E(b-c)+b.E(c-a)+c.E(a-b),$$

qua in forma analogae sunt formulis goniometricis notissimis

$$\sin a \sin(b-c)+\sin b \sin(c-a)+\sin c \sin(a-b) = 0,$$
$$\cos a \sin(b-c)+\cos b \sin(c-a)+\cos c \sin(a-b) = 0.$$

E formulis 7. et 8. deducimus adhuc aliam quandam formulam memorabilem.

Ponamus brevitatis causa paullisper

$$V = (b-c)E(a)+(c-a)E(b)+(a-b)E(c),$$
$$W = a.E(b-c)+b.E(c-a)+c.E(a-b)$$

tunc est

$$V+W = b[E(a)-E(c)+E(c-a)]+a[E(c)-E(b)+E(b-c)] + c[E(b)-E(a)+E(a-b)].$$

Invenimus vero in articulo 6. formulam

$$E(a)+E(u)-E(a+u) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn}(a+u)$$

quae, si $-c$ loco u ponitur, abit in

$$E(a)-E(c)+E(c-a) = k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} c \operatorname{sn}(c-a),$$

pariter est

$$E(c)-E(b)+E(b-c) = k^2 \operatorname{sn} c \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(b-c),$$
$$E(b)-E(a)+E(a-b) = k^2 \operatorname{sn} b \operatorname{sn} a \operatorname{sn}(a-b)$$

ideoque substituendo oritur formula

$$V+W = k^2[a \operatorname{sn} b \operatorname{sn} c \operatorname{sn}(b-c)+b \operatorname{sn} a \operatorname{sn} c \operatorname{sn}(c-a)+c \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a-b)],$$

quare pervenimus ad relationem hanc abstrusam

9. $\mathfrak{P}(b-c,a)+\mathfrak{P}(a,b-c)+\mathfrak{P}(c-a,b)+\mathfrak{P}(b,c-a)+\mathfrak{P}(a-b,c)+\mathfrak{P}(c,a-b)$
$= k^2[a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{sn}(b-c)+b\,\mathrm{sn}\,c\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}(c-a)+c\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a-b)]$,

quae inter formulas memorabiles censeri debet, cum relationem sistit inter sex integralia elliptica tertiae speciei, quae a tribus elementis a, b, c pendent omnino arbitrariis.

13.

Revertimur ad productum

$$\mathfrak{D}(u) = \left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\left(1-\frac{\cos\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)\ldots.$$

Quia est

$$\mathfrak{Cos}(n\eta K') = \frac{h^{-n}+h^{+n}}{2} = \frac{1+h^{2n}}{2h^n},$$

formula etiam hoc modo exhiberi potest

$$\mathfrak{D}(u) = \frac{(1-2h\cos\eta u+h^2)(1-2h^3\cos\eta u+h^6)(1-2h^4\cos\eta u+h^{10})\ldots.}{(1+h^2)(1+h^6)(1+h^{10})\ldots.}.$$

At invenit Cl^mus *Jacobi* formulam (Fundamenta, pag. 180.)

$$(1-2h\cos\eta u+h^2)(1-2h^3\cos\eta u+h^6)(1-2h^5\cos\eta u+h^{10})\ldots.$$
$$= \frac{1-2h\cos\eta u+2h^4\cos 2\eta u-2h^9\cos 3\eta u-2h^{16}\cos 4\eta u-+\text{etc.}}{(1-h^2)(1-h^4)(1-h^6)(1-h^8)\ldots.}.$$

Si igitur brevitatis causa ponimus

$p = (1+h^2)(1+h^6)(1+h^{10})\ldots.$ et $q = (1-h^2)(1-h^4)(1-h^6)\ldots.$

est

$$\mathfrak{D}(u) = \frac{1-2h\cos\eta u+2h^4\cos 2\eta u-2h^9\cos 3\eta u+2h^{16}\cos 4\eta u-\text{etc.}}{p\cdot q}.$$

Ponamus $a+u$ loco u, et sit brevitatis causa paullisper

$G = 1-2h\cos\eta a\cos\eta u+2h^4\cos 2\eta a\cos 2\eta u-2h^9\cos 3\eta a\cos 3\eta u+\text{etc.}$,

$H = \quad 2h\sin\eta a\sin\eta u-2h^4\sin 2\eta a\sin 2\eta u+2h^9\sin 3\eta a\sin 3\eta u-\text{etc.}$,

est $\mathfrak{D}(u+a) = \frac{G+H}{p\cdot q}$ et pariter $\mathfrak{D}(a-u) = \frac{G-H}{p\cdot q}$; quia vero

$\mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{D}(a+u)}{\mathfrak{D}(a-u)}$ est, prodit $\mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2}\log\frac{G+H}{G-H}$, sive

$\mathfrak{N}(u,a) = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tang}\left(\frac{H}{G}\right)$, ideoque $\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{N}(u,a) = \frac{H}{G}$, sive

1. $$\mathfrak{Tang}\,\mathfrak{N}(u,a) = \frac{2h\sin\eta a\sin\eta u-2h^4\sin 2\eta a\sin 2\eta u+2h^9\sin 3\eta a\sin 3\eta u-\text{etc.}}{1-2h\cos\eta a\cos\eta u+2h^4\cos 2\eta a\cos 2\eta u-2h^9\sin 3\eta a\sin 3\eta u+\text{etc.}}$$

Similem formulam pro functionibus ellipticis tertiae speciei, quae cyclicae naturae sunt, primus invenit Cl^mus *Legendre*. Duo hujus fractionis membra sunt series, quae rapidissime convergunt, si argumenta a et u non imaginaria sunt.

Nunc vero functionem $\mathfrak{N}(u,a)$ in partes infinite multas dissolvimus, quarum tangentes hyperbolici rapidissime convergunt, ideoque et ipsae rapide convergunt. Quia est

$$\log\frac{\Theta(a+u)}{\Theta(a-u)} = \log\frac{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos(\eta a+\eta u)} + \log\frac{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos(\eta a+\eta u)} + \log\frac{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos(\eta a+\eta u)} + \text{etc.}$$

et

$$\tfrac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{Cos}\,n\eta K' - \cos(\eta a+\eta u)}{\mathfrak{Cos}\,n\eta K' - \cos(\eta a-\eta u)} = \tfrac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{Cos}\,n\eta K' - \cos\eta a\cos\eta u + \sin\eta a\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,n\eta K' - \cos\eta a\cos\eta u - \sin\eta a\sin\eta u} = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,n\eta K' - \cos\eta a\cos\eta u}\right)$$

obtinemus formulam hanc attentione dignissimam

$$2.\quad \mathfrak{N}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos\eta a\cos\eta u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos\eta a\cos\eta u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a\sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos\eta a\cos\eta u}\right) + \text{etc.}$$

quae etiam rapidissime convergit, et cujus utilitas infra magis adhuc elucebit.

Si seriem hanc comparas cum seriebus 1. et 2. articulo 4. erutis, similitudinem invenies magnam. Si functiones $M(u)$ et $\overset{1}{M}(u)$ e seriebus modo dictis computantur, valoribus $\mathfrak{Cos}\,\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,3\eta K'$, $\mathfrak{Cos}\,5\eta K'$ etc. in calculo hoc adhibitis iterum uti possumus in computo functionis $\mathfrak{N}(u,a)$ ope seriei modo erutae, quod est commodum non spernendum. Si pro $M(a)$ et $\mathfrak{N}(u,a)$ series ipsas ponimus, est

$$\mathfrak{P}(u,a) = \frac{\eta u.\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos\eta a} + \frac{\eta u.\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos\eta a} + \frac{\eta u.\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos\eta a} + \text{etc.}$$
$$- \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta u\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos\eta u\cos a}\right) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta u\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos\eta u\cos\eta a}\right)$$
$$- \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta u\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos\eta u\cos\eta a}\right) - \text{etc.}$$

Si igitur ponitur

$$\overset{n}{\psi} = \frac{\eta u\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}((2n+1)\eta K') - \cos\eta a} - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta u\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}((2n+1)\eta K') - \cos\eta u\cos\eta a}\right)$$

functionis $\mathfrak{P}(u,a)$ evolutio nova est

$$3.\qquad \mathfrak{P}(u,a) = \overset{0}{\psi} + \overset{1}{\psi} + \overset{2}{\psi} + \overset{3}{\psi} + \text{etc.}$$

Functio $\overset{n}{\psi}$ ejus est generis, ut $\dfrac{\overset{n}{\psi}}{u}$ posito $u=0$ abeat in

$$\frac{\eta\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}((2n+1)\eta K') - \cos\eta a} - \frac{\eta\sin\eta a}{\mathfrak{Cos}((2n+1)\eta K') - \cos\eta a} = 0.$$

14.

Quia est $\mathfrak{P}(u,a) = u.M(a) - \mathfrak{N}(u,a)$, pariter est

$$\mathfrak{P}(v,a) = v.M(a) - \mathfrak{N}(v,a) \quad \text{et}$$

$$\mathfrak{P}(u+v,a) = (u+v).M(a) - \mathfrak{N}(u+v,a);$$

hinc deducimus additione et subtractione

1. $\mathfrak{P}(u,a) + \mathfrak{P}(v,a) - \mathfrak{P}(u+v,a) = \mathfrak{N}(u+v,a) - \mathfrak{N}(u,a) - \mathfrak{N}(v,a).$

Quia vero est $\mathfrak{N}(u+v,a) = \frac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{O}(u+v+a)}{\mathfrak{O}(u+v-a)}$; $\mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{O}(u+a)}{\mathfrak{O}(u-a)}$ et $\mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2}\log\frac{\mathfrak{O}(v+a)}{\mathfrak{O}(v-a)}$, substituendo nanciscimur

2. $\mathfrak{P}(u,a) + \mathfrak{P}(v,a) - \mathfrak{P}(u+v,a) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathfrak{O}(u+v+a)\,\mathfrak{O}(u-a)\,\mathfrak{O}(v-a)}{\mathfrak{O}(u+v-a)\,\mathfrak{O}(u+a)\,\mathfrak{O}(v+a)}\right).$

Quia secundum articulum 11. est

$$\left(\frac{\mathfrak{O}(u).\mathfrak{O}(a)}{\mathfrak{O}(0)}\right)^2 = \frac{\mathfrak{O}(u+a).\mathfrak{O}(u-a)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,u^2},$$

ope formulae hujus pars logarithmica in formula modo eruta ad functiones ellipticas reduci potest. Est primo

$$\left(\frac{\mathfrak{O}(u-a).\mathfrak{O}(v-a)}{\mathfrak{O}(0)}\right)^2 = \frac{\mathfrak{O}(u+v-2a).\mathfrak{O}(u-v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}(u-a)^2\,\mathrm{sn}(v-a)^2} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{\mathfrak{O}(u+a).\mathfrak{O}(v+a)}{\mathfrak{O}(0)}\right)^2 = \frac{\mathfrak{O}(u+v+2a).\mathfrak{O}(u-v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}(u+a)^2\,\mathrm{sn}(v+a)^2}, \text{ ideoque}$$

$$\frac{\mathfrak{O}(u-a).\mathfrak{O}(v-a)}{\mathfrak{O}(u+a).\mathfrak{O}(v+a)} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{O}(u+v-2a)}{\mathfrak{O}(u+v+2a)}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}(u+a)^2\,\mathrm{sn}(v+a)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}(u-a)^2\,\mathrm{sn}(v-a)^2}\right)}.$$

Est porro

$$\left(\frac{\mathfrak{O}(a)\,\mathfrak{O}(u+v+a)}{\mathfrak{O}(0)}\right)^2 = \frac{\mathfrak{O}(u+v+2a).\mathfrak{O}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}(u+v+a)^2} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{\mathfrak{O}(a).\mathfrak{O}(u+v-a)}{\mathfrak{O}(0)}\right)^2 = \frac{\mathfrak{O}(u+v-2a).\mathfrak{O}(u+v)}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}(u+v-a)^2}$$

quare

$$\frac{\mathfrak{O}(u+v+a)}{\mathfrak{O}(u+v-a)} = \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{O}(u+v+2a)}{\mathfrak{O}(u+v-2a)}\right)}\cdot\sqrt{\left(\frac{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}(u+v-a)^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}(u+v+a)^2}\right)}.$$

Productum duarum aequationem a functione $\mathfrak{O}(x)$ non amplius pendet, et formula 2. nunc abit in

3. $\mathfrak{P}(u,a) + \mathfrak{P}(v,a) - \mathfrak{P}(u+v,a)$

$$= \frac{1}{4}\log\frac{[1-k^2\,\mathrm{sn}(u+a)^2\,\mathrm{sn}(v+a)^2][1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}(u+v-a)^2]}{[1-k^2\,\mathrm{sn}(u-a)^2\,\mathrm{sn}(v-a)^2][1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}(u+v+\alpha)^2]}.$$

15.

Formula in articulo praecedenti inventa 3. in simpliciorem, quam ill. *Legendre* invenit, at nonnisi calculo prolixo transformata est ab ill^{mo}

Jacobi. **Perlongas ut evitemus evolutiones, methodum similem adhibeamus, qua usus est *Legendre*, ut formulam eam eruamus, quae nobis placent.**

Est

$$\partial \mathfrak{P}(u,a) = \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u^2 . \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2} = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . \frac{\partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2} - \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . \partial u$$

et pariter

$$\partial \mathfrak{P}(v,a) = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . \frac{\partial v}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} v^2} - \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} . \partial v ;$$

ponamus nunc, summam $u + v = w$ esse constantem, ideoque $\partial w = \partial u + \partial v = 0$ esse, tunc est

$$\partial \mathfrak{P}(u,a) + \partial \mathfrak{P}(v,a) = \frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} \left(\frac{\partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2} - \frac{\partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} v^2} \right), \text{ sive}$$

$$\mathfrak{P}(u,a) + \mathfrak{P}(v,a) = \int \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a . (\operatorname{sn} v^2 - \operatorname{sn} u^2) \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 (\operatorname{sn} u^2 + \operatorname{sn} v^2) + k^4 \operatorname{sn} a^4 \operatorname{sn} u^2 \operatorname{sn} v^2} .$$

Quia est $k^2 \operatorname{sn} v^2 - k^2 \operatorname{sn} u^2 = \operatorname{dn} u^2 - \operatorname{dn} v^2$, est etiam

$$\mathfrak{P}(u,a) + \mathfrak{P}(v,a) = \int \frac{- \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a (\operatorname{dn} u^2 - \operatorname{dn} v^2) \partial u}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 (\operatorname{sn} u^2 + \operatorname{sn} v^2) + k^4 \operatorname{sn} a^4 \operatorname{sn} u^2 \operatorname{sn} v^2} .$$

Est vero $\partial E(u) = \operatorname{dn} u^2 . \partial u$, $\partial E(v) = \operatorname{dn} v^2 . \partial v = - \operatorname{dn} v^2 . \partial u$, ideoque $\partial E(u) + \partial E(v) = (\operatorname{dn} u^2 - \operatorname{dn} v^2) \partial u$; quia vero est

$$E(u) + E(v) - E(u+v) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} (u+v), \text{ sive}$$

$$E(u) + E(v) - E(w) = k^2 \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn} w, \text{ ponendo } u + v = w,$$

est $\partial E(u) + \partial E(v) = k^2 \operatorname{sn} w \, \partial (\operatorname{sn} u \operatorname{sn} v)$; si igitur brevitatis causa ponitur

$$z = \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v,$$

est summa

$$\mathfrak{P}(u,a) + \mathfrak{P}(v,a) = \int \frac{- k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} w . \partial z}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 (\operatorname{sn} u^2 + \operatorname{sn} v^2) + k^4 \operatorname{sn} a^4 . z^2} .$$

Factor $\operatorname{sn} u^2 + \operatorname{sn} v^2$ in denominatore per z exprimendus est, in quo adhibemus formulam notissimam

$$\operatorname{cn}(u+v) = \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{dn}(u+v), \text{ sive}$$

$$\operatorname{cn} w = \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v - z \operatorname{dn} w,$$

quae transformetur in

$$1 - \operatorname{sn} u^2 - \operatorname{sn} v^2 + \operatorname{sn} u^2 \operatorname{sn} v^2 = (\operatorname{cn} w + z \operatorname{dn} w)^2$$

sive

$$1 + z^2 - (\operatorname{cn} w + z \operatorname{dn} w)^2 = \operatorname{sn} u^2 + \operatorname{sn} v^2,$$

si rembrum sinistrum evolvimus, prodit

$$\operatorname{sn} u^2 + \operatorname{sn} v^2 = \operatorname{sn} w^2 + k^2 \operatorname{sn} w^2 . z^2 - 2 z \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w,$$

quo valore substituto est

$$\mathfrak{P}(u,a) + \mathfrak{P}(v,a) = \int \frac{- k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} w . dz}{1 - k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} w^2 + 2 k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{cn} w \operatorname{dn} w . z - k^4 \operatorname{sn} a^2 (\operatorname{sn} w^2 - \operatorname{sn} a^2) z^2} .$$

At differentiando functionem

$$\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{m+nz}{p+qz}\right) \text{ invenimus } \frac{(pn-qm)\partial z}{(p^2-m^2)+2(pq-mn)z+(q^2-n^2)z^2}.$$

Ut vero integrale posito $z=0$ evanescat, ponamus $m=0$, quo fit

$$p^2 = 1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2,$$
$$pq = k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w,$$
$$q^2-n^2 = k^4\,\mathrm{sn}\,a^4-k^4\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2.$$

Quia est

$$q^2=\frac{k^4\,\mathrm{sn}\,a^4\,\mathrm{cn}\,w^2\,\mathrm{dn}\,w^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2}, \text{ est } n^2=\frac{k^4\,\mathrm{sn}\,a^4\,\mathrm{cn}\,w^2\,\mathrm{dn}\,w^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2}-k^4\,\mathrm{sn}\,a^4+k^4\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2$$
$$=k^4\,\mathrm{sn}\,a^2\left(\frac{\mathrm{cn}\,w^2\,\mathrm{dn}\,w^2\,\mathrm{sn}\,a^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2}-\mathrm{sn}\,a^2+\mathrm{cn}\,w^2\right)=\frac{k^4\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{cn}\,a^2\,\mathrm{dn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2}, \text{ ideoque}$$

$$n=\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,w}{\sqrt{(1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2)}};$$

quapropter est

$$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(v,a)+\text{const.}=-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,w\,.\,z}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2+k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w\,.\,z}\right).$$

Quia posito $u=0$ sit $\mathfrak{P}(u,a)=0$ et $\mathfrak{P}(v,a)=\mathfrak{P}(w,a)=\mathfrak{P}(v+u,a)$, est

$$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(v,a)-\mathfrak{P}(u+v,a)$$
$$=-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,w}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{sn}\,w^2+k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{cn}\,w\,\mathrm{dn}\,w\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v}\right).$$

Si in denominatore substituitur pro $\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{dn}\,w$ valor $\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v-\mathrm{cn}\,w$, formula reducitur ad simpliciorem et generalem

$$\textbf{1.}\quad \mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(v,a)=\mathfrak{P}(w,a)-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}\,w}{\mathrm{dn}\,a^2+k^2\,\mathrm{sn}\,a^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}\,w}\right).$$

Si in formula hac ponimus $v=K-u$, est $w=v+u=K$, et quia $\mathfrak{P}(k,a)=K.M(a)=K.E(a)-a.E$ invenimus, summa $\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(K-u,a)$ ab integrali elliptico secundae speciei pendet. Quia insuper nunc

$$\mathrm{sn}\,v=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{cn}\,v=\frac{k'\,\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u},\quad \mathrm{sn}\,w=1 \text{ et } \mathrm{cn}\,w=0 \text{ est,}$$

formula generalis abit in

$$\textbf{2.}\quad \mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(K-u,a)=K.M(a)-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right).$$

16.

Nunc etiam summa integralium $\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,b)$ ad integrale simile reducitur, in quo argumentum parametri $=a+b$ est. Quia secundum articulum 9. est

$$\mathfrak{P}(u,a) = \mathfrak{P}(a,u) + u\,M(a) - a\,M(u),$$
$$\mathfrak{P}(u,b) = \mathfrak{P}(b,u) + u\,M(b) - b\,M(u),$$
$$\mathfrak{P}(u,a+b)=\mathfrak{P}(a+b,u)+u\,M(a+b)-(a+b)\,M(u),$$

ex aequationibus his sequitur, esse

$$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,b)-\mathfrak{P}(u,a+b)$$
$$=\mathfrak{P}(a,u)+\mathfrak{P}(b,u)-\mathfrak{P}(a+b),u)+u\,[M(a)+M(b)-M(a+b)];$$

quin vero $M(a)+M(b)-M(a+b)=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b)$, et secundum articulum praecedentem est

$$\mathfrak{P}(a,u)+\mathfrak{P}(b,u)-\mathfrak{P}(a+b,u)=-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,(a+b)}{\mathrm{dn}\,u^2+k^2\,\mathrm{sn}\,u^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cn}\,(a+b)}\right),$$

oritur formula generalis

1. $$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,b)-\mathfrak{P}(u,a+b)$$
$$=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,(a+b).u-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}\,(a+b).\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,u^2+k^2\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{cn}\,(a+b).\mathrm{sn}\,u^2}\right).$$

Si in formula hac ponitur $b=K-a$, ergo $a+b=K$, est $\mathfrak{P}(u,a+b)=0$, ideoque

2. $$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,k-a)=\frac{k^2.\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}.u-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}.\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Notissima est formula $\mathfrak{Arc\,Tang}(z)=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}$; si ponimus

$$z=\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}.\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

est $\frac{1+z}{1-z}=\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,u-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}$, sive

$$\frac{1+z}{1-z}=\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)},$$

quere formulae 2. in articulo praecedenti et in hoc etiam sic exhiberi possunt

3. $$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(K-u,a)=K.M(a)-\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)}\right)},$$

4. $$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,K-a)=\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u-\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}\,(a-u)}{\mathrm{dn}\,(a+u)}\right)}.$$

17.

Relationes modo erutae jam satis naturam hyperbolicam integralis

1. $$\mathfrak{P}(u,a)=\int_0^u\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,u^2.\partial u}{1-k^2\,\mathrm{sn}\,a^2.\mathrm{sn}\,u^2}$$

manifestant; vidimus enim, summas integralium hujus formae pendere a functionibus hyperbolicis. Forma haec differentialis in aliam cogi potest formam non minus memorabilem, si substituimus $\frac{\mathrm{tn}\,u^2}{1+\mathrm{tn}\,u^2}$ loco $\mathrm{sn}\,u^2$, quo facto reductione facillima obtinemus formam alteram hanc

2. $$\mathfrak{P}(u,a)=\int_0^u\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}\,u^2.\partial u}{1+\mathrm{dn}\,a^2.\mathrm{tn}\,u^2}.$$

Jam vero ad integralia transeamus, quae sunt cyclicae naturae. Pona-

mus hunc in finem iu loco u; quia est $\mathrm{tn}(ui) = i.\mathrm{sn}(u,k')$, est $(\mathrm{tn}\,ui)^2 = -\mathrm{sn}(u,k')^2$, ideoque $i.(\mathrm{tn}(ui))^2.\partial(ui) = \mathrm{sn}(u,k')^2.\partial u$ positivum est. Hinc perspicitur differentiale functionis $i.\mathfrak{P}(ui,a)$ non solum esse reale, sed et positivum. Integrale vero $i.\mathfrak{P}(ui,a)$ designemus symbolo $P(u,a)$, quare est in forma reali prima

$$3. \qquad P(u,a) = \int_0^u \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}(u,k')^2.\partial u}{1-\mathrm{dn}\,a^2.\mathrm{sn}(u,k')^2}$$

et in forma altera

$$4. \qquad P(u,a) = \int_0^u \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{tn}(u,k')^2.\partial u}{1+k^2\,\mathrm{sn}\,a^2.\mathrm{tn}(u,k')^2}.$$

Functiones igitur ellipticae argumentorum u et a in utraque forma reali obviae ad modulos diversos k et k' referendae sunt; integrale $P(u,a)$ esse naturae cyclicae, mox videbimus; diversitas modulorum k et k' modo dicta est criterium naturae hujus cyclicae.

Connexus inter integralia $\mathfrak{P}(u,a)$ et $P(u,a)$, exceptis casibus quibusdam singularibus, si series infinitas rejicis, nonnisi in forma imaginaria exprimi potest. Formulae hae imaginariae sunt

$$5. \qquad i.\mathfrak{P}(ui,a) = P(u,a)$$

et vice versa

$$6. \qquad i.P(ui,a) = \mathfrak{P}(u,a).$$

Integralia $\mathfrak{P}(u,a)$ et $P(u,a)$ in multis sese differunt; integrale $\mathfrak{P}(u,a)$ simplicitate formularum gaudet majori, quia diversitas modulorum deest; at integrali $P(u,a)$ saepissime utimur in Geometria et Mechanica, integrali $\mathfrak{P}(u,a)$ vero rarisssime utimur.

18.

Si pariter in functione $\mathfrak{N}(u,a)$ ponimus ui loco u, imaginaria fit et talis, ut dejecto factore i fiat realis et positiva. Ponamus igitur $\frac{\mathfrak{N}(ui,a)}{i} = N(u,a)$, sive

$$1. \qquad \mathfrak{N}(ui,a) = i.N(u,a)$$

et vice versa

$$2. \qquad N(ui,a) = i.\mathfrak{N}(u,a).$$

Functionis $N(u,a)$ evolutiones in series jam sunt in formis realibus

$$3. \qquad N(u,a) = \frac{\sin\eta a.\mathfrak{Sin}\,\eta u}{1.\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\sin 2\eta a.\mathfrak{Sin}\,2\eta u}{2.\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\sin 3\eta a.\mathfrak{Sin}\,5\eta u}{3.\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.},$$

$$4. \quad \mathrm{tang}\,N(u,a) = \frac{2h\sin\eta a.\mathfrak{Sin}\,\eta u - 2h^4\sin 2\eta a.\mathfrak{Sin}\,2\eta u + 2h^9\sin 3\eta a.\mathfrak{Sin}\,3\eta u - \text{etc.}}{1-2h\cos\eta a.\mathfrak{Cos}\,\eta u + 2h^4\cos 2\eta a.\mathfrak{Cos}\,2\eta u - 2h^9\cos 3\eta a.\mathfrak{Cos}\,3\eta u + \text{etc.}},$$

5. $$N(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a\,\mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos\eta a\,\mathfrak{Cos}\,\eta u}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a\,\mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos\eta a\,\mathfrak{Cos}\,\eta u}\right)$$
$$+ \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a\,\mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos\eta a\,\mathfrak{Cos}\,\eta u}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a\,.\,\mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K' - \cos\eta a\,\mathfrak{Cos}\,\eta u}\right) + \text{etc.}$$

Seriem 4. jam invenit Cl^mus *Legendre*, series 3. ad calculum numericum parum prodest, quia lente convergit, si differentia positiva $K' - u$ est exigua. Series vero 5. semper rapidissime convergit, si posito $k = \sin\theta$, angulus $\theta < 45^0$, sive non $> 45^0$ est, et quidem multo rapidius, quam duae series, quae formulam pro tang $N,(u,a)$ constituunt; usum formulae nostrae 5. infra ipso exemplo numerico illustrabimus, quia series haec inter omnes est maxime apta ad computandum functionis $N(u,a)$ valorem, a quo pendet computus integralis $P(u,a)$.

Si in seriebus pro $N(u,a)$ sive tang $N(u,a)$ ponitur $a = K$, invenimus, dummodo u non $= \frac{1}{0}$ est, esse

$$6. \qquad N(u,k) = 0.$$

Si vero ponitur $u = K'$ in serie 3., est

$$N(K',a) = \frac{\sin\eta a}{1} + \frac{\sin 2\eta a}{2} + \frac{\sin 3\eta a}{3} + \frac{\sin 4\eta a}{4} + \text{etc.}$$

Series vero haec summari potest, quo invenimus $N(K',a) = \frac{\pi}{2} - \frac{\eta a}{2}$; quia vero est $\eta = \frac{\pi}{K}$, incidimus in formulam memorabilem

$$7. \qquad N(K',a) = \frac{\pi}{2}.\left(1 - \frac{a}{K}\right).$$

Diversitas formularum $N(u,K) = 0$ et $N(K',a) = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{a}{K}\right)$ a formulis prius inventis $\mathfrak{N}(K,a) = 0$ et $\mathfrak{N}(u,K) = 0$ jam attentione digna censetur. Porro invenimus, esse $\mathfrak{N}(u,a) = \mathfrak{N}(a,u)$, at non est $N(u,a) = N(a,u)$.

19.

Si in formula $\mathfrak{P}(u,a) = u\,.\,M(a) - \mathfrak{N}(u,a)$ ponimus ui loco u, et aequationem insuper multiplicamus factore i, emergit formula fundamentalis

$$1. \qquad P(u,a) = -a\,.\,M(a) + N(u,a),$$

qua functio $P(u,a)$, reducitur ad functiones $M(a)$ et $N(u,a)$, quarum computus numericus in promptu est. Quia est

$$M(a) = E(a) - a\,.\,\frac{E}{K}$$

functio $P(u,a)$ etiam ad functiones $E(a)$ et $N(u,a)$ reducta est. Si ponitur $a = K$, ob $M(K) = 0$ et $N(u,k) = 0$ invenimus, esse

$$2. \qquad P(u,K) = 0.$$

Si vero ponimus $u = K'$, incidimus in formulam

$$3. \quad P(K', a) = -K'.M(a) + \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{a}{K}\right)$$

quae non parum discrepat a formula analoga prius inventa

$$\mathfrak{P}(K, a) = +K.M(a).$$

20.

Si in formula generali articuli 15. ponitur tum ui loco u, tum vi loco v, et aequatio insuper factore i multiplicatur, emergit formula

$$1. \quad P(u,a) + P(v,a) = P(u+v,a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn}(u,k') \operatorname{sn}(v,k') \operatorname{sn}(u+v,k')}{k^2 \operatorname{sn} a^2 + \operatorname{dn} a^2 \operatorname{cn}(u,k') \operatorname{cn}(v,k') \operatorname{cn}(u+v,k')}\right).$$

Formula vero generalis articuli 16. nunc abit in

$$2. \quad P(u,a) + P(u,b) = P(u,a+b) - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b).u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b \operatorname{sn}(a+b) \operatorname{tn}(u,k') \operatorname{dn}(u,k')}{\operatorname{dn}(u,k')^2 - k^2 \operatorname{cn} a \operatorname{cn} b \operatorname{cn}(a+b) \operatorname{sn}(u,k')^2}\right).$$

Si in formula 1. ponimus $v = K' - u$, ergo $u + v = K'$, est

$$3. \quad P(u,a) + P(K'-u,a) = P(K',a) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn} a}{\operatorname{tn} a} \cdot \frac{\operatorname{sn}(u,k') \operatorname{cn}(u,k')}{\operatorname{dn}(u,k')}\right).$$

Si vero in formula 2. ponitur $b = K - a$, est

$$4. \quad P(u,a) + P(u,K-a) = -\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \cdot \frac{\operatorname{tn}(u,k')}{\operatorname{dn}(u,k')}\right).$$

Quia est $\mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{D}(a+u)}{\mathfrak{D}(a-u)}$, est etiam $\mathfrak{N}(ui,a) = \frac{1}{2} \log \frac{\mathfrak{D}(a+ui)}{\mathfrak{D}(a-ui)}$, sive

$$N(u,a) = \frac{1}{2i} \log \frac{\mathfrak{D}(a+ui)}{\mathfrak{D}(a-ui)}, \text{ ideoque}$$

$$P(u,a) = -u.M(a) + \frac{1}{2i} \log \frac{\mathfrak{D}(a+ui)}{\mathfrak{D}(a-ui)};$$

at formulae hae ob formam imaginariam calculum numericum nullo modo juvant; destructa vero hac forma relabimur in formulam

$$P(u,a) = -u.M(a) + N(u,a).$$

Theoremata de additione argumenti amplitudinis et argumenti parametri formulis exprimuntur his

$$5. \quad \mathfrak{N}(u,a) + \mathfrak{N}(v,a) - \mathfrak{N}(u+v,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn} a^2 + k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v)}\right)$$

sive

$$6. \quad \mathfrak{N}(a,u) + \mathfrak{N}(a,v) - \mathfrak{N}(a,u+v) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u \operatorname{sn} v \operatorname{sn}(u+v)}{\operatorname{dn} a^2 + k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{cn} u \operatorname{cn} v \operatorname{cn}(u+v)}\right).$$

Si in formula 5. ponimus ui loco u et vi loco v, incidimus in formulam

$$7. \quad N(u,a)+N(v,a)-N(u+v,a)$$
$$= -\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}(u,k')\,\mathrm{sn}(v,k')\,\mathrm{sn}(u+v,k')}{k^2\,\mathrm{sn}\,a^2+\mathrm{dn}\,a^2\,\mathrm{cn}(u,k')\,\mathrm{cn}(v,k')\,\mathrm{cn}(u+v,k')}\right),$$

et ponendo ai loco a in formula 6., obtinemus

$$8. \quad N(a,u)+N(a,v)-N(a,u+v)$$
$$= \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}(a,k')^2-k^2\,\mathrm{sn}(a,k')^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)}\right).$$

21.

Si in functionibus $\mathfrak{P}(u,a)$ et $P(u,a)$ ponimus simul ui loco u et ai loco a, functio $\mathfrak{P}(ui,ai)$ non solum realis, sed iterum hyperbolicae est naturae, quam per $\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a)$ designemus, et pariter $P(ui,ai)$ est functio naturae cyclicae, quae per $\overset{\text{I}}{P}(u,a)$ designetur. Facillime verificantur relationes

1. $\mathfrak{P}(ui,ai)=\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a)$ et vice versa $\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(ui,ai)=\mathfrak{P}(u,a)$,
2. $P(ui,ai)=\overset{\text{I}}{P}(u,a)$ et vice versa $\overset{\text{I}}{P}(ui,ai)=P(u,a)$.

E relationibus his deducimus alias. Ex aequatione $\mathfrak{P}(ui,ai)=\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a)$ sequitur primo $i.\mathfrak{P}(ui,ai)=i.\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a)$, sive

3. $P(u,ai)=i.\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,ai)=i.P(u,a)$,
4. $\mathfrak{P}(u,ai)=i.\overset{\text{I}}{P}(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{P}(u,ai)=i.\mathfrak{P}(u,a)$,
5. $i\overset{\text{I}}{P}(ui,a)=\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a)$ et vice versa $i\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(ui,a)=\overset{\text{I}}{P}(u,a)$.

Adjumento harum formularum invenimus formulas differentiales

$$6. \quad \overset{\text{I}}{P}(u,a)=\int_0^u \frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k').\mathrm{dn}(a,k').\mathrm{sn}\,u^2.\partial u}{\mathrm{cn}(a,k')^2.[1+k^2\,\mathrm{tn}(a,k')^2.\mathrm{sn}\,u^2]} \quad \text{et}$$

$$7. \quad \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a)=\int_0^u \frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k').\mathrm{dn}(a,k').\mathrm{sn}(u,k')^2.\partial u}{\mathrm{cn}(a,k')^2.\left(1-\frac{\mathrm{dn}(a,k')^2}{\mathrm{cn}(a,k')^2}.\mathrm{sn}(u,k')^2\right)}.$$

Loco $\frac{\mathrm{dn}(a,k')}{\mathrm{cn}(a,k')}$ etiam $\frac{1}{\mathrm{sn}(K'-a,k')}$ poni potest, quare denominator in formula 6. $=0$ est, si est $K'-a=u$, sive $a+u=K'$. Idem denominator est positivus, si est $K'-a>u$, sive $a+u<K'$; si denique $a+u>K'$ est, ille denominator negativus est.

22.

Cum functione $\overset{\text{I}}{P}(u,a)$ connexa est functio $\overset{\text{I}}{N}(u,a)$, quae oritur e functione $\mathfrak{N}(u,a)$, si ai loco a ponitur, et ipsius factor i dejicitur; quare est

$$1. \quad \mathfrak{N}(u, ai) = i \,.\, \overset{\text{I}}{N}(u, a) \text{ et}$$
$$2. \quad \overset{\text{I}}{N}(u, ai) = i \,.\, \mathfrak{N}(u, a).$$

Adjumento hujus relationis illico inveniuntur series

$$3. \quad \overset{\text{I}}{N}(u, a) = \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta a \,.\, \sin \eta u}{1 \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\mathfrak{Sin}\,2\eta a \,.\, \sin 2\eta u}{2 \,.\, \mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\mathfrak{Sin}\,3\eta a \,.\, \sin 3\eta u}{3 \,.\, \mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.}$$

$$4. \quad \text{tang}\overset{\text{I}}{N}(u, a) = \frac{2h\,\mathfrak{Sin}\,\eta a \,.\, \sin \eta u - 2h^4\,\mathfrak{Sin}\,2\eta a \,.\, \sin 2\eta u + 2h^9\,\mathfrak{Sin}\,3\eta a \,.\, \sin 3\eta u - \text{etc.}}{1 - 2h\,\mathfrak{Cos}\,\eta a \,.\, \cos \eta u + 2h^4\,\mathfrak{Cos}\,2\eta a \,.\, \cos 2\eta u - 2h^9\,\mathfrak{Cos}\,3\eta a \,.\, \cos 3\eta u + \text{etc.}},$$

$$5. \quad \overset{\text{I}}{N}(u, a) = \text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta a \,.\, \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta a \cos \eta u}\right) + \text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta a \,.\, \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta a \cos \eta u}\right)$$
$$+ \text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta a \,.\, \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta a \cos \eta u}\right) + \text{arc tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta a \,.\, \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta a \cos \eta u}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

Series ultima duabus prioribus iterum, si calculum numericum spectas, praeferenda est, quia semper rapidissime convergit, si est θ non $> 45°$.

E formulis his, comparatis cum formulis 3., 4., 5. articuli 18., perspicitur, esse

$$6. \quad \overset{\text{I}}{N}(u, a) = N(a, u) \quad \text{et} \quad \overset{\text{I}}{N}(a, u = N(u, a).$$

Si etiam in formula $\mathfrak{P}(u, a) = u \,.\, M(a) - \mathfrak{N}(u, a)$ ponitur ai loco a et factor formulae inde ortus i dejicitur, pervenimus ad formulam fundamentalem

$$\overset{\text{I}}{P}(u, a) = u \,.\, \overset{\text{I}}{M}(a) - \overset{\text{I}}{N}(u, a), \text{ seu}$$
$$\overset{\text{I}}{P}(u, a) = u \,.\, \overset{\text{I}}{M}(a) - N(a, u);$$

quia vero est $P(a, u) = -a \,.\, M(u) + N(a, u)$, addendo oritur formula

$$8. \quad \overset{\text{I}}{P}(u, a) + P(a, u) = u \,.\, \overset{\text{I}}{M}(a) - a \,.\, M(u),$$

quae formula exprimit theorema de permutatione argumentorum amplitudinis et parametri in integralibus ellipticis tertiae speciei iis, quae cyclicae sunt naturae. Etiam theorema hoc magnopere discrepat a theoremate, quod formula 9. articuli 9. exprimitur. Quia est $\overset{\text{I}}{N}(u, K') = N(K', u)$, est

$$9. \quad \overset{\text{I}}{N}(u, K') = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{u}{K}\right),$$

et quia est $\overset{\text{I}}{N}(K, a) = N(a, K)$, est

$$10. \quad \overset{\text{I}}{N}(K, a) = 0.$$

Si in formula 7. ponitur $u = K$, invenimus

$$11. \quad \overset{\text{I}}{P}(K, a) = K \,.\, \overset{\text{I}}{M}(a);$$

quia vero est $\overset{\text{I}}{M}(K') = \frac{\text{I}}{0}$, invenitur etiam $\overset{\text{I}}{P}(u, K') = \frac{\text{I}}{0}$.

23.

Si in formula generali articuli 15. ponitur ai loco a et factor i dejicitur, pervenimus ad formulam

$$1. \qquad \overset{1}{P}(u,a)+\overset{1}{P}(v,a) = \overset{1}{P}(u+v,a)+\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{sn}\,v\,\mathrm{sn}(u+v)}{\mathrm{dn}(a,k')^2-k^2\,\mathrm{sn}(a,k')^2\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{cn}\,v\,\mathrm{cn}(u+v)}\right).$$

Si pariter in formula generali articuli 16. ponitur ai loco a et simul bi loco b, dejecto factore i prodit formula

$$2. \quad \overset{1}{P}(u,a)+\overset{1}{P}(u,b)-\overset{1}{P}(u,a+b) = -k^2\,\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{tn}(b,k')\,\mathrm{tn}(a+b,k').u + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{sn}(b,k')\,\mathrm{sn}(a+b,k')\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u\,\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,u^2\,\mathrm{cn}(a,k')\,\mathrm{cn}(b,k')\,\mathrm{cn}(a+b,k')+k^2\,\mathrm{sn}\,u^2}\right).$$

Si in formula 1. ponitur $v=K-u$, formula abit in specialem hanc

$$3. \qquad \overset{1}{P}(u,a)+\overset{1}{P}(K-u,a) = K.\overset{1}{M}(a)+\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}.\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right).$$

In formula 2. non pari modo $b=K'-a$ ponere possumus, quia $P(u,K')=\frac{1}{0}$ est; si vero in formula

$$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,K-a) = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u-\log\sqrt{\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}}$$

ponimus ai loco a et factorem i dejicimus, est primo

$$\overset{1}{P}(u,a)-i\,\mathfrak{P}(u,K-ai) = \frac{k^2.\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{du}(a,k')}u-\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+ai)}.$$

Terminum $i.\mathfrak{P}(u,K-ai)$ hujus formulae primo cogamus in formam realem. Est

$$\mathrm{sn}(K-ai) = \frac{\mathrm{cn}(ai)}{\mathrm{dn}(ai)} = \frac{1}{\mathrm{dn}(a,k')} = \frac{\mathrm{dn}(K'-a,k')}{k},$$

$$\mathrm{cn}(K-ai) = \frac{k'.\mathrm{sn}\,ai}{\mathrm{dn}(ai)} = \frac{ik'.\mathrm{sn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')} = \frac{ik'}{k}.\mathrm{cn}(K'-a,k'),$$

$$\mathrm{dn}(K-ai) = \frac{k'}{\mathrm{dn}(ai)} = \frac{k'.\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')} = k'.\mathrm{sn}(K'-a,k'),$$

quare est

$$\frac{k^2\,\mathrm{sn}(K-ai).\mathrm{cn}(K-ai).\mathrm{dn}(K-ai)}{i} = k'^2\mathrm{sn}(K'-a,k').\mathrm{cn}(K'-a,k').\mathrm{dn}(K'-a,k')$$

et $1-k^2\mathrm{sn}(K-ai)^2.\mathrm{sn}\,u^2 = 1-\mathrm{dn}(K'-a,k')^2.\mathrm{sn}\,u^2$, quibus valoribus in formula pro $\mathfrak{P}(u,K-ai)$ substitutis, emergit formula realis

$$-i\,\mathfrak{P}(u,K-ai) = \int_0^u \frac{k'^2\,\mathrm{sn}(K'-a,k').\mathrm{cn}(K'-a,k').\mathrm{dn}(K'-a,k').\mathrm{sn}\,u^2.\partial u}{1-\mathrm{dn}(K'-a',k')^2.\mathrm{sn}\,u^2}$$

sive simplicior haec

$$1. \qquad \frac{\mathfrak{P}(u,K-ai)}{i} = P(u,K'-a,k'),$$

quare prior formula abit in hanc

$$\overset{1}{P}(u,a)+P(u,K'-a,k') = \frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(u-ai)}{\mathrm{dn}(u+ai)}$$

sive

$$2.\quad \overset{1}{P}(u,a)+P(u,K'-a,k') = \frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u - \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right).$$

24.

Formulam articuli praecedentis transformemus. Est $\mathrm{dn}(ai-u) = \mathrm{dn}\,i(a+ui) = \frac{\mathrm{dn}(a+ui,k')}{\mathrm{cn}(a+ui,k')}$ et $\mathrm{dn}(ai+u) = \mathrm{dn}\,i(a-ui) = \frac{\mathrm{dn}(a-ui,k')}{\mathrm{cn}(a-ui,k')}$, quare est

$$\overset{1}{P}(u,a)+P(u,K'-a,k') = \frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u - \frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(a+ui,k')}{\mathrm{dn}(a-ui,k')} - \frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{cn}(a-ui,k')}{\mathrm{cn}(a+ui,k')}.$$

Est vero

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(a-ui)}{\mathrm{dn}(a+ui)} = \frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(ui)+k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,ui\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}(ui)}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(ui)-k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,ui\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}(ui)}$$
$$= \frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(u,k')+ik^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{tn}(u,k').\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}(u,k')-ik^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{tn}(u,k').\mathrm{cn}\,a},$$

sive

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(a-ui)}{\mathrm{dn}(a+ui)} = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{tn}(u,k')}{\mathrm{dn}(u,k')}\right),\ \text{ideoque}$$

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{dn}(a-ui,k')}{\mathrm{dn}(a+ui,k')} = \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right).$$

Est insuper

$$\frac{1}{2i}\log\frac{\mathrm{cn}(a-ui,k')}{\mathrm{cn}(a+ui,k')} = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+i\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k')}{1-i\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u\,\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k')}\right)$$
$$= \mathrm{arc\,tang}\,[\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k')\,\mathrm{tn}\,u\,\mathrm{dn}\,u],$$

quare formula etiam sic exhiberi potest

$$\overset{1}{P}(u,a)+P(u,K'-a,k') = \frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right)$$
$$- \mathrm{arc\,tang}\,[\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k')\,\mathrm{tn}\,u.\,\mathrm{dn}\,u];$$

quia vero secundum articulum 20. est

$$P(u,a,k')+P(u,k'-a,k')$$
$$= -\frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u + \mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

subtrahendo et reducendo invenimus formulam

$$1.\quad \overset{1}{P}(u,a)$$
$$= P(u,a,k')+\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k')\,u - \mathrm{arc\,tang}\,[(\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{dn}(a,k').\,\mathrm{tn}\,u.\,\mathrm{dn}\,u],$$

qua functio $\overset{1}{P}(u,a)$ reducitur ad $P(u,a,k')$, sive $P(u,a)$ ad $\overset{1}{P}(u,a,k')$, si

duos modulos k et k' permutamus, quo formula abit in

$$\overset{\text{I}}{P}(u,a,k') = P(u,a) + \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u - \operatorname{arc\,tang}[\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn}(u,k') \operatorname{dn}(u,k')].$$

E formula modo eruta aliam deducimus, quae functionem $N(u,a)$ spectat. Substituamus pro $\overset{\text{I}}{P}(u,a,k')$ valorem $u\,.\,\overset{\text{I}}{M}(a,k') - \overset{\text{I}}{N}(u,a,k')$ et pro $P(u,a)$ valorem $-u\,.\,M(a) + N(u,a)$, tunc est

$$u\,[\overset{\text{I}}{M}(a,k') + M(a)]$$
$$= \overset{\text{I}}{N}(u,a,k') + N(u,a) + (\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a)\,u - \operatorname{arc\,tang}[\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn}(u,k') \operatorname{dn}(u,k')],$$

quia vero secundum articulum 5. est

$$\overset{\text{I}}{M}(a,k') + M(a) = \operatorname{tn} a \,.\, \operatorname{dn} a - \frac{\pi a}{2KK},$$

substituendo oritur formula gravissimi momenti

$$N(u,a) + \overset{\text{I}}{N}(u,a,k') = \operatorname{arc\,tang}[\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn}(u,k') \operatorname{dn}(u,k')] - \frac{\pi a u}{2KK'}, \text{ sive}$$

2. $$N(u,a) + N(a,u,k') = \operatorname{arc\,tang}[\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn}(u,k') \operatorname{dn}(u,k')] - \frac{\pi a u}{2KK'},$$

qua functiones $N(u,a)$ et $N(a,u,k')$, ad se invicem reducuntur. Series, quibus functiones hae exprimuntur, ad calculum numericum aptissimae sunt:

$$N(u,a) = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos\eta a\, \mathfrak{Cos}\,\eta u}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos\eta a\, \mathfrak{Cos}\,\eta u}\right)$$
$$+ \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos\eta a\, \mathfrak{Cos}\,\eta u}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta a \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K' - \cos\eta a\, \mathfrak{Cos}\,\eta u}\right) + \text{etc.}$$

et

$$N(a,u,k') = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta' u \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta' a}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K - \cos\eta' u\, \mathfrak{Cos}\,\eta' a}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta' u \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta' a}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K - \cos\eta' u\, \mathfrak{Cos}\,\eta' a}\right)$$
$$+ \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta' u \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta' a}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K - \cos\eta' u\, \mathfrak{Cos}\,\eta' a}\right) + \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin\eta' u \,.\, \mathfrak{Sin}\,\eta' a}{\mathfrak{Cos}\,7\eta' K - \cos\eta' u\, \mathfrak{Cos}\,\eta' a}\right)$$
$$+ \text{etc.};$$

utraque series convergit pro quibuscunque valoribus argumentorum a et u; at prima series rapidissime convergit, si est $\vartheta < 45°$ sive $\theta = 45°$ (posito $k = \sin\theta$), altera vero series pro $N(a,u,k')$ rapidissime convergit, si est ($\theta = 45°$, sive) $\theta > 45°$; tunc enim est $K' < K$, ideoque $\eta' K$ sive $\pi \,.\, \frac{K}{K'} > \pi$ sive > 3, quapropter functiones $\mathfrak{Cos}\,\eta' K$, $\mathfrak{Cos}\,3\eta' K$, $\mathfrak{Cos}\,5\eta' K$, etc. citissime grandescunt. Seriem igitur semper eligere possumus talem, quae rapidissime convergat, quo calculus in numeris finitis non parum sublevatur; functionem igitur $N(a,u,k')$ reducimus ad $N(u,a)$, si est $\theta < 45°$, et vice versa hanc ad illam, si est $\theta > 45°$.

Functione $\mathfrak{D}(x)$ etiam nunc nonnisi in calculo analytico uti possumus. Est

$$\overset{\text{I}}{N}(u,a) = \frac{1}{2i}\log\frac{\mathfrak{D}(u+ai)}{\mathfrak{D}(u-ai)}, \text{ ideoque}$$

$$\overset{\text{I}}{P}(u,a) = u.M(a) - \frac{1}{2i}\log\frac{\mathfrak{D}(u+ai)}{\mathfrak{D}(u-ai)},$$

calculus vero in numeris finitis aequationibus his ob formam imaginariam non promovetur; destituta vero hac forma relabimur in formulam

$$\overset{\text{I}}{P}(u,a) = u.\overset{\text{I}}{M}(a) - \overset{\text{I}}{N}(u,a), \text{ sive}$$

$$\overset{\text{I}}{P}(u,a) = u.\overset{\text{I}}{M}(a) - N(a,u).$$

25.

Solutio problematis dynamici pertractati in dissertatione inaugurali recentissima: „*De motu gyratorio corporis rigidi etc.*" (quam supra laudavimus) pendet ab integrali $\overset{\text{I}}{P}(u,a)$; in disquisitionibus suis dynamicis spectatissimus auctor in peculiarem incidit quaestionem de inveniendo valore argumenti u tali, ut functio ea, quae in signis nostris est $\overset{\text{I}}{N}(u,a)$ sive $N(a,u)$, maximi minimive proprietate gaudeat; satisfaciendum igitur est aequationi differentiali

$$\frac{\partial \overset{\text{I}}{N}(u,a)}{\partial u} = 0.$$

E serie 3. articuli 22. differentiando illico deducimus aequationem

$$1. \quad \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,\eta a.\cos\eta u}{\mathfrak{Sin}\,\eta K'} + \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,2\eta a.\cos 2\eta u}{\mathfrak{Sin}\,2\eta K'} + \frac{\eta\,\mathfrak{Sin}\,3\eta a.\cos 3\eta u}{\mathfrak{Sin}\,3\eta K'} + \text{etc.} = 0,$$

qua argumentum u datis a et k determinatur. Eadem aequatio, si a signorum diversitate abstrahis, alio modo inventa est in dissertatione inaugurali (pag. 39.); quomodo vero ex hac aequatione valor ipsius u erui possit, hoc sese nescire profitetur modestissimus auctor, qui in eadem pagina verba profert: „quod argumentum, quamvis invitus, doctioribus relinquere coactus sum." Rem facillimam absolvendi partes nunc suscipio. Aequatio (1.) etiam hoc modo exhiberi potest

$$2. \quad \frac{M(ai+u)+M(ai-u)}{2i} = 0,$$

quod et ipse invenit doctissimus ***Rueb***, qui vice versa ex hac aequatione prius inventa derivavit aequationem (1.).

Aequatio vero 2. facillime ita transformari potest, ut ipsius u valor incognitus commode erui queat; invenimus enim in articulo 5. formulam

$$M(a) - \frac{M(a+u)+M(a-u)}{2} = \frac{k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} u^2}{1-k^2 \operatorname{sn} a^2 \operatorname{sn} u^2},$$

quae ponendo ai loco a et per i dividendo abit in hanc

$$\overset{1}{M}(a) - \frac{M(ai+u)+M(ai-u)}{2i} = \frac{k^2 \operatorname{tn}(a,k').\operatorname{dn}(a,k').\operatorname{sn} u^2}{(1+k^2 \operatorname{tn}(a,k')^2.\operatorname{sn} u^2).\operatorname{cn}(a,k')^2}$$

ideoque ope aequationis 2. reducitur ad simplicem hanc:

$$\frac{\operatorname{cn}(a,k')^2.\overset{1}{M}(a)}{k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{dn}(a,k')} = \frac{\operatorname{sn} u^2}{1+k^2 \operatorname{tn}(a,k')^2.\operatorname{sn} u^2}, \quad \text{sive}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sn} u^2} = k^2 \operatorname{tn}(a,k').\left(\frac{\operatorname{dn}(a,k')}{\operatorname{cn}(a,k')^2 \overset{1}{M}(a)} - \operatorname{tn}(a,k')\right),$$

cujus ope valor argumenti u e datis quantitatibus a et k satis commode computatur. Innumera hinc inveniuntur argumenta u, pro quibus functio $\overset{1}{N}(u,a)$ aut maxima aut minima erit. Sed mittamus hanc quaestionem a proposito nostro alienam.

26.

Cum functione quarta $\overset{1}{\mathfrak{P}}(u,a)$, quae iterum hyperbolicae est naturae, connexa est functio $\overset{1}{\mathfrak{N}}(u,a)$, quae oritur e functione, $N(u,a)$, si ai loco a ponimus, et factorem inde ortum i dejicimus. Ponamus igitur $\overset{1}{\mathfrak{N}}(u,a) = \frac{N(u,ai)}{i}$, sive

1. $N(u,ai) = i.\overset{1}{\mathfrak{N}}(u,a)$, tunc vice versa est
2. $\overset{1}{\mathfrak{N}}(u,ai) = i.N(u,a)$.

Functionis $\mathfrak{N}(u,a)$ evolutiones in series e formulis artic. 18. deducimus in forma reali:

3. $$\overset{1}{\mathfrak{N}}(u,a) = \frac{\operatorname{Sin}\eta a.\operatorname{Sin}\eta u}{1.\operatorname{Sin}\eta K'} + \frac{\operatorname{Sin}2\eta a.\operatorname{Sin}2\eta u}{2.\operatorname{Sin}2\eta K'} + \frac{\operatorname{Sin}3\eta a.\operatorname{Sin}3\eta u}{3.\operatorname{Sin}3\eta K'} + \text{etc.},$$

4. $$\operatorname{Tang}\overset{1}{\mathfrak{N}}(u,a) = \frac{2h \operatorname{Sin}\eta a.\operatorname{Sin}\eta u - 2h^4 \operatorname{Sin}2\eta a.\operatorname{Sin}2\eta u + 2h^9 \operatorname{Sin}3\eta a.\operatorname{Sin}3\eta u - \text{etc.}}{1 - 2h \operatorname{Cos}\eta a.\operatorname{Cos}\eta u + 2h^4 \operatorname{Cos}2\eta a.\operatorname{Cos}2\eta u - 2h^9 \operatorname{Cos}3\eta a.\operatorname{Cos}3\eta u + \text{etc.}},$$

5. $$\begin{aligned}\overset{1}{\mathfrak{N}}(u,a) = {} & \operatorname{Arc}\operatorname{Tang}\left(\frac{\operatorname{Sin}\eta a.\operatorname{Sin}\eta u}{\operatorname{Cos}\eta K' - \operatorname{Cos}\eta a.\operatorname{Cos}\eta u}\right) + \operatorname{Arc}\operatorname{Tang}\left(\frac{\operatorname{Sin}\eta a.\operatorname{Sin}\eta u}{\operatorname{Cos}3\eta K' - \operatorname{Cos}\eta a.\operatorname{Cos}\eta u}\right) \\ & + \operatorname{Arc}\operatorname{Tang}\left(\frac{\operatorname{Sin}\eta a.\operatorname{Sin}\eta u}{\operatorname{Cos}5\eta K' - \operatorname{Cos}\eta a.\operatorname{Cos}\eta u}\right) + \operatorname{Arc}\operatorname{Tang}\left(\frac{\operatorname{Sin}\eta a.\operatorname{Sin}\eta u}{\operatorname{Cos}5\eta K' - \operatorname{Cos}\eta a.\operatorname{Cos}\eta u}\right) \\ & + \text{etc.}\end{aligned}$$

Formulae 3. et 4. lente convergunt, at series 5. cito convergit, dummodo posito $k = \sin\theta$, est $\theta < 45^0$.

Si etiam in formula $P(u,a) = -u.M(a) + N(u,a)$ ponimus ai loco a, et aequationem dividimus per i, jam oritur formula fundamentalis

6. $$\overset{1}{\mathfrak{P}}(u,a) = -u.\overset{1}{M}(a) + \overset{1}{\mathfrak{N}}(u,a).$$

Functio $\overset{\text{I}}{\mathfrak{N}}(u,a)$ iterum ea gaudet proprietate, ut sit

$$7. \qquad \overset{\text{I}}{\mathfrak{N}}(u,a) = \overset{\text{I}}{\mathfrak{N}}(a,u),$$

in quo functio $\overset{\text{I}}{\mathfrak{N}}(u,a)$ convenit cum functione $\mathfrak{N}(u,a)$, at non convenit cum functionibus $N(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{N}(u,a)$.

Ex aequationibus

$$\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a) = -u.\overset{\text{I}}{M}(a) + \overset{\text{I}}{N}(u,a) \quad \text{et}$$
$$\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(a,u) = -a.\overset{\text{I}}{M}(u) + \overset{\text{I}}{\mathfrak{N}}(u,a)$$

subtrahendo oritur formula

$$8. \qquad \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a) - \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(a,u) = a.\overset{\text{I}}{M}(u) - u.\overset{\text{I}}{M}(a)$$

Theorema de permutatione argumentorum a et u in ea forma, in qua Cl^{mus} *Jacobi* ipsum pronunciavit, valet igitur de integralibus ellipticis tertiae speciei nonnisi iis, quae hyperbolicae sunt naturae; ipsum falsum esse, si integralia cyclicae sunt naturae, jam supra monstravimus, nam functio $N(u,a)$ in aliam abit $\overset{\text{I}}{N}(a,u)$, si argumenta a et u permutantur, et $\overset{\text{I}}{N}(u,a)$ in $N(a,u)$.

27.

Si in formula generali 1. articuli 20. ponimus $a\,i$ loco i, ipsamque per i dividimus, est

$$1. \qquad \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a) + \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(v,a)$$
$$= \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u+v,a) - \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathfrak{tn}(a,k')\,\mathfrak{dn}(a,k')^2\,\mathfrak{sn}(u,k')\,\mathfrak{sn}(v,k')\,\mathfrak{sn}(u+v,k')}{-k^2\,\mathfrak{sn}(a,k')^2 + \mathfrak{dn}(a,k')^2\,\mathfrak{cn}(u,k')\,\mathfrak{cn}(v,k')\,\mathfrak{cn}(u+v,k')}\right)$$

et si in formula generali 2. articuli 20. ponitur $a\,i$ loco i et simul $b\,i$ loco b, divisione per i oritur formula altera

$$2. \qquad \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a) + \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,b) = \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a+b) + k^2\,\mathfrak{tn}(a,k')\,\mathfrak{tn}(b,k')\,\mathfrak{tn}(a+b,k').u$$
$$- \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathfrak{sn}(a,k')\,\mathfrak{sn}(b,k')\,\mathfrak{sn}(a+b,k')\,\mathfrak{tn}(u,k')\,\mathfrak{dn}(u,k')}{-k^2\,\mathfrak{sn}(u,k')^2 + \mathfrak{dn}(u,k')\,\mathfrak{cn}(a,k')\,\mathfrak{cn}(b,k)\,\mathfrak{cn}(a+b,k')}\right),$$

quae formula etiam e formula 1. deduci potest adjumento theorematis, quod formula 8. articuli praecedentis exprimitur.

Terminus n^{tus} seriei 5. in articulo praecedenti est

$$\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta\,a\,\mathfrak{Sin}\,\eta\,u}{\mathfrak{Cos}\,[(2n+1)\,\eta\,K'] - \mathfrak{Cos}\,\eta\,a\,\mathfrak{Cos}\,\eta\,u}\right);$$

scimus vero, esse $\mathfrak{Arc\,Tang}(1) = \frac{\text{I}}{0}$, quare terminus ille n^{tus} est $= \frac{\text{I}}{0}$, si est $\mathfrak{Cos}\,[(2n-1)\,\eta\,K'] - (\mathfrak{Cos}\,\eta\,a\,\mathfrak{Cos}\,\eta\,u + \mathfrak{Sin}\,\eta\,a\,\mathfrak{Sin}\,\eta\,u) = 0$, haec vero aequatio facillime reducitur ad simplicem hanc

$$a + u = (2n+1).K'.$$

Jam terminus seriei modo dictae primus $= \frac{1}{0}$ est, si est $a+u=K'$; etiam in fine articuli 21. vidimus, denominatorem formulae differentialis pro $\mathfrak{P}(u,a)$ esse $=0$, si est $a+u=K'$, quare ponamus in functione $\mathfrak{P}(u,a)$ summam $a+u$ semper $<K'$ esse. Si vero $a+u<K'$, series 5. articuli 26. jam inde a termino primo rapide convergit, dummodo simul $\theta<45^\circ$ est.

In formulis modo inventis nec $u+v=K'$, nec $a+b=K'$ ponere possumus, ne summa duorum argumentorum in functionibus $\mathfrak{P}(u+v,a)$ et $\mathfrak{P}(u,a+b)$ fiat $>K'$.

Si vero in formula 4. articuli 20. ponimus ai loco a et per i dividimus, obtinemus primo

$$\mathfrak{P}(u,a)+\frac{P(u,K-ai)}{i}=-\frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u+\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^3\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}(u,k')}{\mathrm{dn}(u,k')}\right);$$

quia vero secundum articulum 23. est

$$i.\mathfrak{P}(u,K-ai)=-P(u,K'-a,k')=i.i.P(u,K'-a,k')$$

formula haec ponendo ui loco u abit in

$$P(u,K-ai)=i.\mathfrak{P}(u,K'-a,k')$$

quo valore substituto, prior aequatio abit in realem hanc

$$3.\quad \mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,K'-a,k')=-\frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u+\mathfrak{Arc\,Tang}\left(k^2.\frac{\mathrm{tn}(a,k')\,\mathrm{tn}(u,k')}{\mathrm{dn}(a,k')\,\mathrm{tn}(u,k')}\right).$$

Ponamus brevitatis causa paullisper

$$z=k'^2.\frac{\mathrm{tn}\,a.\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,a.\mathrm{dn}\,u},$$

tunc est $\frac{1+z}{1-z}=\frac{\mathrm{dn}a\,\mathrm{dn}\,u+k'^2\mathrm{tn}\,a.\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}a\,\mathrm{dn}\,u-k'^2\mathrm{tn}\,a.\mathrm{tn}\,u}=\frac{\mathrm{cn}(a-u).\mathrm{dn}(a+u)}{\mathrm{cn}(a+u).\mathrm{dn}(a-u)}$, ideoque $\mathfrak{Arc\,Tang}(z)$ $=\frac{1}{2}\log\frac{1+z}{1-z}=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathrm{cn}(a-u).\mathrm{dn}(a+u)}{\mathrm{cn}(a+u).\mathrm{dn}(a-u)}\right)$; si in formula hac ponimus k' loco k, et valorem inde ortum in aequatione 3. substituimus, ipsa abit in

$$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,K'-a,k')=-\frac{k^2\,\mathrm{tn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}u+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathrm{cn}(a-u,k').\mathrm{dn}(a+u,k')}{\mathrm{cn}(a+u,k').\mathrm{dn}(a-u,k')}\right),$$

sive permutatis duobus modulis k et k' in hanc

$$4.\quad \mathfrak{P}(u,a,k')+\mathfrak{P}(u,K-a)=-\frac{k'^2\,\mathrm{tn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u+\frac{1}{2}\log\left(\frac{\mathrm{cn}(a-u)\,\mathrm{dn}(a+u)}{\mathrm{cn}(a+u)\,\mathrm{dn}(a-u)}\right).$$

Inventa est in articulo 16. formula

$$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,k-a)=\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}.u+\frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{dn}(a+u)}{\mathrm{dn}(a-u)},$$

et si ipsam subtrahimus a formula 4., reductione facillima pervenimus ad

$$5.\quad \mathfrak{P}(u,a,k')=\mathfrak{P}(u,a)-\mathrm{tn}\,a.\,\mathrm{dn}\,a.\,u+\frac{1}{2}\log\frac{\mathrm{cn}(a-u)}{\mathrm{cn}(a+u)}.$$

Si in aequatione 1. articuli 24. ponimus 24. ai loco a et per i dividimus, oritur formula

$$\mathfrak{P}(u,a) = \overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a,k') + \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u - \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u), \text{ sive}$$

$$6.\quad \overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a,k') = \mathfrak{P}(u,a) - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u + \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u),$$

quae cum aequatione 5. est eadem.

28.

Quia est

$$\mathfrak{P}(u,a) = u\,.\,M(a) - \mathfrak{N}(u,a) \quad \text{et} \quad \overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a,k') = -u\,.\,\overset{\imath}{M}(a,k') + \overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k')$$

valoribus his in aequatione 6. praecedentis substitutis prodit primo

$$\overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k') + \mathfrak{N}(u,a)$$
$$= u[M(a) + \overset{\imath}{M}(a,k')] - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u + \mathfrak{Arc\,Tang}(\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u);$$

si vero aequationem 1. articuli 5. multiplicamus factore u, oritur

$$u[M(a) + \overset{\imath}{M}(a,k')] - \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \,.\, u = -\frac{\pi a u}{2KK'},$$

quare est

$$1.\quad \begin{cases} \overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k') + \mathfrak{N}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}[\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u] - \dfrac{\pi a u}{2KK'}, & \text{sive} \\ \overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k') + \mathfrak{N}(u,a) = \frac{1}{2}\log\dfrac{\operatorname{cn}(a-u)}{\operatorname{cn}(a+u)} - \dfrac{\pi a u}{2KK'}, \end{cases}$$

qua formula functiones $\mathfrak{N}(u,a)$ et $\overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k')$, quarum moduli sunt k et k' diversi, ad se invicem reducuntur. Si vero series

$$2.\quad \overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a \sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \cos\eta a \cos\eta u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a \sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \cos\eta a \cos\eta u}\right)$$
$$+ \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a \sin\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \cos\eta a \cos\eta u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\sin\eta a \sin\eta a}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K' - \cos\eta a \cos\eta u}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

et

$$3.\quad \overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k') = \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' a\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,\eta' K - \mathfrak{Cos}\eta' a\,\mathfrak{Cos}\eta' u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' a\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta' K - \mathfrak{Cos}\eta' a\,\mathfrak{Cos}\eta' u}\right)$$
$$+ \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' a\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K - \mathfrak{Cos}\eta' a\,\mathfrak{Cos}\eta' u}\right) + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,\eta' a\,\mathfrak{Sin}\,\eta' u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta' K - \mathfrak{Cos}\eta' a\,\mathfrak{Cos}\eta' u}\right)$$
$$+ \text{etc.}$$

quae pro quovis modulo k sive k' convergunt, diligentius perlustramus, non fugit seriem 2. rapidissime convergere, si est $\theta < 45^\circ$, ipsamque adhuc rapide convergere, si angulus θ angulum 45° differentia superat non nimis magna, at eandem seriem lente convergere, si differentia $90^\circ - \theta = \theta'$ est exigua; tunc igitur functio $\mathfrak{N}(u,a)$ ad functionem $\overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k')$ ope formulae 1. reducenda est; series vero 3., qua functio $\overset{\imath}{\mathfrak{N}}(u,a,k')$ exprimitur, rapidissime convergit, si est θ' angulus exiguus.

Seriem igitur pro computo numerico integralium ellipticorum tertiae speciei, quae hyperbolicae sunt naturae, semper eligere possumus talem, quae rapidissime convergit, dummodo summa argumentorum a et u in functione $\mathfrak{P}(u,a)$ est $<K$, pro angulo $\theta' = 90^\circ - \theta$ exiguo, et eadem summa in functione $\overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a)$ est $<K'$, pro angulo $\theta = 90^\circ - \theta'$ exiguo.

Ponamus $\mathfrak{O}(ui) = \overset{\imath}{\mathfrak{O}}(u)$, tunc e formula 4. articuli 10. illico obtinemus

$$4. \quad \overset{\imath}{\mathfrak{O}}(u) = \left(1 - \frac{\mathfrak{Cos}\,\eta a}{\mathfrak{Cos}\,\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{Cos}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\mathfrak{Cos}\,\eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K'}\right)\left(1 - \frac{\cos \eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K'}\right)\ldots.$$

Si in formula $P(u,a) = -u.M(a) + \frac{1}{2i}\log\frac{\mathfrak{O}(a+ui)}{\mathfrak{O}(a-ui)}$ articuli 20. ponimus ai loco a, et ipsam per i dividimus, illico oritur

$$\overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a) = -u.\overset{\imath}{M}(a) - \tfrac{1}{2}\log\frac{\overset{\imath}{\mathfrak{O}}(a+u)}{\overset{\imath}{\mathfrak{O}}(a-u)}$$

sive

$$5. \quad \overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a) = -u.\overset{\imath}{M}(a) + \tfrac{1}{2}\log\frac{\overset{\imath}{\mathfrak{O}}(a-u)}{\overset{\imath}{\mathfrak{O}}(a+u)}.$$

Quare functio $\overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a)$ simili modo, $\mathfrak{P}(u,a)$, ad tabulas cum duobus argumentis revocari potest; functiones $P(u,a)$, et $\overset{\imath}{P}(u,a)$, quae cyclicae sunt naturae, nonnisi analytice et quidem in forma imaginaria ad functiones duorum argumentorum revocari possunt, non vero ad tabulas, quae duo habeant argumenta, seu duplicem progressum. **Tanta est varietas inter naturam cyclicam et naturam hyperbolicam integralium ellipticorum tertiae speciei!**

29.

Praeter quatuor integralium ellipticorum tertiae speciei formas $\mathfrak{P}(u,a)$, $\overset{\imath}{\mathfrak{P}}(u,a)$, $P(u,a)$ et $\overset{\imath}{P}(u,a)$, inter quas $P(u,a)$ et $\overset{\imath}{P}(u,a)$ sunt gravissimi momenti, quia his functionibus saepissime utimur in Geometria et Mechanica, aliae sunt quatuor formae, quas eodem fere jure consideramus ut primitivas. Ponamus brevitatis causa

$$w = K + iK,$$

tunc facillime invenies formulas ex elementis

$$\operatorname{sn}(u+w) = \frac{\operatorname{dn} u}{k \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{cn}(u+w) = \frac{k'}{ik \operatorname{cn} u},$$

$$\operatorname{tn}(u+w) = \frac{i \operatorname{dn} u}{k'},$$

$$\operatorname{dn}(u+w) = ik' \operatorname{tn} u.$$

E formulis his componimus primo

$$k^2 \operatorname{sn}(a+w)\operatorname{cn}(a+w)\operatorname{dn}(a+w).\operatorname{sn}(u+w)^2 = \frac{k'^2.\operatorname{dn}a\operatorname{tn}a\operatorname{dn}u^2}{k^2.\operatorname{cn}a^2.\operatorname{cn}u^2};$$

porro est

$$1-k^2\operatorname{sn}a^2\operatorname{sn}u^2 = 1-\frac{\operatorname{dn}a^2\operatorname{dn}u^2}{k^2\operatorname{cn}a^2\operatorname{cn}u^2} = -\frac{k'^2}{k^2}.\frac{1-k^2\operatorname{sn}a^2\operatorname{sn}u^2}{\operatorname{cn}a^2.\operatorname{cn}u^2};$$

quare substitutis his valoribus in formula pro $\mathfrak{P}(u+w, a+w)$ emergit

$$-\mathfrak{P}(u+w, a+w)+\text{const.} = \int_0^u \frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{dn}u^2.\partial u}{1-k^2\operatorname{sn}a^2\operatorname{sn}u^2}.$$

Ponamus nunc integrale

$$1.\qquad \int_0^u \frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{dn}u^2.\partial u}{1-k^2\operatorname{sn}a^2.\operatorname{sn}u^2} = \mathfrak{Q}(u,a),$$

tunc enim est $-\mathfrak{P}(u+w, a+w)+\text{const.} = \mathfrak{Q}(u,a)$, quare ponendo $u=0$ habemus $-\mathfrak{P}(u, a+w)+\text{const.} = 0$, ideoque

$$2.\qquad \mathfrak{Q}(u,a) = \mathfrak{P}(w, a+w)-\mathfrak{P}(u+w, a+w),$$

quae formula ut definitio integralis novi $\mathfrak{Q}(u,a)$ censenda est.

Integrale $\mathfrak{Q}(u,a)$ integrali $E(u)=\int_0^u \operatorname{dn}u^2.\partial u$ quodammodo similis est. Relatio inter integralia $\mathfrak{P}(u,a)$ et $\mathfrak{Q}(u,a)$ etiam in forma reali exprimi potest. Vidimus jam in articulo 6., esse

$$\frac{k^2\operatorname{sn}a\operatorname{cn}a\operatorname{dn}a\operatorname{sn}u^2}{1-k^2\operatorname{sn}a^2\operatorname{sn}u^2}+\frac{\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{dn}u^2}{1-k^2\operatorname{sn}a^2\operatorname{sn}u^2} = \operatorname{tn}a.\operatorname{dn}a,$$

si aequationem hanc multiplicamus factore ∂u, integrando jam provenit

$$3.\qquad \mathfrak{Q}(u,a)+\mathfrak{P}(u,a) = \operatorname{tn}a.\operatorname{dn}a.u$$

relatio inter integralia $\mathfrak{Q}(u,a)$ et $\mathfrak{P}(u,a)$ in forma reali, et quidem relatio reciproca, quare functio $\mathfrak{Q}(u,a)$ eodem gaudet jure, quo functio sive integrale $\mathfrak{P}(u,a)$.

Si formulam $\mathfrak{P}(u,a) = u.M(a)-\mathfrak{N}(u,a)$ subtrahimus a formula 3., oritur aequatio

$$\mathfrak{Q}(u,a) = [\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a-M(a)]u+\mathfrak{N}(u,a), \text{ sive}$$

$$4.\qquad \begin{cases} \mathfrak{Q}(u,a) = u.R(a)+\mathfrak{N}(u,a), \text{ seu} \\ \mathfrak{Q}(u,a) = u.R(a)+\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(a+u)}{\Theta(a-a)}, \end{cases}$$

ponendo

$$5.\qquad R(a) = \operatorname{tn}a\operatorname{dn}a-M(a) = \overset{\text{I}}{M}(a,k')+\frac{\pi a}{2KK'}.$$

Functio $R(a)$ ad integrale $E(a)$ ellipticum secundae speciei reducitur formula

$$6.\qquad R(a) = \operatorname{tn}a\operatorname{dn}a+a.\frac{E}{K}-E(a).$$

E formula 3. et formula 6. articuli 27. addendo invenimus

$$7.\qquad \mathfrak{Q}(u,a)+\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a,k') = \mathfrak{Arc}\,\mathfrak{Tng}(\operatorname{tn}a\operatorname{dn}a\operatorname{tn}u\operatorname{dn}u).$$

30.

E forma primitiva $\mathfrak{Q}(u,a)$ pari modo ac e forma primitiva $\mathfrak{P}(u,a)$ alias tres deducimus formas $Q(u,a)$, $\overset{\text{I}}{Q}(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a)$.

Ponamus hunc in finem

1. $\mathfrak{Q}(ui,a) = i.Q(u,a)$ et vice versa $Q(ui.a) = i.\mathfrak{Q}(u,a)$;
2. $\mathfrak{Q}(u,ai) = i.\overset{\text{I}}{Q}(u,a)$ et vice versa $\overset{\text{I}}{Q}(u,ai) = i.\mathfrak{Q}(u,a)$;
3. $Q(u,ai) = i.\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a)$ et vice versa $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,ai) = i.Q(u,a)$;

quibus e formulis deducimus adhuc sequentes

4. $\mathfrak{Q}(ui,ai) = -\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a)$ et vice versa $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(ui,ai) = -\mathfrak{Q}(u,a)$;
5. $Q(ui,ai) = -\overset{\text{I}}{Q}(u,a)$ et vice versa $\overset{\text{I}}{Q}(ui,ai) = -Q(u,a)$;
6. $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(ui,a) = i.\overset{\text{I}}{Q}(u,a)$ et vice versa $\overset{\text{I}}{Q}(ui,a) = i.\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a)$.

Adjumento harum formularum inveniuntur formulae differentiales sequentes

7. $$Q(u,a) = \int_0^u \frac{\operatorname{tn} a \operatorname{dn} a \operatorname{dn}(u,k')^2 . \partial u}{1 - \operatorname{dn} a^2 . \operatorname{sn}(u,k')^2},$$
8. $$\overset{\text{I}}{Q}(u,a) = \int_0^u \frac{\operatorname{tn}(a,k') \operatorname{dn}(a,k') . \operatorname{dn} u^2 . \partial u}{1 + k^2 \operatorname{tn}(a,k')^2 . \operatorname{sn} u^2},$$
9. $$\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a) = \int_0^u \frac{\operatorname{tn}(a,k') \operatorname{dn}(a,k') \operatorname{dn}(u,k')^2 . \partial u}{1 - \frac{\operatorname{dn}(a,k')^2}{\operatorname{cn}(a,k')^2} \operatorname{sn}(u,k')^2}.$$

In formula ultima etiam $\left(\frac{1}{\operatorname{sn}(K'-a,k')}\right)^2$ loco $\frac{\operatorname{dn}(a,k')^2}{\operatorname{sn}(a,k')^2}$ poni potest. Si insuper ponimus $R(ai) = i.\overset{\text{I}}{R}(a)$, est

10. $$\begin{cases} \overset{\text{I}}{R}(a) = \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{dn}(a,k') - \overset{\text{I}}{M}(a) = M(a,k') + \frac{\pi a}{2KK'}, \text{ seu} \\ \overset{\text{I}}{R}(a) = E(a,k') - a.\frac{E'}{K'} + \frac{\pi a}{2KK'} = E(a,k') + a.\frac{E}{K} - a, \end{cases}$$

ita ut sit

11. $$R(a) + \overset{\text{I}}{R}(a,k') = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a + \frac{\pi a}{2KK'}.$$

31.

Adjumento formularum 1, 2, 3, ... 6 articuli praecedentis e formula 3. articuli 29. illico deducimus formulas

1. $Q(u,a) - P(u,a) = \operatorname{tn} a \operatorname{dn} a . u,$
2. $\overset{\text{I}}{Q}(u,a) + \overset{\text{I}}{P}(u,a) = \operatorname{tn}(a,k') . \operatorname{dn}(a,k') . u,$
3. $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a) - \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a) = \operatorname{tn}(a,k') . \operatorname{dn}(a,k') . u.$

Pari modo deducimus e formula

4. $\mathfrak{Q}(u,a)+\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a,k') = \mathfrak{Arc\,Tang}(\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u) = \frac{1}{2}\log\frac{\text{cn}\,(a-u)}{\text{cn}\,(a+u)}$,

5. $Q(u,a)-\overset{\text{I}}{P}(u,a,k') = \text{arc tang}[\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{tn}\,(u,k')\,\text{dn}\,(u,k')]$,

6. $\overset{\text{I}}{Q}(u,a)+P(u,a,k') = \text{arc tang}[\text{tn}\,(a,k')\,\text{dn}\,(a,k')\,\text{tn}\,u\,.\,\text{dn}\,u]$,

7. $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a)-\mathfrak{P}(u,a,k') = \mathfrak{Arc\,Tang}[\text{tn}\,(a,k')\,\text{dn}\,(a,k')\,\text{tn}\,(u,k)\,\text{dn}\,(u,k')]$,

sive

$$\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a,k')-\mathfrak{P}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}[\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u].$$

E formula fundamentali pro functione $\mathfrak{Q}(u,a)$

8. $\mathfrak{Q}(u,a) = u\,.\,R(a)+\mathfrak{R}(u,a)$ deducimus

9. $Q(u,a) = u\,.\,R(a)+N(u,a)$,

10. $\overset{\text{I}}{Q}(u,a) = u\,.\,\overset{\text{I}}{R}(a)+\overset{\text{I}}{N}(u,a)$,

11. $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a) = u\,.\,\overset{\text{I}}{R}(a)+\overset{\text{I}}{\mathfrak{R}}(u,a)$.

E formulis 5. et 6. perspicitur, functiones $Q(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{Q}(u,a)$ esse cyclicae naturae, et e formulis 4. 7. patet, functiones $\mathfrak{Q}(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a)$ esse hyperbolicae naturae.

32.

Quia est

$$\mathfrak{Q}(u,a) = u\,.\,R(a)+\mathfrak{R}(u,a) \text{ pariter est}$$
$$\mathfrak{Q}(v,a) = v\,.\,R(a)+\mathfrak{R}(u,a) \text{ et}$$
$$\mathfrak{Q}(u+v,a) = (u+v)\,.\,R(a)+\mathfrak{R}(u+v,a),$$

quare habemus

1. $\mathfrak{Q}(u,a)+\mathfrak{Q}(v,a)-\mathfrak{Q}(u+v,a) = \mathfrak{R}(u,a)+\mathfrak{R}(v,a)-\mathfrak{R}(u+v,a)$,

et pariter

2. $Q(u,a)+Q(v,a)-Q(u+v,a) = N(u,a)+N(v,a)-N(u+v,a)$,

3. $\overset{\text{I}}{Q}(u,a)+\overset{\text{I}}{Q}(v,a)-\overset{\text{I}}{Q}(u+v,a) = N(a,u)+N(a,v)-N(a,u+v)$,

4. $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a)+\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(v,a)-\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u+v,a) = \overset{\text{I}}{\mathfrak{R}}(u,a)+\overset{\text{I}}{\mathfrak{R}}(v,a)-\overset{\text{I}}{\mathfrak{R}}(u+v,a)$.

Est $R(a) = \overset{\text{I}}{M}(a,k')-\frac{\pi a}{2KK'}$; $R(b) = \overset{\text{I}}{M}(b,k')-\frac{\pi b}{2KK'}$ et $R(a+b) = \overset{\text{I}}{M}(a+b,k')-\frac{\pi(a+b)}{2KK'}$, quare invenimus

$$R(a)+R(b)-R(a+b) = \overset{\text{I}}{M}(a,k')+\overset{\text{I}}{M}(b,k')-\overset{\text{I}}{M}(a+b,k').$$

Quia vero est $\overset{\text{I}}{M}(a,k)+\overset{\text{I}}{M}(b,k')-\overset{\text{I}}{M}(a+b,k') = -k^2\,\text{tn}\,a\,\text{tn}\,b\,\text{tn}\,(a+b)$, prior formula reducitur ad hanc

5. $R(a)+R(b)-R(a+b) = -k^2\,\text{tn}\,a\,\text{tn}\,b\,\text{tn}\,(a+b)$,

unde, si ai loco a et bi loco b ponimus, dividendo per i adhuc sequitur

6. $\overset{\text{I}}{R}(a)+\overset{\text{I}}{R}(b)-\overset{\text{I}}{R}(a+b) = k^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{sn}(b,k').\mathrm{sn}(a+b,k')$.

Si in formula 10. articuli 30. ponimus $a=K'$, est $\overset{\text{I}}{R}(K')=\frac{\pi}{2K}$, et si pariter in formula 6. ponimus $a+b=K'$, est

7. $\overset{\text{I}}{R}(a)+\overset{\text{I}}{R}(K'-a) = \frac{\pi}{2K}+\frac{k^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}$.

33.

Integralia elliptica tertiae speciei hucusque considerata sunt aut formae

1. $\int \frac{p.\,\mathrm{sn}\,u^2.\,\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}\,u^2}$ sive $\int \frac{q.\,\mathrm{dn}\,u^2.\,\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}\,u^2}$, aut

2. $\int \frac{p\,\mathrm{sn}\,(u,k')^2.\,\partial u}{1+n\,\mathrm{sn}\,(u,k')^2}$ sive $\int \frac{q\,\mathrm{dn}\,(u,k')^2.\,\partial u}{1+u\,\mathrm{sn}\,(u,k')^2}$,

formae hae abeunt in illas, si duo moduli k et k' permutantur, quare nonnisi de formis 1. loquimur. Integralia formae 1. pro varia numeri n magnitudine dividuntur in *quatuor classes; est enim numerus n* sensim decrescens

α. aut positivus inter limites $\frac{\text{I}}{0}$ et 0,
β. aut negativus inter limites 0 et $-k^2$,
γ. aut negativus inter limites $-k^2$ et -1,
δ. aut negativus inter limites -1 et $-\frac{\text{I}}{0}$.

Ad *classem primam* α. *pro modulo* k referenda sunt integralia $\overset{\text{I}}{P}(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{Q}(u,a)$ (quibus est natura cyclica), quia in iis est $n=+k^2.\mathrm{tn}(a,k')^2$.

Ad *classem secundam* β. *pro modulo* k referenda sunt integralia $\mathfrak{P}(u,a)$ et $\mathfrak{Q}(u,a)$ (quorum natura est hyperbolica), quia in iis est $n=-k^2.\,\mathrm{sn}\,a^2$.

Ad *classem tertiam* γ. *pro modulo* k referimus integralia $P(u,a,k')$ et $Q(u,a,k')$ (quae sunt cyclicae naturae), quia in ipsis est $n=-\mathrm{dn}(a,k')^2$.

Ad *classem denique quartam* δ. *pro modulo* k referimus integralia $\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a,k')$ et $\overset{\text{I}}{\mathfrak{Q}}(u,a,k')$ (quibus est natura hyperbolica), quia in ipsis est $n=-\frac{\mathrm{dn}\,a^2}{\mathrm{cn}\,a^2}=-(1+k'^2\,\mathrm{tn}\,a^2)$.

Formula 1. articuli 24. relationem sistit inter integralia $\overset{\text{I}}{P}(u,a)$ et $P(u,a,k')$, quare formula hac integralia primae et tertiae classis ad invicem reducuntur, et pariter formula 6. articuli 27., quae relationem sistit inter $\mathfrak{P}(u,a)$ et $\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,a,k')$ integralia secundae et quartae classis ad invicem reducuntur.

Quare formulae modo dictae ad reducendum aptissimae sunt. E formulis vero his facillime derivantur relationes duae, altera inter $\dot{Q}(u,a)$ et $\dot{Q}(u,a,k)$, altera vero inter integralia $\Omega(u,a)$ et $\dot{\Omega}(u,a,k')$.

At reductiones hae superfluae sunt, et praeferenda est reductio functionum $N(u,a)$ et $N(a,u,k')$ ad invicem, et pariter functionum $\mathfrak{N}(u,a)$ et $\dot{\mathfrak{N}}(u,a)$, quae instituitur per formulas hic repititas

$$3.\quad \begin{cases} N(u,a)+N(a,u,k') = \text{arc tang}\,[\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{tn}\,(u,k')\,\text{dn}\,(u,k')] - \frac{\pi a u}{2KK'}, \\ N(u,a,k')+N(a,u) = \text{arc tang}\,[\text{tn}\,(a,k')\,\text{dn}\,(a,k')\,\text{tn}\,u\,.\,\text{dn}\,u] - \frac{\pi a u}{2KK'}, \end{cases}$$

et per formulas

$$4.\quad \begin{cases} \dot{\mathfrak{N}}(u,a,k)+\mathfrak{N}(u,a) = \mathfrak{Arc\,Tang}\,[\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u] + \frac{\pi a u}{2KK'}, \\ \dot{\mathfrak{N}}(u,a,k)+\mathfrak{N}(u,a) = \log\sqrt{\frac{\text{cn}\,(a-u)}{\text{cn}\,(a+u)}} - \frac{\pi a u}{2KK'}. \end{cases}$$

E formulis 3. aliam deducimus; ponamus $K'-a$ loco a et $K-u$ loco u, tunc enim est

$$\text{tn}\,(K'-a,k')\,.\,\text{dn}\,(K'-a,k') = \frac{1}{k\,\text{tn}\,(a,k')}\cdot\frac{k}{\text{dn}\,(a,k')} = \frac{1}{\text{tn}\,(a,k')\,\text{dn}\,(a,k')} \text{ et pariter}$$

$$\text{tn}\,(K-u)\,.\,\text{dn}\,(K-u) = \frac{1}{\text{tn}\,u\,.\,\text{dn}\,u}, \text{ quare}$$

$$N(K-u,K'-a,k') + \dot{N}(K-u,K'-a) = \text{arc tang}\left(\frac{1}{\text{tn}\,(a,k')\,\text{dn}\,(a,k')\,\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u}\right) - \frac{\pi(K'-a)(K-u)}{2KK'}$$

et si addimus aequationem

$$N(u,a,k') + \dot{N}(u,a) = \text{arc tang}\,[\text{tn}\,(a,k')\,\text{dn}\,(a,k')\,\text{tn}\,u\,\text{dn}\,u] - \frac{\pi a u}{2KK'},$$

obtinemus reducendo formulam

$$5.\quad N(K-u,K'-a,k') + N(u,a,k') + \dot{N}(K-u,K'-a) + \dot{N}(u,a) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a}{K'} + \frac{u}{K} - \frac{2au}{2KK'}\right).$$

E formulis articuli 20. adhuc eruimus sequentes speciales.

$$6.\quad N(u,a)+N(K'-u,a) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{a}{K'}\right) - \text{arc tang}\left(\frac{\text{dn}\,a}{\text{tn}\,a}\cdot\frac{\text{sn}\,(u,k')\,\text{cn}\,(u,k')}{\text{dn}\,(u,k')}\right),$$

$$7.\quad N(a,u)+N(a,K-u) = \text{arc tang}\left(\frac{k^2\,\text{tn}\,(a,k')}{\text{dn}\,(a,k')}\cdot\frac{\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}\right);$$

formula 6. etiam sic exhiberi potest

$$N(u,a)+N(K'-u,a) = \text{arc tang}\left(\frac{\text{tn}\,a\,\text{dn}\,a\,(u,k')}{\text{dn}\,a\,\text{sn}\,(u,k')\,\text{cn}\,(u,k')}\right) - \frac{\pi a}{2K'}.$$

34.

Formula

$$P(u,a)+P(u,K-a) = -\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u + \mathrm{arctang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,(u,k')}{\mathrm{dn}\,(u,k')}\right)$$

conjungit integralia $P(u,a)$ et $P(u,K-a)$. Est vero

$$P(u,a) = \int_0^u \frac{k^2\,.\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,(u,k')^2\,.\,\partial u}{1-\mathrm{dn}\,a^2\,.\,\mathrm{sn}\,(u,k')^2};$$

eruamus nunc etiam differentiale functionis $P(u,K-a)$ ita, ut functionibus argumenti a ipsius exprimatur. Est

$$k^2\,\mathrm{sn}\,(K-a)\,.\,\mathrm{cn}\,(K-a)\,.\,\mathrm{dn}\,(K-a) = k^2\,.\,\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{cn}\,a}\,.\,\frac{k'\,\mathrm{sn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\,.\,\frac{k'}{\mathrm{dn}\,a} = \frac{k^2k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a^3},$$

ideoque

$$P(u,K-a) = \int_0^u \frac{k^2k'^2\,\mathrm{sn}\,a\,.\,\mathrm{cn}\,a\,.\,\mathrm{sn}\,(u,k')^2\,.\,\partial u}{\mathrm{dn}\,a^3\left(1-\frac{k'^2}{\mathrm{dn}\,a^2}\,\mathrm{sn}\,(u,k')^2\right)}.$$

Quare integralia $P(u,a,k')$ et $P(u,K'-a,k)$ habent formas similes

$$P(u,a,k') = \int_0^u \frac{m\,.\,\mathrm{sn}\,u^2\,.\,\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}\,u^2} \quad \text{et}$$

$$P(u,K'-a,k') = \int_0^u \frac{m'\,\mathrm{sn}\,u^2\,.\,\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}\,u^2}.$$

Videamus nunc, quaenam sint relationes inter numeros m, n, m', n'; est vero

$$m = k'^2\,\mathrm{sn}\,(a,k')\,\mathrm{cn}\,(a,k')\,\mathrm{dn}\,(a,k'), \qquad n = \mathrm{dn}\,(a,k')^2,$$

$$m' = \frac{k^2k^2\,\mathrm{sn}\,(a,k')\,\mathrm{cn}\,(a,k')}{\mathrm{dn}\,(a,k')^3}; \qquad n' = \frac{k^2}{\mathrm{dn}\,(a,k')^2};$$

hinc deducimus primo, esse

1. $\quad n\,.\,n' = k^2$, sive $n' = \frac{k^2}{n}$.

Porro est $\frac{m}{m'} = \frac{(\mathrm{dn}\,(a,k'))^4}{k^2} = \frac{n^2}{k^2}$, ideoque

2. $\quad m' = \frac{k^2}{n^2}m$, unde adhuc sequitur $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$.

Quare e datis numeris k, m et n illico computari possunt m' et n'. Relatio inter integralia ipsa est

$$P(u,a,k')+P(u,K'-a,k')$$

$$= -\frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,(a,k')\,\mathrm{cn}\,(a,k')}{\mathrm{dn}\,(a,k')}u + \mathrm{arctang}\left(\frac{k'^2\,\mathrm{sn}\,(a,k')\,\mathrm{cn}\,(a,k')}{\mathrm{dn}\,(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right), \text{ sive}$$

3. $\quad P(u,a,k')+P(u,K'-a,k') = -\frac{m}{n}u + \mathrm{arctang}\left(\frac{m}{n}\cdot\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,a}\right).$

Haec inter integralia $\int_0^u \frac{m\,\mathrm{sn}\,u^2\,.\,\partial u}{1-n\,\mathrm{sn}\,u^2}$ et $\int_0^u \frac{m'\,\mathrm{sn}\,u^2\,.\,\partial u}{1-n'\,\mathrm{sn}\,u^2}$ relatio persimplex

etiam methodo elementari erui potest, positis conditionibus $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ et $nn' = k^2$.

35.

Quia est $\overset{\text{I}}{P}(u,a) = \int_0^u \frac{k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{dn}(a,k') . \operatorname{sn} u^2 . \partial u}{\operatorname{cn}(a,k')^2 . [1 + k^2 \operatorname{tn}(a,k')^2 . \operatorname{sn} u^2]}$, ponamus nunc $\overset{\text{I}}{P}(u,a) = \int_0^u \frac{m . \operatorname{sn} u^2 . \partial u}{1 + n \operatorname{sn} u^2}$, tunc est

$$m = \frac{k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{dn}(a,k')}{\operatorname{cn}(a,k')^2}, \qquad n = k^2 \operatorname{tn}(a,k')^2.$$

Si pariter ponimus $\overset{\text{I}}{P}(u, K' - a) = \int_0^u \frac{m' . \operatorname{sn} u^2 . \partial u}{1 + n' \operatorname{sn} u^2}$, est

$$m' = \frac{k^2 \operatorname{tn}(K' - a, k') \operatorname{dn}(K' - a, k')}{\operatorname{cn}(K' - a, k')^2}$$

et $n' = k^2 . \operatorname{tn}(K' - a, k')^2 = \frac{k^2}{k^2 \operatorname{tn}(a,k')^2} = \frac{1}{\operatorname{tn}(a,k')^2}$, quare est $n . n' = k^2$; quia vero $\frac{m}{n} = \frac{\operatorname{dn}(a,k')}{\operatorname{sn}(a,k') \operatorname{cn}(a,k')} = \frac{1}{\operatorname{sn}(a,k') \operatorname{sn}(K' - a, k')}$, est $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$; at e relationibus $\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'}$ et $nn' = k^2$ sequitur, esse

$$1. \qquad \overset{\text{I}}{P}(u,a) + \overset{\text{I}}{P}(u, K' - a) = + \frac{m}{n} u - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{m}{n} . \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

qua in formula est $m = \frac{k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{dn}(a,k')}{\operatorname{cn}(a,k')^2}$, $n = k^2 \operatorname{tn}(a,k')$,

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} = \frac{1}{\operatorname{sn}(a,k') . \operatorname{sn}(K' - a, k')} \quad \text{et} \quad nn' = k^2.$$

Si in formula generali articuli 23. ponitur $b = K' - a$, formula abit in

$$\overset{\text{I}}{P}(u,a) + \overset{\text{I}}{P}(u, K' - a) = \overset{\text{I}}{P}(u, K') - k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{tn}(b,k') \operatorname{tn}(a+b,k') . u + \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{sn}(a,k') \operatorname{sn}(b,k') . \frac{\operatorname{dn} u}{\operatorname{tn} u}\right),$$

sive

$$\overset{\text{I}}{P}(u,a) + \overset{\text{I}}{P}(u, K' - a) = \overset{\text{I}}{P}(u, K') - k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{tn}(b,k') \operatorname{tn}(a+b,k') u + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{m}{n} . \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right);$$

quae aequatio comparata cum priori edocet, esse posito $a + b = K'$,

$$2. \qquad \overset{\text{I}}{P}(u, K') - k^2 \operatorname{tn}(a,k') \operatorname{tn}(b,k') \operatorname{tn}(a+b,k') u + \frac{\pi}{2} = \frac{m}{n} u,$$

quamvis tum $\overset{\text{I}}{P}(u, K')$, tum $\operatorname{tn}(a+b,k')$ sit $= \frac{\text{I}}{0}$.

36.

E formulis duabus

$$1. \quad P(u,a,k')+P(u,K'-a,k') = -\frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}.u+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

$$2. \quad \overset{\scriptscriptstyle I}{P}(u,a)+\overset{\scriptscriptstyle I}{P}(u,K'-a) = \frac{\mathrm{dn}(a,k')}{\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k)}.u-\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}(a,k')}{\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

adjumento formularum 1. et 2. articuli 31. deducimus adhuc duas

$$3. \quad Q(u,a,k')+Q(u,K'-a,k') = \frac{\mathrm{dn}(a,k)}{\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}.u+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

$$4. \quad \overset{\scriptscriptstyle I}{Q}(u,a)+\overset{\scriptscriptstyle I}{Q}(u,K'-a) = \frac{k'^2\,\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}{\mathrm{dn}(a,k')}.u+\mathrm{arc\,tang}\left(\frac{\mathrm{dn}(a,k')}{\mathrm{sn}(a,k')\,\mathrm{cn}(a,k')}\cdot\frac{\mathrm{tn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

quae eodem gaudent simplicitatis gradu. Formulae quatuor modo erutae gravissimi sunt momenti, si ipsarum usum frequentissimum in Geometria et Dynamica respicis, de quo mihi alia agendum est occasione. Relationes analogae inter integralia ea, quae hyperbolica gaudent natura, sunt

$$5. \quad \mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,K-a) = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u-\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

$$6. \quad \overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{P}}(u,a,k')+\overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{P}}(u,K-a,k') = -\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}u+\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

$$7. \quad \mathfrak{Q}(u,a)+\mathfrak{Q}(u,K-a) = \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}u+\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

$$8. \quad \overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{Q}}(u,a,k')+\overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{Q}}(u,K-a,k) = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u+\mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}\cdot\frac{\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}\right),$$

vel si mavis,

$$\mathfrak{P}(u,a)+\mathfrak{P}(u,K-a) = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u-\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}\right)},$$

$$\overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{P}}(u,a,k')+\overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{P}}(u,K-a,k') = -\frac{\mathrm{dn}\,a.u}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}u+\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}\right)},$$

$$\mathfrak{Q}(u,a)+\mathfrak{Q}(u,K-a) = \frac{\mathrm{dn}\,a}{\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}u+\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{dn}(a-u)}{\mathrm{dn}(a+u)}\right)},$$

$$\overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{Q}}(u,a,k')+\overset{\scriptscriptstyle I}{\mathfrak{Q}}(u,K-a,k') = \frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a}{\mathrm{dn}\,a}u+\log\sqrt{\left(\frac{\mathrm{tn}(a+u)}{\mathrm{tn}(a-u)}\right)}.$$

De sectionum conico-sphaericarum quadratura et rectificatione.

37.

Sectiones conico-sphaericae, quum sunt lineae algebraicae secundi gradus sphaericae, secundum methodum in libro meo: „*Grundrifs der analytischen Sphärik*," quem hic non raro signis: G. A. S. §... allegabimus *), fusius expositam tractandae sunt. Solutio problematis de ipsarum rectificatione et quadratura ad simplicem integralium ellipticorum tertiae speciei interpretationem geometricam perducit. Sit $ADBE$ in Figura addita 1. Tab. III. ellipsis sphaerica, AB et DE sint duae axes internae, C ipsius centrum, e quo describatur supra diametrum AB, qui est axis major, circulus minor $AKBL$, qui axe minore DE utrobique prolongata secetur in punctis K et L. Sit M punctum quoddam curvae AMD, a quo demittantur perpendiculariter in axes applicatae MQ et MP; prolongetur PM usque ad intersectionem N in peripheria circuli. Angulum ACN dicimus *anomaliam excentricam sive amplitudinem arcus* AM elliptici, et pariter angulum KCN dicimus amplitudinem arcus elliptici DM.

Sit semiaxis major $CA = CB = a$, semiaxis minor $CD = CE = b$ et excentricitas $CF = CF' = e$; sit insuper brevitatis causa

$$\text{tang}\, a = \alpha, \qquad \text{tang}\, b = \beta, \qquad \text{tang}\, e = \varepsilon,$$
$$\text{tang}\, CP = x \quad \text{et} \quad \text{tang}\, CQ = y;$$

puncti M situm quantitatibus x et y determinatum esse ita indicamus: $M = (x, y)$. Curvae aequatio est

$$1. \qquad \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{x^2}{\alpha^2} = 1. \quad \text{(G. A. S. §. 70.)}$$

Si amplitudine utimur $AN = \varphi$, aequatio haec decomponitur in duas

$$2. \qquad x = \alpha . \cos\varphi \quad \text{et} \quad y = \beta . \sin\varphi.$$

Sit N' intersectio linearum CN et MQ; quia triangulum CQN' est in Q' rectangulum, valet formula $\text{tang}\, CQ = \text{tang}\, CN' . \cos N'CQ$, sive $y = \text{tang}\, CN' . \sin\varphi$, quare est

$$3. \qquad CN' = b = CD, \text{ quemadmodum est } CN = a = CA;$$

circulus igitur radio $CD = b$, e centro C descriptus per punctum N' transit.

---

*) Idem liber multis a me exornatus additamentis, translatus in linguam Franco-Gallicam mox, ut spero, in lucem proveniet opera Mathematici spectatissimi mihi amici.

Quantitates tres constantes a, b, e conjunctae sunt relatione $\cos a = \cos e . \cos b$, quare est

$$4. \qquad 1+\alpha^2 = (1+\varepsilon^2)(1+\beta^2),$$

unde deducimus $\operatorname{tang} e^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{1+\beta^2}$, $\sin e^2 = \frac{\alpha^2-\beta^2}{1+\alpha^2}$, $\cos e^2 = \frac{1+\beta^2}{1+\alpha^2}$.

In axe minori ED non sunt foci; at excentricitatem adesse $= E$ supponamus; permutatis igitur a et b, sive α et β, obtinemus pariter

$$\operatorname{tang} E^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \qquad \sin E^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{1+\beta^2} \quad \text{et} \quad \cos E^2 = \frac{1+\alpha^2}{1+\beta^2},$$

quae formulae comparatae cum prioribus edocent, esse

$$\operatorname{tang} E^2 = -\sin e^2, \qquad \sin E^2 = -\operatorname{tang} e^2 \quad \text{et} \quad \cos E^2 = \frac{1}{\cos e^2}, \text{ sive}$$

$$\operatorname{tang} E = i . \sin e; \qquad \sin E = i . \operatorname{tang} e; \qquad \cos E = \frac{1}{\cos e};$$

permutatis igitur duabus axibus AB et DE abit $\operatorname{tang} e$ in $i . \sin e$, $\sin e$ in $i . \operatorname{tang} e$ *et* $\cos e$ in $\frac{1}{\cos e}$.

Permutatis duabus axibus AB et DE amplitudinem φ abire in $\frac{\pi}{2}-\varphi$, arcum AM in DM, aream AMP in DMQ, angulum $AMP = \lambda$ in $DMQ = \lambda_1$, x in y et vice versa, per se clarum est.

38.

Angulus λ, quem applicata PM facit cum circulo maximo, qui ellipsin tangit in puncto M, determinatur formula generali

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{-\partial x \sqrt{(1+x^2+y^2)}}{\partial y + x^2 \partial y - xy\,\partial x};$$

quae, si substituimus $x = \alpha . \cos\varphi$, $y = \beta . \sin\varphi$, $-\partial x = \alpha \sin\varphi . \partial\varphi$, $\partial y = \beta \cos\varphi . \partial\varphi$, abit in specialem

$$\operatorname{tang}\lambda = \frac{\alpha}{\beta(1+\alpha^2)} . \operatorname{tang}\varphi . \sqrt{(1+\alpha^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin\varphi^2)}.$$

Pari modo obtinemus formulam

$$\cos\lambda = \frac{\beta(1+\alpha^2)\cos\varphi}{\sqrt{(1+\alpha^2\cos\varphi^2)} . \sqrt{(\alpha^2\sin\varphi^2+\beta^2\cos\varphi^2+\alpha^2\beta^2)}}.$$

Differentiando eruimus formulam

$$\partial\lambda = \alpha\beta(1+\alpha^2).\partial\varphi . \frac{1+\alpha^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin\varphi^2-(\alpha^2-\beta^2)\sin\varphi^2\cos\varphi^2}{(1+\alpha^2\cos\varphi^2)(\alpha^2\sin\varphi^2+\beta^2\cos\varphi^2+\alpha^2\beta^2)\sqrt{(1+\alpha^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin^2)}}.$$

Formulas has reducamus introducendo excentricitatem e; est primo radicale

$$\sqrt{(1+\alpha^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin\varphi^2)} = \frac{\sqrt{(1-\sin e^2 . \sin\varphi^2)}}{\cos a},$$

$$\sqrt{(1+\alpha^2\cos\varphi^2)} = \frac{\sqrt{(1-\sin a^2.\sin\varphi^2)}}{\cos a},$$

$$\sqrt{(\alpha^2\sin\varphi^2+\beta^2\cos\varphi^2+\alpha^2\beta^2)} = \frac{\tang b}{\cos a}\sqrt{\left(1+\frac{\sin e^2}{\tang b^2}\sin\varphi^2\right)};$$

valoribus his substitutis prodeunt formulae

1. $\tang\lambda = \frac{\sin a}{\tang b}.\tang\varphi.\sqrt{(1-\sin e^2\sin\varphi^2)},$

2. $\cos\lambda = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{(1-\sin a^2\sin\varphi^2)}\sqrt{\left(1+\frac{\sin e^2}{\tang b^2}\sin\varphi^2\right)}},$

3. $\partial\lambda = \frac{\sin a}{\tang b}.\partial\varphi.\frac{1-2\sin e^2\sin\varphi^2+\sin e^2\sin\varphi^4}{(1-\sin a^2\sin\varphi^2)\left(1+\frac{\sin e^2}{\tang b^2}\sin\varphi^2\right)\sqrt{(1-\sin e^2\sin\varphi^2)}}.$

Si exentricitatem curvae reciprocae designamus per e', est $\tang e' = \frac{\sin e}{\tang b}$, (G. A. S. §. 84.), quare $\tang e'$ in formulis his pro $\frac{\sin e}{\tang b}$ substitui potest. Quia angulum per λ' designamus, quem applicata MQ facit cum linea, quae curvam tangit in M, secundum praecepta articuli praecedentis illico obtinemus formulas

4. $\tang\lambda_1 = \frac{\sin b}{\tang a}\cot\varphi.\sqrt{(1+\tang e^2\cos\varphi^2)},$

5. $\cos\lambda_1 = \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-\sin b^2\cos\varphi^2)}\sqrt{\left(1-\frac{\tang e^2}{\tang a^2}\cos\varphi^2\right)}},$

6. $\partial\lambda_1 = \frac{\sin b}{\tang a}.\partial\varphi.\frac{1+2\tang e^2\cos\varphi^2-\tang e^2\cos\varphi^4}{(1-\sin b^2\cos\varphi^2\left(1-\frac{\tang e^2}{\tang a^2}\cos\varphi^2\right)\sqrt{(1+\tang e^2\cos\varphi^2)}}.$

Loco $\frac{\tang e}{\tang a}$ etiam $\sin e'$ poni potest; *quare permutatis duabus semiaxibus CD et CA abit et* $\tang e'$ *in* $i\sin e'$, $\sin e'$ *in* $i\tang e'$ *et* $\cos e'$ *in* $\frac{1}{\cos e'}$.

39.

Formula pro differentiali arcus generalis est

$$\partial s = \frac{\sqrt{[\partial x^2+(y\partial x-x\partial y)^2+\partial y^2]}}{1+x^2+y^2}$$ (G. A. S. §. 23.),

si arcum $AM = s$ ponimus, formula abit in specialem

$$\partial s = \frac{\partial\varphi\sqrt{(\alpha^2\beta^2+\alpha^2\sin\varphi^2+\beta^2\cos\varphi^2)}}{1+\alpha^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin\varphi^2},$$

quae adjumento excentricitatis e et e' reducitur ad simpliorem hanc

$$\partial s = \cos e.\sin b.\partial\varphi.\frac{\sqrt{(1+\tang e'^2.\sin\varphi^2)}}{1-\sin e^2.\sin\varphi^2}.$$

Si vero arcum $DM = s$ et ipsius amplitudinem $DCN = \psi$ ponimus, permutando duos vertices A et D permutantur a et b, $\sin e$ et $i\,\mathrm{tang}\,e$, $\mathrm{tang}\,e'$ et $i\sin e'$, $\cos e$ et $\frac{1}{\cos e}$, quare formula illico abit in hanc

$$\partial s = \frac{\sin a}{\cos e}.\partial\psi.\frac{\sqrt{(1-\sin e'^2.\sin\psi^2)}}{1+\mathrm{tang}\,e^2\sin\psi^2}$$

cujus integrale revocari potest ad ellipticum tertiae speciei, et quidem ad integrale $\overset{1}{Q}(u,p)$, cui cyclica et natura. Ponamus hunc in finem

$$1. \qquad k = \sin e' = \frac{\mathrm{tang}\,e}{\mathrm{tang}\,a}, \text{ ergo}$$

$$2. \qquad k' = \cos e' = \frac{\sin a}{\sin b}, \text{ et}$$

$$3. \qquad \psi = \mathrm{am}(u,k),$$

tunc enim est $\partial\psi = \mathrm{dn}\,u\,.\,\partial u$, $\sqrt{(1-\sin e'^2\sin\psi^2)} = \mathrm{dn}\,u$ et $\sin\psi = \mathrm{sn}\,u$, quare

$$\partial s = \frac{\sin a}{\cos e}.\frac{\mathrm{dn}\,u^2.\partial u}{1+\mathrm{tang}\,e^2.\mathrm{sn}\,u^2}.$$

Superest, ut argumentum p parametri in integrali

$$\overset{1}{Q}(u,p) = \int_0^u \frac{\mathrm{tn}(p,k').\mathrm{dn}(p,k').\mathrm{dn}\,u^2.\partial u}{1+k^2\,\mathrm{tn}(p,k')^2.\mathrm{sn}\,u^2}$$

determinemus. Ponendum est $k^2\,\mathrm{tn}(p,k')^2 = \mathrm{tang}\,e^2$, sive $\mathrm{tn}(p,k') = \frac{\mathrm{tang}\,e}{k}$, sive $\mathrm{tn}(p,k') = \mathrm{tang}\,a$, et quia $\mathrm{tn}(p,k') = \mathrm{tang}\,\mathrm{am}(p,k')$ est, habemus formulam simplicem

$$4. \qquad \mathrm{am}(p,k') = a,$$

cujus ope argumentum incognitum p e datis a et k' computandum est. Quia est $\mathrm{dn}(p,k') = \sqrt{(1-k'^2.\sin a^2)} = \sqrt{(1-\sin b^2)}$, est

$$\mathrm{dn}(p,k') = \cos b,$$

quare habemus $\mathrm{tn}(p,k').\mathrm{dn}(p,k') = \mathrm{tang}\,a\,.\cos b = \frac{\sin a}{\cos e}$, ideoque pervenimus ad formulam simplicem

$$5. \qquad DM = s = \overset{1}{Q}(u,p),$$

dummodo tria elementa k, p, u ope formularum simplicium modo erutarum computantur. *Integrale* $\overset{1}{Q}(u,p)$ *igitur arcum ellipticum sphaericum repraesentat, quae est ipsius significatio geometrica.* Inventis formulis aliam addimus persimplicem. Est $\mathrm{sn}(K'-p,k') = \frac{\mathrm{cn}(p,k')}{\mathrm{dn}(p,k')} = \frac{\cos a}{\cos b} = \cos e$, quare es

$$6. \qquad \mathrm{am}(K'-p,k') = \frac{\pi}{2} -$$

Si in foco F erigimus perpendiculum FG, quo circulus AKB secatur in G, oritur triangulum rectangulum CFG, quare est $\text{tang}\, FC = \text{tang}\, CG . \cos GCF$, sive $\cos GCF = \frac{\text{tang}\, e}{\text{tang}\, a}$, ideoque

$$7. \qquad k = \cos GCF \qquad \text{et} \qquad k' = \sin GCF.$$

40.

Jam exemplum in numeris finitis proferimus. Sit angulus $GCF = 70^0$, semiaxis major $CA = a = 30^0$ et amplitudo $KCN = KN = 40^0$, computandus est arcus ellipticus $DM = s = \overset{\text{I}}{Q}(u,p)$ e datis quantitatibus tribus

$$k = \sin 20^0, \qquad \text{am}\,(p,k') = 30^0, \qquad \text{am}\,(u,k) = 40^0.$$

Utimur formula $\overset{\text{I}}{Q}(u,p) = u.\overset{\text{I}}{R}(p) + \overset{\text{I}}{N}(u,a)$, sive

$$\overset{\text{I}}{Q}(u,p) = u.E(p,k') + up.\frac{E}{K} - up + \overset{\text{I}}{N}(u,a).$$

Quia vero est $\frac{k}{k'} < 1$ (sive angulus θ articuli 24. est $< 45^0$), adhibenda est series

$$\overset{\text{I}}{N}(u,a) = \text{arc tang}\,(A) + \text{arc tang}\,(B) + \text{arc tang}\,(C) + \text{etc.,}\ \text{positis}$$

$$A = \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta p . \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta p . \cos \eta u},$$

$$B = \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta p . \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta p . \cos \eta u},$$

$$C = \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta p . \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta p \cos \eta u},$$

$$D = \frac{\mathfrak{Sin}\,\eta p . \sin \eta u}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K' - \mathfrak{Cos}\,\eta p . \cos \eta u},$$

$$+ \text{etc.}$$

Ponamus brevitatis causa

$$m = \mathfrak{Sin}\,\eta p . \sin \eta u,$$
$$n = \mathfrak{Cos}\,\eta p . \cos \eta u,$$

tunc enim est

$$A = \frac{m}{\mathfrak{Cos}\,\eta K' - n}, \quad B = \frac{m}{\mathfrak{Cos}\,3\eta K' - n}, \quad C = \frac{m}{\mathfrak{Cos}\,5\eta K' - n}, \quad D = \frac{m}{\mathfrak{Cos}\,7\eta K' - n} \text{ etc.}$$

Pauca praemittamus de usu harum formularum. Termini seriei A, B, C, D etc. tam rapide convergunt, ut quantitates $\text{arc tang}\,(B)$, $\text{arc tang}\,(C)$, $\text{arc tang}\,(D)$ ob ipsarum exiguitatem non satis commode adjumento tabularum logarithmo-trigonometricarum computari queant; in exemplo proposito jam ipse terminus primus $\text{arc tang}\,(A)$ hoc exiguitatis gradu gaudet;

quare serie utimur notissima $\text{arc tang}(A) = A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} - \text{etc.}$, qua adhibita est

$$\overset{\text{I}}{N}(u,a) = (A+B+C+\text{etc.}) - \tfrac{1}{3}(A^3+B^3+C^3+\text{etc.}) + \tfrac{1}{5}(A^5+C^5+D^5+\text{etc.}) - \text{etc.}$$

At in plerisque casibus, $\left(\text{quia si est } \frac{k}{k'} < 1\right)$ jam series

$$\overset{\text{I}}{N}(u,a) = \left(A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5}\right) + \left(B - \frac{B^3}{3}\right) + C$$

majorem, quam desideratur, exactitudinis gradum suppeditat. Si $\text{arc tang}(A)$ adjumento tabularum trigonometricarum computatur, habemus formulam

$$\overset{\text{I}}{N}(u,a) = \text{arc tang}(A) + \left(B - \frac{B^3}{3} + \frac{B^5}{5}\right) + \left(C - \frac{C^3}{3}\right) + D.$$

41.

His praemissis praeparatio ad calculum haec est. E tabulis a Cl^mo *Legendre* sumatur

$$p = 0{,}545931919, \qquad \log K' = 0{,}3987297199$$
$$u = 0{,}7016219761, \qquad \log K = 0{,}2095219556$$

$$\log \pi = 0{,}4971498726$$
$$\log K = 0{,}2095219576$$
$$\log \eta = 0{,}2876279150$$
$$\log K' = 0{,}3987297199$$
$$\log(\eta K') = 0{,}6863576349$$
$$\text{ergo } \eta K' = 4{,}85688292$$
$$3\eta K' = 14{,}57064878$$
$$5\eta K' = 24{,}28441463$$

$$\log \eta = 0{,}2876279150$$
$$\log u = 0{,}8461031833 - 1$$
$$\log(\eta u) = 0{,}1337310983$$
$$\eta u = 1{,}360601971, \text{ seu}$$
$$\eta u = 77^\circ 57' 24'', 3022,$$

quare

$$\log \sin(\eta u) = 9{,}9903345832$$
$$\log \cos(\eta u) = 9{,}3194183457$$

$$\log \eta = 0{,}2876279150$$
$$\log p = 0{,}7391384870 - 1$$
$$\log \eta p = 0{,}0267664020$$
$$\eta p = 1{,}063570798$$

$$\log \mathfrak{Sin}(\eta p) = 0{,}1057615801$$
$$\log \mathfrak{Cos}(\eta p) = 0{,}2097720701$$

Calculus nunc ipse persimplex est.

$\log \mathfrak{Sin}(\eta p) = 0{,}1057615801$ $\qquad$ $\log \mathfrak{Cos}(\eta p) = 0{,}2097720701$

$\log \sin(\eta u) = 9{,}9903345832$ $\qquad$ $\log \cos(\eta u) = 9{,}3194183457$

$\log m = 0{,}0960961633$ $\qquad$ $\log n = 9{,}5291904158 - 10$

quare $n = 0{,}3382130932$

$\log \mathfrak{Cos}(\eta K') = 1{,}808313707$

ergo $\mathfrak{Cos}(\eta K') = 64{,}3152122$

$n = 0{,}3382131$

differentia $= 63{,}9769991$

ipsius logarithmus $= 1{,}8060238653$

$\log m = 0{,}0960961633$

$\log A = 0{,}2900722980 - 2$;

hinc deducimus $A = 0{,}0195016922$

$\frac{A^3}{3} = 0{,}0000024722$

$0{,}0194992200$

$\frac{A^5}{5} = 0{,}0000000006$

$A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} = 0{,}0194992206.$

Terminus sequens multo facilius computatur. Sit μ modulus logarithmorum vulgarium, sive $\mu = 0{,}43429448190\ldots.$; quia $3\eta K' > 12$, est $\log \mathfrak{Cos}(3\eta K') = \mu.3\eta K' - \log 2$; est vero

$3\mu\eta K' = 6{,}3279523629$

$\log 2 = 0{,}3010299957$

$\log \mathfrak{Cos}(3\eta K') = 6{,}026922367$; differentia logarithmica e tabulis $= 408191$

$n = 0{,}338213$

subtrahatur $138055 =$ producto $n.408191$

$\log[\mathfrak{Cos}(3\eta K') - n] = 6{,}026784312$

$\log m = 0{,}096096163$

$\log B = 0{,}069311851 - 6$ [quare $\frac{B^3}{3}$ et C jam negligenda sunt]

ergo $B = 0{,}0000011730$

$A - \frac{A^3}{3} + \frac{A^5}{5} = 0{,}0194992206$

addendo

$\dot{N}(u,p) = 0{,}0195003936.$

Hinc optime perspexeris, quanta sit nostrarum serierum pro $\overset{1}{N}(u,p)$ convergentia. Procedimus ad computum producti $u.\overset{1}{R}(p)$. Quia est $k' = \sin 70^0$ et $\operatorname{am}(p,k') = 30^0$, e tabulis ab III^mo *Legendre* editis sumamus

$$E(p,k') = 0{,}502868042 \qquad \log E = 0{,}1829277427$$
$$p = 0{,}545931919 \qquad \log K = 0{,}2095219576$$
$$p - E(p,k') = 0{,}043063877 \qquad \log \frac{E}{K} = 0{,}9734057851 - 1$$
$$p.\frac{E}{K} = 0{,}515874751 \qquad \log p = 0{,}7391384870$$
$$\boldsymbol{E}(p,k') - p + p.\frac{K}{E} = 0{,}472810874 \qquad \log\left(p.\frac{E}{K}\right) = 0{,}7125442721 - 1$$

$$\text{ipsius logarithmus} = 0{,}6746874561 - 1 = \log \overset{1}{R}(p)$$
$$\log u = 0{,}8461031833 - 1$$
$$\log[u\overset{1}{R}(p)] = 0{,}5207906394 - 1, \text{ quare}$$
$$u.\overset{1}{R}(p) = 0{,}331734999$$
$$\overset{1}{N}(u,p) = 0{,}019500394, \text{ quare}$$

arcus ellipticus $DM = \overset{1}{Q}(u,p) = 0{,}351235393$,

cujus numeri unitas est radius sphaerae. Nunc etiam facillime invenimus longitudinem arcus AM; est enim quadrans $AD = K.\overset{1}{R}(p)$, quia $\overset{1}{N}(K,p) = 0$ est; est vero

$$\log \overset{1}{R}(p) = 0{,}6746874561 - 1$$
$$\log K = 0{,}2095219576$$
$$\log \overset{1}{Q}(K,p) = 0{,}8842094137 - 1, \text{ ergo}$$

quadrans ellipt. $AD = \overset{1}{Q}(K,p) = 0{,}765965861$,

arcus ellipt. $DM = \overset{1}{Q}(u,p) = 0{,}351235393$,

arcus ellipt. $AM = 0{,}414730468$.

Quantitates $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$ etc. etiam recurrendo computari possunt; est enim $\mathfrak{Cos}(x+4y) = (2\,\mathfrak{Cos}\,2y)\,\mathfrak{Cos}(x+2y) - \mathfrak{Cos}\,x$; quare ponendo $x = \eta K'$ et $y = \eta K'$, est $\mathfrak{Cos}(5\eta K') = (2\,\mathfrak{Cos}\,2\eta K')\,\mathfrak{Cos}(3\eta K') - \mathfrak{Cos}\,\eta K'$; est vero $\frac{1}{A} = \frac{\cos \eta K'}{m} - \frac{n}{m}$, sive $\frac{1}{A} + \frac{n}{m} = \frac{\cos \eta K'}{m}$ et ideo $\cos \eta K' = \frac{m}{A} + n$, et pariter $\cos 3\eta K' = \frac{m}{B} + n$, $\cos 5\eta K' = \frac{m}{C} + n$; substitutis his valoribus provenit

$$\frac{m}{C}+n=(2\mathfrak{Cos}2\eta K').\left(\frac{m}{B}+n\right)-\frac{m}{A}-n, \text{ sive}$$
$$\frac{1}{C}=\frac{2\mathfrak{Cos}2\eta K'}{B}-\frac{1}{A}+\frac{n}{m}.(2\mathfrak{Sin}\eta K')^2,$$

qua formula utendum est, si seriem pro $\overset{\text{I}}{N}(u,a)$ etiam tunc adhibere volumus si, est $\frac{k}{k'}>1$, quod vero secundum articulum 24. evitari potest.

42.

Ducatur per punctum curvae M linea tangens UMV, quae duas axes prolongatas secet in punctis U et V et eruamus formulas, quibus tangentes UM et VM exprimuntur. Est primo $\operatorname{tang} PM=\operatorname{tang} CQ.\cos PC$, sive $\operatorname{tang} PM=\frac{\gamma}{\sqrt{(1+x^2)}}=\frac{\operatorname{tang} b.\sin\varphi}{\sqrt{(1+a^2\cos\varphi^2)}}=\frac{\operatorname{tang} b\cos a\sin\varphi}{\sqrt{(1-\sin a^2\sin\varphi^2)}}$ et quia $\operatorname{tang} UM=\frac{\operatorname{tang} PM}{\cos\lambda}$ est, pervenimus ad formulam

$$1.\quad \begin{cases}\operatorname{tang} UM=\operatorname{tang} b\cos a\sqrt{(1+\operatorname{tang} e'^2\sin\varphi^2)}.\operatorname{tang}\varphi,\\ \operatorname{tang} UM=\sin b\cos e\sqrt{(1+\operatorname{tang} e'^2\sin\varphi^2)}.\operatorname{tang}\varphi.\end{cases}$$

Permutatis duabus axibus formulae abeunt in

$$2.\quad \begin{cases}\operatorname{tang} VM=\operatorname{tang} a\cos b\sqrt{(1-\sin e'^2\sin\psi^2)}.\operatorname{tang}\psi,\\ \operatorname{tang} VM=\frac{\sin a}{\cos e}\sqrt{(1-\sin e'^2\sin\psi^2)}.\operatorname{tang}\psi.\end{cases}$$

In articulo 39. jam vidimus, esse $\frac{\sin a}{\cos e}=\operatorname{tn}(p,k').\operatorname{dn}(p,k')$, $\operatorname{tang}\psi=\operatorname{tn} u$ et $\sqrt{(1-\sin e'^2\sin\psi^2)}=\operatorname{dn} u$, quare est

$$3.\quad VM=\operatorname{arc}\operatorname{tang}[\operatorname{tn}(p,k').\operatorname{dn}(p,k').\operatorname{tn} u\operatorname{dn} u],$$

et quia arcus ellipticus $DM=\overset{\text{I}}{Q}(u,p)$, secundum articulum 31. est

$$4.\quad VM-DM=P(u,p,k');$$

quare integrale $P(u,p,k')$, *cujus natura est cyclica, differentiae inter arcum ellipticum et tangentem correspondentem aequalis est, quae est ipsius significatio geometrica;* alteram significationem geometricam et quidem simpliciorem mox inveniemus.

43.

Alias vero antea eruamus formulas. Est secundum theorema notissimum $\operatorname{tang} CA^2=\operatorname{tang} CU.\operatorname{tang} CP$, quare est

$$1.\quad \operatorname{tang} CU=\frac{\operatorname{tang} a}{\cos\varphi}\quad\text{et}\quad\operatorname{tang} CV=\frac{\operatorname{tang} b}{\cos\psi}.$$

Hinc primo deducimus

2. $\operatorname{tang} PU = \sin a \cos a . \frac{\sin \varphi^2}{\cos \varphi}$ et $\operatorname{tang} QV = \sin b \cos b . \frac{\sin \psi^2}{\cos \psi}$.

Quia est $\cos U = \frac{\operatorname{tang} PU}{\operatorname{tang} MU}$, est

3. $\cos U = \frac{\sin a}{\operatorname{tang} b} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang} e'^2 \sin \varphi^2)}}$ et $\cos V = \frac{\sin b}{\operatorname{tang} a} \cdot \frac{\sin \psi}{\sqrt{(1-\sin e'^2 \sin \psi^2)}}$.

Si e centro C lineam CR perpendiculariter in tangentem UV demittimus, est $\operatorname{tang} UR = \operatorname{tang} UC . \cos U$, sive

4. $\operatorname{tang} UR = \frac{\operatorname{tang} a . \sin a}{\operatorname{tang} b} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang} e'^2 . \sin \varphi^2)}}$ et

5. $\operatorname{tang} VR = \frac{\operatorname{tang} b . \sin b}{\operatorname{tang} a} \cdot \frac{\operatorname{tang} \psi}{\sqrt{(1+\sin e'^2 . \sin \psi^2)}}$.

Quia vero $\frac{k'^2 . \operatorname{sn}(p,k') . \operatorname{cn}(p,k')}{\operatorname{dn}(p,k')} = \frac{\sin b^2}{\sin a^2} \cdot \frac{\sin a . \cos a}{\cos b} = \frac{\operatorname{tang} b . \sin b}{\operatorname{tang} a}$ est, formula haec etiam hoc modo functionibus ellipticis exprimi potest

6. $VR = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k'^2 \operatorname{sn}(p,k') \operatorname{cn}(p,k')}{\operatorname{dn}(p,k')} \cdot \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right)$.

Quia vero $VM = \operatorname{arc\,tang}[\operatorname{tn}(p,k') \operatorname{dn}(p,k') \operatorname{tn} u \operatorname{dn} u]$, invenimus formulam

7. $MR = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{k^2 \operatorname{tn}(p,k')}{\operatorname{dn}(p,k')} \cdot \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right)$,

sive in functionibus trigonometricis expressam hanc

8. $\operatorname{tang} MR = \frac{\sin e'^2 . \operatorname{tang} a}{\cos b} \cdot \frac{\sin \psi . \cos \psi}{\sqrt{(1-\sin e'^2 . \sin \psi^2)}}$.

44.

Ellipsis $ADBE$ praeter centrum interius C duo alia habet centra C' et C'' in axibus AB et DE prolongatis sita, quae tum a centro C, tum ab invicem quadrante distant. Demittantur lineae $C'S$ et $C''T$ perpendiculariter in tangentem UV, et eruamus formulas, quibus linearum US, MS, VT et MT longitudines exprimuntur. Est primo $UC+UC' = 90^\circ$, quare $\operatorname{tang} UC' = \cot UC$, sive $\operatorname{tang} UC' = \frac{\cos \varphi}{\operatorname{tang} a}$ et quia $\cos SUC' = \frac{\sin a}{\operatorname{tang} b} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang} e'^2 \sin \varphi^2)}}$ est, nanciscimur formulam

1. $\operatorname{tang} US = \frac{\cos a}{\operatorname{tang} b} \cdot \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang} e'^2 \sin \varphi^2)}}$, quare

2. $\operatorname{tang} VT = \frac{\cos b}{\operatorname{tang} a} \cdot \frac{\sin \psi \cos \psi}{\sqrt{(1-\sin e'^2 \sin \psi^2)}}$.

Hinc adjumento formularum pro UM et VU prius inventarum deducimus

3. $\operatorname{tang} MS = \frac{\cos a}{\sin b \cos b} \cdot \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{(1+\operatorname{tang} e'^2 \sin \varphi^2)}}$ et

$$4. \qquad \operatorname{tang} MT = \frac{\cos b}{\sin a \cos a} \cdot \frac{\operatorname{tang} \psi}{\sqrt{(1 - \sin e'^2 \sin \psi^2)}}.$$

Formulae 2. et 4. adjumento functionum ellipticarum exprimuntur hoc modo:

$$5. \qquad VT = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{tn}(p,k')} \cdot \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

$$6. \qquad MT = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{sn}(p,k') \operatorname{cn}(p,k')} \cdot \frac{\operatorname{tn} u}{\operatorname{dn} u}\right).$$

E formulis pro VR et VT erutis adhuc deducimus

$$7. \qquad \operatorname{tang} RT = \frac{\operatorname{tang} \psi \sqrt{(1 - \sin e'^2 \sin \psi^2)}}{\cos b \operatorname{tang} a},$$

quare permutatis duobus verticibus est

$$8. \qquad \operatorname{tang} RS = \frac{\operatorname{tang} \varphi \sqrt{(1 + \operatorname{tang} e'^2 \sin \varphi^2)}}{\cos a \operatorname{tang} b}.$$

Formula 7. functionibus ellipticis exhibita est

$$9. \qquad RT = \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{tn} u \operatorname{dn} u}{\operatorname{tn}(p,k') \operatorname{dn}(p,k')}\right).$$

Facillimo negotio adhuc complures ejusmodi formulas derivare possemus; adsunt enim sex puncta memorabilia S, U, M, R, V, T in linea tangenti UV, quae quindecim distantiis inter bina sunt conjuncta. Harum quindecim distantiarum unaquaeque amplitudine $\psi = 90° - \varphi$ exprimi potest, quo facto habemus quindecim formulas, quibus arcus cyclici determinantur, qui functionibus ellipticis exprimi possunt. E relationibus inter integralia elliptica tertiae speciei, quae in articulis praecedentibus erutae sunt combinationibus inter se sive alio modo complures aliae derivari possunt, at quaecunque ejusmodi relationes derivantur, sive hac sive illo arcu cyclico e numero quindecim modo dictorum integrale unum reducetur ad alterum.

Exemplo illustremus modo dictum. Demonstrata est in articulo 36. formula 6., sive

$$\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,p,k') + \overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,K-p,k') = -\frac{\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p \operatorname{cn} p} u + \mathfrak{Arc\,Tang}\left(\frac{\operatorname{dn} p}{\operatorname{sn} p \operatorname{cn} p} \cdot \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right),$$

Si in formula hac ponimus pi loco p et factorem i dejicimus, obtinemus

$$P(u,p,k') + \frac{\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,K-pi,k')}{i} = \frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{tn}(p,k')} - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{tn}(p,k')} \cdot \frac{\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u}{\operatorname{dn} u}\right).$$

Quia vero est $\overset{\text{I}}{\mathfrak{P}}(u,p,k') = \int_0^u \frac{k'^2 \operatorname{tn} p \operatorname{dn} p \operatorname{sn} u^2 . \partial u}{\operatorname{cn} p^2 . \left(1 - \frac{\operatorname{dn} p^2}{\operatorname{cn} p^2} \operatorname{sn} u^2\right)}$, in formula

hac substituendum est $K - pi$ loco p, quo obtinemus

$$\frac{k'^2 \operatorname{tn}(K-pi)\operatorname{dn}(K-pi)}{i.\operatorname{cn}(K-pi)^2} = \frac{k'^2}{i}\cdot\frac{\operatorname{dn}(K'-p,k')}{ik'\operatorname{cn}(K'-p,k')}\cdot\frac{k'\operatorname{sn}(K'-p,k').k^2}{i^2.k'^2\operatorname{cn}(K'-p,k')^2}$$
$$= \frac{k^2.\operatorname{tn}(K'-p,k').\operatorname{dn}(K'-p,k')}{\operatorname{cn}(K'-p,k')^2};$$

quare est

$$\frac{\overset{1}{\mathfrak{P}}(u,K-pi,k')}{i} = \int_0^u \frac{k^2\operatorname{tn}(K'-p,k')\operatorname{dn}(K'-p,k').\operatorname{sn}u^2.\partial u}{\operatorname{cn}(K'-p,k')^2.[1+k^2\operatorname{tn}(K'-p,k')^2.\operatorname{sn}u^2]},\ \text{sive}$$
$$\frac{\overset{1}{\mathfrak{P}}(u,K-pi,k')}{i} = \overset{1}{P}(u,K'-p);$$

substituto valore hoc formula abit in

$$P(u,p,k')+\overset{1}{P}(u,K'-p) = \frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{tn}(p,k')}.u - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{tn}(p,k')}.\frac{\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}\right),$$

sive $P(u,p,k')+\overset{1}{P}(u,K'-p) = \frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{tn}(p,k')}.u - VT.$

Eandem vero formulam facilius eruimus, si in formula 2. articuli 23. ponimus $K'-p$ loco a; tunc enim illico abit $\frac{k^2\operatorname{tn}(a,k')}{\operatorname{dn}(a,k')}$ in $k^2.\frac{1}{k\operatorname{tn}(p,k')}.\frac{\operatorname{dn}(p,k')}{k}$ $=\frac{\operatorname{dn}(p,k')}{\operatorname{tn}(p,k')}$. Integralia $\overset{1}{P}(u,K'-p)$ et $P(u,p,k')$ igitur ope arcus cyclici VT nunc ad se invicem reducuntur

45.

Praemissis formulis praecipuis ad inveniendam curvae quadraturam procedimus. Sit area $APM = f$, tunc est $\partial f = \frac{-y\partial x}{1+x^2\sqrt{(1+x^2+y^2)}}$ (G. A. S. S. §. 36.), quae formula generalis substituendo $x = \alpha\cos\varphi$, $\partial x = -\alpha\sin\varphi.\partial\varphi$, $y = \beta.\sin\varphi$ et $\partial y = \beta.\cos\varphi.\partial\varphi$, abit in specialem

$$(1.)\quad \partial f = \frac{\alpha\beta.\sin\varphi^2.\partial\varphi}{1+\alpha^2\cos\varphi^2).\sqrt{(1+\alpha^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin\varphi^2)}}.$$

Adjumento formulae hujus formula pro $\partial\lambda$ in articulo 38. inventa simplificari potest, nam reducendo obtinemus

$$(2.)\quad \partial\lambda - \partial f = \alpha\beta\partial\varphi.\frac{\sqrt{(1+a^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin\varphi^2)}}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\sin\varphi^2+\beta^2\cos\varphi^2}.$$

Formulam (1.) nunc reducamus introducto excentricitatem e, quo obtinemus

$$f = \int_0^\varphi \frac{\sin a\cos a^2\operatorname{tang} b\sin\varphi^2\partial\varphi}{(1-\sin a^2\sin\varphi^2)\sqrt{(1-\sin e^2\sin\varphi^2)}}.$$

Ponamus nunc

1. $k_0 = \cos e$ et $k'_0 = \sin e$,
2. $\varphi = \operatorname{am}(v,k'_0) = \frac{\pi}{2}-\psi = \frac{\pi}{2}-\operatorname{am}(u,k)$,

tunc enim est $f=\int_0^v \frac{\sin a \cos a^2 \operatorname{tang} b \operatorname{sn}(v,k_0')^2 . \partial v}{1-\sin a^2 . \operatorname{sn}(v,k_0')^2}$; quia vero est $\sin a > \sin e$ at <1, est $-\sin a^2$ inter limites $-k_0'^2$ et -1, quare integrale hoc ellipticum tertiae speciei est iterum cyclicae naturae (artic. 33.) et ad classem $P(v, q, k_0)$, sive simplicius $P(v, q)$ revocandum est; quem in finem ponimus $\sin a^2 = \operatorname{dn}(q,k_0)^2$, sive simplicius

$$3. \qquad \operatorname{dn} q = \sin a,$$

modulum enim k_0 in significatione functionum ellipticarum argumenti q novi parametri omittere licet. E formula $\sin a^2 = \operatorname{dn} q^2$ deducimus vero ob $k_0 = \cos e = \frac{\cos a}{\cos b} \operatorname{sn} q = \cos b$ sive

$$4. \qquad \operatorname{am}(q,k_0) = \frac{\pi}{2} - b,$$

qua formula argumentum q definitur. Ponamus nunc

$$5. \qquad \operatorname{am}(K_0,k_0) = \operatorname{am}(K_0',k_0) = \frac{\pi}{2},$$

quibus formulis k_0 et K_0' definiuntur. Si signis modo electis utimur, est $\operatorname{sn}(K_0-q) = \frac{\operatorname{cn} q}{\operatorname{dn} q} = \frac{\sin b}{\sin a} = \cos e' = k'$, quare est

$$6. \qquad \operatorname{am}(K_0-q,k_0) = \frac{\pi}{2} - e',$$

qua formula argumentum q alio definitur modo; haec formula insuper formulae 6. articuli 39. simillima est. Quia est

$$P(v,q) = \int_0^v \frac{k_0^2 . \operatorname{sn} q \operatorname{cn} q \operatorname{dn} q \operatorname{sn}(v,k_0')^2 . \partial v}{1-\operatorname{dn} q^2 . \operatorname{sn}(v,k_0')^2},$$

e formulis antecedentibus facillime componimus substituendo

$$k_0^2 . \operatorname{sn} q \operatorname{cn} q \operatorname{dn} q = \cos e^2 . \cos b . \sin b . \sin a$$
$$= \frac{\cos a^2}{\cos b^2} . \cos b . \sin b . \sin a = \sin a . \cos a^2 . \operatorname{tang} b,$$

quare est $f=\int_0^v \frac{k_0^2 . \operatorname{sn} q . \operatorname{cn} q . \operatorname{dn} q . \operatorname{sn}(v,k_0')^2 . \partial v}{1-\operatorname{dn} q^2 . \operatorname{sn}(v,k_0')^2}$, seu

$$7. \qquad f = P(v,q);$$

quare significatio geometrica integralis elliptici tertiae speciei $P(v,q)$ *est ea areae ellipticae sphaericae.*

Ope formulae modo erutae areae APM, ACD et $PMDC$ eadem facilitate computari possunt, qua arcus correspondentes AM, DM et quadrans AMD in articulo 41. computati sunt; quare exemplum in numeris finitis superfluum esse videtur. Formulae ad calculum applicandae sunt

$$\text{Area } APM = -v.M(q)+N(v,q),$$

$$\text{Area } ACD = -K_0'.M(q)+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi q}{2K_0},$$

$$\text{Area } MDCP = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi q}{2K_0}-(K_0'-v).M(q)-N(v,q).$$

46.

Nunc etiam formulam eruamus, qua exprimuntur area sectoris elliptici AFM, quam per σ designemus. Sit angulus $AFM=\nu$ et angulus $FMU=\mu$; quia angulus $PMU=\lambda$, est angulus $PMF=\mu-\lambda$, et ideo area

$$\text{trianguli } PFM = \mu-\lambda+\nu-\frac{\pi}{2}, \text{ quare}$$

$$\sigma = f+\mu-\lambda+\nu-\frac{\pi}{2};$$

Est vero $\operatorname{tang}\mu = \frac{\cos e^2-\cos a^2}{\sin e\cos e\sin PM}$ (G. A. S. §. 73.), sive

$$\operatorname{tang}\mu = \frac{\sin b^2}{\operatorname{tang} e.\sin PM},$$

quare $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)=\frac{\operatorname{tang} e.\sin PM}{\sin b^2}$, est vero $\sin PM=\frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}=\frac{\operatorname{tang} b.\sin\varphi.\cos a}{\sqrt{(1-\sin e^2.\sin\varphi^2)}}$, quare habemus

$$1. \quad \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2}-\mu\right)=\frac{\sin e}{\sin b}.\frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-\sin e^2\sin\varphi^2)}}.$$

Invenimus porro $\partial\lambda-\partial f=\alpha\beta\partial\varphi.\frac{\sqrt{(1+\alpha^2\cos\varphi^2+\beta^2\sin\varphi^2)}}{\alpha^2\beta^2+\alpha^2\sin\varphi^2+\beta^2\cos\varphi^2}$, sive

$$\partial\lambda-\partial f = \frac{\sin a}{\operatorname{tang} b}.\frac{\partial\varphi\sqrt{(1-\sin e^2\sin\varphi^2)}}{1+\operatorname{tang} e'^2.\sin\varphi^2}, \text{ seu}$$

$$\partial\lambda-\partial f = \frac{\cos b}{\cos e'}.\frac{\partial\varphi\sqrt{(1-\sin e^2\sin\varphi^2)}}{1+\operatorname{tang} e'^2\sin\varphi^2}.$$

Integrale $\lambda-f$ iterum est ellipticum tertiae speciei; quia est $\sin e=k_0'$, est primo

$$\partial\lambda-\partial f = \frac{\cos b}{\cos e'}.\frac{\operatorname{dn}(v,k_0')^2.\partial v}{1+\operatorname{tang} e'^2.\operatorname{sn}(v,k_0')^2};$$

porro est $\cot e'=\operatorname{tang am}(K_0-q,k_0)=\operatorname{tn}(K_0-q)=\frac{1}{k_0'.\operatorname{tn} q}$, seu $\operatorname{tang} e'=k_0'.\operatorname{tn} q$, quo valore substituto provenit

$$\partial\lambda-\partial f = \frac{\cos b}{\cos e'}.\frac{\operatorname{dn}(v,k_0')^2.\partial v}{1+k_0'^2.\operatorname{tn} q^2.\operatorname{sn}(v,k_0')^2},$$

cujus integrale ad formam $Q(v,q,k_0')$ revocandum est, et quia insuper est $\operatorname{dn} q.\operatorname{tn} q=\cot b.\sin a=\frac{\cos b}{\cos e'}$, est

$$2. \qquad \lambda - f = \overset{\text{I}}{Q}(v, q, k'_0).$$

Nota est formula $\operatorname{tang}\frac{v}{2} = \operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin(a+e)}{\sin(a-e)}}$ (G. A. S. §. 75.), et quia $\sigma = v - \left(\frac{\pi}{2} - \mu\right) - (\lambda - f)$ est, componimus tandem formulam

$$3. \quad \sigma = 2 \cdot \operatorname{arc\,tang}\left(\operatorname{tang}\frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{\frac{\sin(a+e)}{\sin(a-e)}}\right) - \operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sin e}{\sin b} \cdot \frac{\sin\varphi}{\sqrt{(1-\sin e^2 \sin\varphi^2)}}\right) - \overset{\text{I}}{Q}(v, q, k'_0).$$

Formulam 2. brevius e formula 6, articuli 31. derivare potuissemus; secundum formulam hanc enim est

$$P(v,q) + \overset{\text{I}}{Q}(v, q, k'_0) = \operatorname{arc\,tang}[\operatorname{tn} q \operatorname{dn} q \operatorname{tn}(v, k'_0) \operatorname{dn}(v, k'_0)],$$

et si in formulam $\operatorname{tang}\lambda = \frac{\sin a}{\operatorname{tang} b} \cdot \operatorname{tang}\Phi\sqrt{(1 - \sin e^2 \cdot \sin\Phi^2)}$ introducimus functiones ellipticas, est

$$4. \qquad \operatorname{tang}\lambda = \operatorname{tn} q \operatorname{dn} q \operatorname{tn}(v, k'_0) \operatorname{dn}(v, k'_0),$$

et quia insuper est $P(v,q) = f$, formula abit in $f + \overset{\text{I}}{Q}(v, q, k'_0) = \lambda$, quae cum formula 2. est eadem.

47.

Si e centro C describitur circulus maximus, axes AB et CD prolongatas intersecans in punctis C' et C'', puncta haec sunt duo centra externa; ducatur CM, quae circulum $C'C''$ secet in puncto Q' et ponamus

$$\operatorname{tang} C'P = x', \qquad \operatorname{tang} C'Q' = y'.$$

Relatio inter x, y, x', y' exprimitur formulis

$$1. \qquad x' = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad y' = \frac{y}{x},$$

unde vice versa esse sequitur

$$1. \qquad x = \frac{1}{x'} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{y'}{x'}.$$

Eadem curva $AMDBE$, quae spectata e centro C dicitur ellipsis, spectata e centro C' dicitur hyperbola (idem valet de centris C et C''); sint duae semiaxes hyperbolicae pro centro C' designatae literis a' et b', tunc est $a' = 90° - a$ et $\operatorname{tang} b' = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a}$, unde etiam vice versa sequitur, esse $a = 90° - a'$ et $\operatorname{tang} b = \frac{\operatorname{tang} b'}{\operatorname{tang} a'}$ (G. A. S. §. 76.).

Aequatio hyperbolae est

$$\left(\frac{x'}{\operatorname{tang} a'}\right)^2 - \left(\frac{y'}{\operatorname{tang} b'}\right)^2 = 1.$$

Puncti M situs in ellipsi exprimuntur formulis

$$3. \qquad x = \operatorname{tang} a \,.\cos\varphi \qquad \text{et} \qquad y = \operatorname{tang} b \,.\sin\varphi$$

unde adjumento formularum $x' = \frac{1}{x}$ et $y' = \frac{y}{x}$ sequitur, esse

$$4. \qquad x' = \frac{\operatorname{tang} a}{\cos\varphi} \qquad \text{et} \qquad y' = \operatorname{tang} b' \,.\operatorname{tang}\varphi,$$

quibus formulis ejusdem puncti M situs in hyperbola cujus centrum C' est, exprimitur, et quidem ope ejusdem amplitudinis φ realis, qua in illipsi usi sumus.

Saepenumero e formulis pro ellipsi, cujus aequatio est

$$\left(\frac{x}{\operatorname{tang} a}\right)^2 + \left(\frac{y}{\operatorname{tang} b}\right) = 1,$$

derivamus formulas pro hyperbola, quod duplici modo fieri potest. Si evitamus quantitates imaginarias, permutanda sunt $\operatorname{tang} a$ et $\operatorname{tang} a'$, $\operatorname{tang} b$ at $\operatorname{tang} b'$, $\cos\varphi$ et $\frac{1}{\cos\varphi}$, $\operatorname{tang}\varphi$ et $\sin\varphi$; simplicior vero est usus quantitatum imaginariarum, quibus errores optime evitantur. Permutando in aequationibus duarum curvarum x et x', y et y', a et a', $\operatorname{tang} b$ et $\frac{\operatorname{tang} b'}{i}$, φ et φ', aequationes ipsae permutantur; si vero in formulis 3. easdem permutamus quantitates, oriuntur formulae

$$x' = \operatorname{tang} a' \cos\varphi' \qquad \text{et} \qquad y' = \operatorname{tang} b' \,.\frac{\sin\varphi'}{i},$$

quae comparatae cum formulis 4. edocent, esse

$$\cos\varphi' = \frac{1}{\cos\varphi} \qquad \text{et} \qquad \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{i} = \sin\varphi,$$

unde multiplicatione adhuc deducimus $\frac{\sin\varphi'}{i} = \operatorname{tang}\varphi$; e formulis his perspicitur, amplitudinem φ' esse imaginariam. Si formulas has adhibemus, e formulis pro ellipsi adjumento amplitudinis φ' imaginariae deducimus formulas reales pro hyperbola.

48.

Inquiramus in quadraturam hyperbolae, et sit area $C'AMQ' = g$. Differentiale areae hujus est

$$\frac{x'\partial y'}{(1+y'^2)\sqrt{(1+x'^2+y'^2)}} = \partial g.$$

Est $1+y'^2 = 1+\operatorname{tang} b'^2 \operatorname{tang}\varphi^2$;

$$1+x'^2+y'^2 = \frac{\cos\varphi^2+\operatorname{tang} a'^2+\operatorname{tang} b'^2\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2} = \frac{1-\cos a'^2(1-\operatorname{tang} b'^2)\sin\varphi^2}{\cos\varphi^2},$$

quare substituendo obtinemus

$$\partial g = \frac{\sin a' \operatorname{tang} b' . \partial \varphi}{[1-(1-\operatorname{tang} b'^2)\sin\varphi^2]\sqrt{[1-\cos a'^2(1-\operatorname{tang} b'^2)\sin\varphi^2]}}.$$

Quia est $\sin e^2 = \frac{\operatorname{tang} a^2 - \operatorname{tang} b^2}{1+\operatorname{tang} a^2}$, substituendo $\frac{1}{\operatorname{tang} a'^2}$ loco $\operatorname{tang} a^2$ et $\frac{\operatorname{tang} b'^2}{\operatorname{tang} a'^2}$ loco $\operatorname{tang} b^2$, obtinemus $\sin e^2 = \frac{1-\operatorname{tang} b'^2}{1+\operatorname{tang} a'^2} = \cos a'^2(1-\operatorname{tang} b'^2)$, quare prior formula etiam sic exhiberi potest:

$$\partial g = \frac{\sin a' \operatorname{tang} b' . \partial \varphi}{\left(1-\frac{\sin e^2}{\sin a^2}\sin\varphi^2\right)\sqrt{(1-\sin e^2\sin\varphi^2)}}.$$

Ponamus iterum $k'_0 = \sin e$ et $\varphi = \operatorname{am}(v, k'_0)$, tunc enim est

$$\partial g = \frac{\sin a' . \operatorname{tang} b' . \partial v}{1-\frac{k'^2}{\sin a^2}\operatorname{sn}(v,k'_0)^2},$$

quare secundum artic. 33. integrale g ad classem γ revocandum est. Ponamus igitur

$$1-\operatorname{tang} b'^2 = \frac{\sin e^2}{\sin a^2} = \operatorname{dn}(q', k_0)^2, \text{ unde sequitur}$$

$$\operatorname{sn}(q', k_0) = \frac{\operatorname{tang} b'}{\cos e} = \cos e', \text{ sive}$$

$$\operatorname{am}(q', k_0) = 90^\circ - e';$$

quia vero secundum articulum 45. est $\operatorname{am}(K_0 - q, k_0) = 90^\circ - e'$, est

$$q + q' = K_0.$$

Computato igitur argumento q etiam innotescit argumentum q'. Si signo q' utimur, est

$$\partial g = \frac{\sin a' . \operatorname{tang} b' . \partial v}{1-\operatorname{dn} q'^2 . \operatorname{sn}(v,k'_0)^2}.$$

Repraesentet m factorem adhuc indeterminatum constantem, et utrique aequationis membro addatur $m\,\partial v$, quo obtinemus

$$\partial g + m\partial v = \frac{(m+\sin a' \operatorname{tang} b')\partial v - m \operatorname{dn} q'^2 . \operatorname{sn}(v,k'_0)^2 . \partial v}{1-\operatorname{dn} q'^2 . \operatorname{sn}(v,k'_0)^2},$$

quare posito $m = -\sin a' \operatorname{tang} b'$ obtinemus

$$\partial g - \sin a' \operatorname{tang} b' . \partial v = \frac{\sin a' \operatorname{tang} b' \operatorname{dn} q'^2 . \operatorname{sn}(v,k'_0)^2 . \partial v}{1-\operatorname{dn} q'^2 . \operatorname{sn}(v,k'_0)^2},$$

quare integrale membri alteri revocandum est ad $P(v, q')$. Est vero $\operatorname{sn} q' = \cos e'$, $\operatorname{cn} q' = \sin e'$, $\operatorname{dn} q' = 1 - \operatorname{tang} b'^2$, $k_0^2 = \cos e^2$, quare est $k_0^2 . \operatorname{sn} q' . \operatorname{cn} q' . \operatorname{dn} q' = \frac{\cos e' \sin e' \cos e^2 . \sin e}{\sin a}$; porro est $\sin a' \operatorname{tang} b' \operatorname{dn} q'^2 = \frac{\cos a \operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} . \frac{\sin e^2}{\sin a^2} = \cos e \cos e' . \frac{\sin e}{\sin a} . \frac{\sin e}{\operatorname{tang} a} = \frac{\cos e \cos e' . \sin e}{\sin a} . \cos e . \sin e' = \frac{\sin e' \cos e' \sin e \cos e^2}{\sin a}$, ideoque integrando obtinemus formulam satis simplicem

$$g = \sin a' . \operatorname{tang} b' . v + P(v, q'), \text{ sive}$$

$$1. \qquad g = v . \sin a' . \operatorname{tang} b' + P(v, K_0 - q).$$

Si ponitur $v = K'_0$, formula abit in eam areae $C'AMDC''$. Formula (1.) etiam hoc modo derivari potest. Est $f =$ areae APM, quare est $g + f + \triangle PMC =$ sectori $C'CQ'$; est vero

$$\triangle PCM = \text{arc anguli } PCM + \text{arc ang } PMC - \frac{\pi}{2}$$

et sector $C'CQ' = \text{arc ang } C'CQ' = \text{arc ang } PCM$, quare est

$$g + f = \frac{\pi}{2} - \text{arc ang } PMC.$$

Est $\operatorname{tang} CP = \operatorname{tang} PMC . \sin PM$, quare $\operatorname{tang} PMC = \frac{\operatorname{tang} CP}{\sin PM}$, ideoque $\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - PMC\right) = \frac{\sin PM}{\operatorname{tang} CP}$; est vero $\operatorname{tang} PM = \frac{y}{\sqrt{(1+x^2)}}$, quare $\sin PM = \frac{y}{\sqrt{(1+x^2+y^2)}}$, ideoque

$$g + f = \text{arc tang}\left(\frac{y}{x\sqrt{(1+x^2+y^2)}}\right).$$

Est vero $\frac{y}{x} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \operatorname{tang} \varphi$ et $\sqrt{(1+x^2+y^2)} = \frac{\sqrt{(1+\sin e^2 \sin \varphi^2)}}{\cos a}$, quare est

$$\frac{y}{x\sqrt{(1+x^2+y^2)}} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} . \cos a . \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{(1+\sin e^2 \sin \varphi^2)}} = \sin a' \operatorname{tang} b' . \frac{\operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{(1-\sin e^2 \sin \varphi^2)}}$$

ideoque

$$2. \qquad g + f = \text{arc tang}\left(\frac{\sin a' . \operatorname{tang} b' . \operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{(1-\sin e^2 \sin \varphi^2)}}\right).$$

Vidimus vero in articulo 45., esse $k_0^2 . \operatorname{sn} q \operatorname{cn} q \operatorname{dn} q = \sin a \cos a^2 \operatorname{tang} b$ et, quia $\operatorname{dn} q = \sin a$, est

$$\frac{k_0^2 \operatorname{sn} q \operatorname{cn} q}{\operatorname{dn} q} = \frac{\cos a^2 \operatorname{tang} b}{\sin a} = \frac{\operatorname{tang} b}{\operatorname{tang} a} \cos a = \sin a' . \operatorname{tang} b',$$

quare prior formula etiam hoc modo exhiberi potest:

$$g + f = \text{arc tang}\left(\frac{k_0^2 \operatorname{sn} q \operatorname{cn} q}{\operatorname{dn} q} . \frac{\operatorname{tn}(v, k'_0)}{\operatorname{dn}(v, k'_0)}\right);$$

formulam vero hanc ad aequationem (1.) reduci posse, illico patet adhibendo formulam (1.) articuli 36.

49.

Sit curva $eabd$ curvae $EABD$ reciproca, quare et ipsa ellipsis, cujus semiaxes sint $cd = ce$ semiaxis major, et $ca = cb$ semiaxis minor; notae sunt formulae

$$cd = \frac{\pi}{2} - CD \quad \text{et} \quad ca = \frac{\pi}{2} - CA.$$

Describantur duo circuli minores e centro c, quorum radii sint ca et cd; sumatur angulus acn = ACN = φ, cujus crure cn duo circuli se-

centur in n' et n; e punctis n' et n demittantur lineae n'q et np perpendiculariter in axes ab et ed; ipsarum intersectio m erit non solum punctum curvae reciprocae, sed et reciprocae conjunctum cum puncto M curvae primitivae. Si figura *eadb* superimponitur figurae *EADB* ita, ut centra *c* et *C* coïncidant, et directiones tum linearum *CD* et *cd*, tum linearum *CA* et *ca* fiant sibi directe oppositae, linea *Mm*, quae puncta jungit *M* et *m*, non solum quadranti aequalis, sed et linea normalis utrique curvae communis erit. Demonstrationem facillimam hic brevitatis causa supprimimus. Quia permutatis punctis *m* et *M*, et curvis ipsis, permutanda sunt $\frac{\pi}{2}-b$ et *a*, $\frac{\pi}{2}-a$ et *b*, ψ et φ, e' et *e*, abit *k* in k'_0 et k' in k_0; e formulis igitur

$$\text{am}(p,k') = a \quad \text{et} \quad \text{am}(q,k_0) = \frac{\pi}{2}-b$$

patet, permutari simul *p* et *q*; e formulis denique

$$\psi = \text{am}(u,k) \quad \text{et} \quad \varphi = \text{am}(v,k'_0)$$

elucet, permutari etiam argumenta *u* et *v*. Si igitur arcum am, qui reciproco *AM* correspondet, per *s'* designamus, formula

$$s = \overset{\text{I}}{Q}(u,p) \quad \text{abit in} \quad s' = \overset{\text{I}}{Q}(v,q\,k'_0),$$

et si aream dm*p* litera *f'* designamus, formula

$$f = P(v,q) \quad \text{abit in} \quad f' = P(u,p,k').$$

Quia vero est $VM - s = P(u,p,k')$ secundum artic. 42. et

$$\lambda - f = \overset{\text{I}}{Q}(v,q,k'_0) \text{ secundum artic. 46.},$$

formulae hae abeunt in $VM = s + f'$ et $\lambda = f + s'$, sive

1. arcus cycl. VM = arc. ellipt. MD + areae. ellipt. $p\,d\,m$ = angulo $p\,m\,v$,
2. angulus PMU = areae ellipt. PAM + arc. ellipt. am = arc. cycl. $u\,m$.

Pariter est

3. arc. cycl. UM = arc. ellipt. AM + areae am q = angulo $q\,m\,u$,
4. angulus VMQ = areae DMQ + arc. ellipt. dm = arc. cycl. $v\,m$.

E formulis his sequitur, esse quadrantem areae ACD + quadrantem peripheriae $a\,m\,d = \frac{\pi}{2}$, et quadrantem AMD + quadrantem $a\,c\,d = \frac{\pi}{2}$.

Formulae hae, etsi perquam elegantes, adjumento theoriae integralium ellipticorum tertiae speciei nunc demonstratae, nonnisi speciales sunt, et pendent a theoremate generalissimo, quod, simplicitate non minori gaudens, valet de curvis quibuscunque reciprocis, sive de integralibus, quibus ipsarum tum rectificatio, tum quadratura exprimitur.

Monast. Guesph. 21. Martii 1835.

17.

Über das Rationalmachen algebraischer Gleichungen.

(Von Herrn Prof. Dr. *Förstemann* zu Danzig.)

Im 3ten Hefte des 8ten Bandes dieses Journals habe ich eine einfache Methode mitgetheilt, nach welcher man eine Gleichung von der Form

$$\sqrt{X_1}+\sqrt{X_2}+\sqrt{X_3}+\ldots. = 0,$$

wo unter X_1, X_2, X_3 u. s. w. Functionen unbekannter Gröfsen verstanden werden, auf die Auflösung einer Gleichung zurückführen kann, welche die in dieser Gleichung vor Augen liegenden Quadratwurzeln nicht mehr enthält. Die durch diese Methode abgeleitete Gleichung wird freilich nur dann, in Bezug auf die unbekannten Gröfsen, rational sein, wenn die Ausdrücke X_1, X_2 u. s. w. selbst rationale Functionen dieser unbekannten Gröfsen sind; inzwischen können wir uns doch, selbst im entgegengesetzten Falle, des Ausdrucks bedienen: die Gleichung werde durch diese Methode rational gemacht, in so fern dadurch wenigstens die in der Form obiger Gleichung selbst vorliegenden Quadratwurzeln zum Verschwinden gebracht werden.

Man kann aber, von ähnlichen Principien ausgehend, selbst die weit allgemeinere Aufgabe lösen, eine Gleichung rational zu machen, welche sich von der obigen dadurch unterscheidet, dafs sie, statt der Quadratwurzeln, Wurzeln beliebiger Grade enthält. Wir wollen uns hier nun mit dieser allgemeineren Aufgabe beschäftigen; jedoch zunächst und hauptsächlich nur den Fall betrachten, wo die Wurzeln der gegebenen Gleichung alle von demselben Grade sind. Statt der Zeichen X_1, X_2, X_3, ... wollen wir uns aber der einfacheren, A, B, C, ..., bedienen.

1.

Es ist also zu untersuchen, wie die Auflösung der Gleichung

$$\text{I.} \qquad \sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}+\ldots. = 0$$

auf die Auflösung einer Gleichung zurückzuführen sei, welche die in (I.) vorkommenden Wurzeln des $n$ten Grades nicht mehr enthält.

Der Grundgedanke für diese Untersuchung bleibt derselbe, der uns bei dem speciellen Falle des früheren Aufsatzes geleitet hat. Wir müssen uns erinnern:

1) Dafs jede Wurzel des $n$ten Grades eigentlich n verschiedene Werthe hat, weshalb die Gleichung (I.) eine Menge verschiedener Gleichungen unter sich begreift, so dafs die Forderung, diese Gleichung zu lösen, mit der Forderung zusammenfällt, von jenen verschiedenen Gleichungen alle diejenigen zu lösen, welche überhaupt auflösbar sind.

2) Dafs die Aufgabe, jede einzelne der Gleichungen

$$F=0, \quad F'=0, \quad F''=0, \quad \text{u. s. w.},$$

wo F, F', F'', ... Functionen einer oder mehrer unbekannter Gröfsen bedeuten, für sich aufzulösen, sich in die Aufgabe, die Gleichung

$$F \times F' \times F'' \times \ldots = 0$$

zu lösen, verwandeln läfst.

2.

Die Wurzeln des $n$ten Grades aus der Zahl 1 werden bekanntlich durch den Ausdruck dargestellt:

$$\cos \frac{2k\pi}{n} + \sin \frac{2k\pi}{n} i,$$

wo i eine der beiden imaginären Quadratwurzeln aus -1 bezeichnet, k aber jede beliebige ganze Zahl sein kann; und man erhält alle n verschiedenen Wurzeln, wenn man in diesem Ausdrucke unter i immer eine und dieselbe der beiden Quadratwurzeln aus -1 verstehet, statt k aber nach der Reihe alle die Zahlen

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \quad n-2, \quad n-1$$

setzt. Wir wollen die auf diese Weise hervorgehenden Wurzeln der Zahl 1 durch

$$R_0, \quad R_1, \quad R_2, \quad \ldots \quad R_{n-2}, \quad R_{n-1}$$

bezeichnen, so dafs allgemein

$$R_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + \sin \frac{2k\pi}{n} i$$

und als ein besondrer Fall

$$R_0 = 1.$$

Aus dem bekannten Algorithmus der mit R_0, R_1, ... bezeichneten Ausdrücke folgt

$$R_0 = R_n = R_{2n} \ldots = R_{-n} = R_{-2n} \ldots = 1,$$
$$R_1 = R_{n+1} = R_{2n+1} \ldots = R_{-n+1} = R_{-2n+1} \ldots$$

u. s. w., allgemein

$$R_{pn+q} = R_q,$$

wenn p und q, wie n, ganze Zahlen bedeuten. Hienach kann man einen Werth wie R_s, wenn s eine in der Reihe 0, 1, 2, ... $n-1$ nicht ent-

haltene ganze Zahl ist, auf einen Ausdruck R_k zurückführen, in welchem k eine Zahl aus dieser Reihe ist.

Ferner gelten die Gleichungen

$$R_k . R_l = R_{k+l} \quad \text{und} \quad (R_k)^m = R_{km} .$$

Da die Ausdrücke R_0, R_1, ... R_{n-1} die n verschiedenen Werthe von x sind, wodurch die Gleichung $x^n - 1 = 0$ gelöset wird, welche auch die Form annimmt:

$$x^n + 0x^{n-1} + 0x^{n-2} + ... + 0x^2 + 0x - 1 = 0,$$

so findet man, der Theorie der höheren Gleichungen gemäfs:

$$R_0 + R_1 + R_2 + ... + R_{n-2} + R_{n-1} = 0,$$

dann

$$\left.\begin{aligned} R_0 . R_1 + R_0 . R_2 + R_0 . R_3 + ... + R_0 . R_{n-1} \\ + R_1 . R_2 + R_1 . R_3 + ... + R_1 . R_{n-1} \\ + R_2 . R_3 + ... + R_2 . R_{n-1} \\ + ... \\ + R_{n-2} . R_{n-1} \end{aligned}\right\} = 0,$$

d. h. die Summe aller Producte aus je zweien der Ausdrücke R_0, R_1, R_2, ... R_{n-1} ist $= 0$.

Ferner gilt ein ganz gleicher Satz für die Summe aller Producte aus je dreien dieser Wurzeln u. s. w., bis endlich für die Summe der Producte aus je $n-1$ derselben. Was aber zuletzt das Product aller jener n verschiedenen Wurzel-Ausdrücke betrifft, so gilt: 1) wenn n eine ungerade Zahl, so ist dies Product $= 1$; 2) wenn n eine gerade Zahl, so ist dasselbe $= -1$.

3.

Verstehen wir nun unter a irgend einen der n Werthe, dargestellt durch

$$a = a . R_0, \quad a . R_1, \quad a . R_2, \quad .... \quad a . R_{n-2}, \quad a . R_{n-1},$$

wofür wir aber der Kürze wegen schreiben wollen:

$$a, \quad a_1, \quad a_2, \quad .... \quad a_{n-2}, \quad a_{n-1}.$$

Bezeichnen wir eben so irgend einen Werth von $\sqrt[n]{B}$ durch b, irgend einen der Werthe von $\sqrt[n]{C}$ durch c, u. s. w., so werden alle n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{B}$ ausgedrückt durch

$$b, \quad b_1, \quad b_2, \quad .... \quad b_{n-2}, \quad b_{n-1};$$

alle n verschiedenen Werthe von $\sqrt[n]{C}$ durch

$$c, \quad c_1, \quad c_2, \quad .... \quad c_{n-2}, \quad c_{n-1},$$

u. s. w.

Nun erhellet leicht, dafs alle in der Gleichung (I.) begriffenen Gleichungen durch die Form

$$\text{II.} \qquad a + b_\beta + c_\gamma + \ldots = 0$$

dargestellt werden können, wenn hier β, γ, ... ganze Zahlen sind, und der Bedingung unterliegen, dafs für jeden dieser Buchstaben jede Zahl der Reihe 0, 1, 2, ... $n-1$, aber keine nicht dieser Reihe entnommene Zahl gesetzt werden darf. Es möchte zwar scheinen, als müsse links für das erste Glied a der allgemeinere Ausdruck a_α gesetzt werden; allein man findet, dafs jede in der Form

$$a_\alpha + b_\beta + c_\gamma + \ldots = 0$$

begriffene Gleichung auf eine Gleichung der Form (II.) zurückgebracht werden kann. Multiplicirt man nämlich die eben aufgestellte Gleichung beiderseits mit $R_{n-\alpha}$, so entsteht aus dem Gliede a_α das Glied $a.R_n = a$, und es geht eine Gleichung hervor, welche in der Form (II.) begriffen ist.

Das Aggregat, welches in der Gleichung (I.) $= 0$ gesetzt ist, bestehe aus m Gliedern: so lassen sich, indem man in (II.) statt eines jeden der Buchstaben β, γ, ... jede der Zahlen 0, 1, 2, ... $n-1$ setzt, n^{m-1} Gleichungen ableiten, welche unter der Form (I.) enthalten und alle unter einander verschieden sind. Diese n^{m-1} Gleichungen werden aber auch vollständig alle diejenigen wesentlich verschiedenen sein, welche unter (I.) begriffen gedacht werden müssen, und die Multiplication aller n^{m-1} unter der Form

$$a + b_\beta + c_\gamma + \ldots$$

enthaltenen Ausdrücke unter einander wird, wenn man das Product $= 0$, und dann statt a, b, c, ... setzt $\sqrt[n]{A}$, $\sqrt[n]{B}$, $\sqrt[n]{C}$, ..., eine Gleichung hervorbringen, durch deren Auflösung die Auflösung der in (I.) enthaltenen n^{m-1} Gleichungen gegeben wird, so weit dieselben überhaupt auflösbar sind. Es bleibt übrigens im Folgenden noch zu zeigen, dafs nach dieser Methode wirklich eine Gleichung hervorgehen mufs, welche von den in (I.) enthaltenen Wurzeln befreit ist.

4.

Dieses zu zeigen, hat in dem Falle, welchen wir hier zunächst betrachten wollen, nämlich den, wo $m = 2$, also die Gleichung

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} = 0$$

rational zu machen ist, durchaus keine Schwierigkeit. Es ist hier das Product der n Hülfs-Aggregate

$$a + b, \quad a + b_1, \quad a + b_2, \quad \ldots \ldots \quad a + b_{n-1},$$

d. h. der Binomien

$$a+b,\quad a+b.R_1,\quad a+b.R_2,\quad \ldots.\quad a+b.R_{n-1}$$

zu bilden. Dasselbe mufs einen Ausdruck von der Form

$$a^n+E_1a^{n-1}b+E_2a^{n-2}b^2+\ldots.+E_{n-1}ab^{n-1}+E_nb^n$$

geben, in welchem die Coefficienten E_1, E_2, ... E_n Ausdrücke bedeuten, die von R_0, R_1, ... R_{n-1} abhängig sind. Aus §. 2. findet sich, dafs E_1, als Summe aller dieser Werthe R_0, R_1, ... R_{n-1}, den Werth 0 hat; eben so ist $E_2=0$, als Summe aller dieser Producte von je zweien dieser Werthe; dann ist, immer nach §. 2., auch jeder der folgenden Coefficienten, bis zu E_{n-1}, $=0$; endlich aber ist $E_n=1$, oder $=-1$, je nachdem n ungerade oder gerade ist. Das Product der n Binomien ist also $=a^n+b^n$, wenn n ungerade, und $=a^n-b^n$, wenn n gerade. Da nun $a^n=A$, $b^n=B$, so erhält man, wenn n ungerade, die rationale Gleichung

$$A+B=0,$$

und wenn n gerade, die Gleichung

$$A-B=0.$$

Dasselbe Ergebnifs findet man, wenn man die aus $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}=0$ entspringende Gleichung $\sqrt[n]{A}=-\sqrt[n]{B}$, durch Potenzirung auf beiden Seiten, rational macht. Bei ungeraden n nämlich erhält man $A=-B$, bei geraden n aber $A=B$.

5.

Das gezeigte Verfahren gilt auch, wenn man statt der einen Wurzel, z. B. $\sqrt[n]{A}$, eine Function ohne vorgesetztes Wurzelzeichen, etwa $\mathfrak{A}$, hat. Hier kann man, um das obige Verfahren anzuwenden, statt $\sqrt[n]{A}$ setzen $\sqrt[n]{\mathfrak{A}}$, und unter a den oben mit $\mathfrak{A}$ bezeichneten Werth dieses Wurzelausdrucks verstehen. Dann ergiebt sich aus dem Hülfsproducte a^n+b^n oder a^n-b^n die rationale Gleichung $\mathfrak{A}^n+B=0$ oder $\mathfrak{A}^n-B=0$, je nachdem n ungerade oder gerade.

Noch möchte es nicht überflüssig sein, zu bemerken, dafs man sich mit der Untersuchung der Gleichung

$$\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}=0$$

begnügen kann, und nicht nöthig hat, auch die Gleichung

$$\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}=0$$

zu betrachten. Ist nämlich n ungerade, so hat $-\sqrt[n]{B}$ dieselben Werthe wie $\sqrt[n]{(-B)}$; statt $\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}=0$ kann man also setzen $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{-B}=0$, wodurch man auf die gewöhnliche Form zurückkommt. Ist aber

n gerade, so ist $R_{\frac{1}{2}n} = -1$; unter den n verschiedenen Werthen von $\sqrt[n]{B}$ ist also einer $= -b$, wenn irgend ein anderer $= b$ gesetzt wurde; man darf daher b mit $-b$ vertauschen, und also statt $a-b$ zu Grunde legen $a+b$, so wie $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}=0$ statt $\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}=0$. So führt z. B. die Gleichung $\sqrt[4]{A}-\sqrt[4]{B}=0$ eben so zu der rationalen Gleichung $A-B=0$, wie die Gleichung $\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}=0$.

6.

Jetzt sei die Gleichung

$$\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}+\sqrt[n]{C}=0$$

rational zu machen. Das Hülfsproduct wird hier durch Multiplication der Hülfs-Aggregate zu bilden sein, welche aus der Form

$$a+b_\beta+c_\gamma$$

entspringen, wenn man statt β sowohl wie γ jede der Zahlen 0, 1, 2, ... $n-1$ setzt. Nun erhellet Folgendes:

1) Es giebt n^2 verschiedene Aggregate dieser Art, und daher wird das entstehende Hülfsproduct in allen seinen Theilen in Bezug auf a, b, c ein Ausdruck vom n^2ten Grade sein.

2) Das Hülfsproduct wird für a, b und c symmetrisch sein, wie folgendermaafsen erhellet. Vertauscht man in jedem der n^2 Hülfs-Aggregate b mit c, so kann dies auf das Hülfsproduct keinen Einfluſs haben. Denn sind in dem Hülfs-Aggregate die Unterscheidungszeichen β und γ einander gleich, so leidet dasselbe bei Vertauschung des b mit c keine Änderung. Ist dagegen β nicht $= \gamma$, so gehet durch jene Vertauschung das Hülfs-Aggregat in ein anderes, dieses andere aber auch wieder in jenes über. Die Vertauschung des b mit c bringt also dieselben Hülfs-Aggregate wieder hervor, und läſst daher auch das Product ungeändert.

Eben so wenig kann Vertauschung von a mit b oder mit c einen Einfluſs auf das Product äuſsern. Um dieses bequem zu zeigen, unterscheiden wir n verschiedene Gruppen der Hülfs-Aggregate, nämlich die Gruppe mit b, welche die n Hülfs-Aggregate

$$a+b+c,\quad a+b+c_1,\quad a+b+c_2,\quad \ldots.\quad a+b+c_{n-1}$$

umfaſst; dann die Gruppe mit b_1, welche alle Hülfs-Aggregate in sich begreift, in denen b den Index 1 bei sich hat; hierauf die Gruppe mit b_2, die mit b_3, u. s. w. bis zur $n$ten Gruppe, nämlich der mit b_{n-1}.

Wird nun a mit b vertauscht, so bringt dieses bei allen Aggregaten der Gruppe mit b keine Änderung hervor. Was aber die Aggre-

gate der Gruppe mit b_1 betrifft, so geht das Aggregat $a+b_1+c$ über in

$$a_1+b+c = (a+b_{n-1}+c_{n-1}).R_1,$$

das Aggregat $a+b_1+c_1$ geht über in

$$a_1+b+c_1 = (a+b_{n-1}+c).R_1,$$

das dritte Aggregat dieser Gruppe, nämlich $a+b+c_2$, bringt hervor

$$a_1+b+c_2 = (a+b_{n-1}+c_1).R_1;$$

allgemein entstehet aus dem $(k+1)$ten Aggregate, nämlich $a+b_1+c_k$, bei dieser Vertauschung das Aggregat

$$a_1+b+c_k = (a+b_{n-1}+c_{k-1}).R_1.$$

Aus den n Aggregaten der Gruppe mit b_1 gehen also Ausdrücke hervor, welche den n Aggregaten der Gruppe mit b_{n-1}, jedes mit R_1 multiplicirt, gleich sind. Das Product dieser aus der Gruppe mit b_1 entstandenen Ausdrücke ist also dem Producte aus allen Aggregaten der Gruppe mit b_{n-1} und aus R_1^n, oder also, weil $R_1^n = 1$, diesem Producte schlecht gleich.

Aus der Gruppe mit b_2 gehen, bei Vertauchung des a mit b, n Aggregate hervor, welche den Aggregaten der Gruppe mit b_{n-2}, jede mit R_2 multiplicirt, gleich sind. Allgemein nämlich entsteht aus $a+b_2+c_k$ der Ausdruck

$$a_2+b+c_k = (a+b_{n-2}+c_{k-2}).R_2.$$

Es wird daher das Product der durch jene Vertauschung aus der Gruppe mit b_2 entstandenen Aggregate dem Producte aus den n ursprünglichen Aggregaten der Gruppe mit b_{n-2} und der $n$ten Potenz von R_2, oder also, da diese Potenz $= 1$, dem Producte jener Aggregate selbst gleich sein.

Auf ähnliche Art läfst sich einsehen, dafs aus der Gruppe mit b_3 nach der Vertauschung des a mit b ein Product hervorgehen wird, welches dem Producte der ursprünglichen Aggregate mit b_{n-3} gleich ist, u. s. w. Allgemein wird aus der Gruppe mit b_k durch die Vertauschung ein Product entstehen, welches dem Producte aus der ursprünglichen Gruppe mit b_{n-k} gleich ist.

Hieraus folgt nun, dafs das Product aller n Gruppen mit b, b_1, b_2, ... b_{n-1} nach der Vertauschung des a mit b von dem Producte dieser Gruppen selbst, ohne Vertauschung, sich nicht unterscheiden kann.

Man sieht aber leicht, dafs eben so wenig die Vertauschung von a mit c einen Einfluſs auf das Hülfsproduct ausüben kann. Da nun, wie schon oben gesagt, auch die Vertauschung des b mit c keinen solchen

Einfluſs äuſsern kann, so folgt endlich, das Hülfsproduct müsse für a, b und c **symmetrisch** sein.

3) Das Hülfsproduct kann keine andere Potenzen von a, b und c enthalten, als solche, deren Exponenten durch n theilbar sind. Dieses wird folgendermaafsen bewiesen.

Verwandelt man in allen Hülfs-Aggregaten a in a_1, so gehen aus der Gruppe mit b Hülfs-Aggregate hervor, welche mit den Hülfs-Aggregaten der Gruppe mit b_{n-1} übereinstimmen, wenn man jedes derselben mit R_1 multiplicirt, und allgemein gehen aus der Gruppe mit b_k Aggregate hervor, die mit denen der Gruppe mit b_{k-1}, jedes mit R_1 multiplicirt, übereinstimmen. Die Anzahl aller Hülfs-Aggregate ist aber $= n^2$, folglich ist das Product aller Aggregate, die durch Verwandlung von a in a_1 entstanden sind, dem Producte aus den ursprünglichen Hülfs-Aggregaten und der n^2ten Potenz von R_1, oder da diese Potenz $= 1$, dem ursprünglichen Hülfsproducte selbst gleich.

Noch leichter zeigt sich, daſs auch die Verwandlung von b in b_1 keinen Einfluſs auf das Hülfsproduct äuſsern kann. Dabei geht nämlich $b_1 = b.R_1$ in $b_1.R_1 = b.R_1^2 = b.R_1 = b_2$, dann b_2 in b_3, u. s. w., endlich b_{n-1} in b über. Daher entsteht bei dieser Umänderung aus der Gruppe mit b die mit b_1, allgemein aus der mit b_k die mit b_{k+1}, aus der letzten mit b_{n-1} aber die erste mit b, und so leidet der ganze Inbegriff der Hülfs-Aggregate, und folglich auch deren Product, keine Änderung. Ganz auf dieselbe Weise zeigt sich, daſs auch die Verwandlung von c in c_1 keinen Einfluſs auf das Hülfsproduct haben kann.

Daraus, daſs das Hülfsproduct aus n^2 Aggregaten entsteht, die für a, b und c vom ersten Grade sind, folgt nun weiter, daſs dasselbe, nach den Potenzen von a geordnet, wenn man statt n^2 schreibt p, von der Form sein wird:

$$a_p + E_1 a^{p-1} + \ldots + E_k a^{p-k} + \ldots + E_{p-1} a + E_p,$$

wo E_k ein von b, c und den Werthen R_0, R_1, $\ldots$ R_{n-1} abhängiger, vieltheiliger Ausdruck sein wird, der in allen seinen Theilen für b und c vom $k$ten Grade ist.

Verändert man nun in dem Hülfsproducte a in a_1, d. h. in $R_1 a$, so wird a^k in $R_1^k a^k = R_k a^k$ übergehen, und so überhaupt das Product die Gestalt annehmen:

$$R_p a^p + E_1 R_{p-1} a^{p-1} + \ldots + E_k R_{p-k} a^{p-k} + \ldots + E_{p-1} R_1 a + E_p.$$

Die Differenz dieses und des obigen Ausdrucks mufs nun, für jeden Werth von a, $=0$ sein, weil, dem früher Gesagten zu Folge, die Vertauschung von a mit a_1 das Product nicht ändern soll. Es mufs also sein:

$(1-R_p)a^p+E_1.(1-R_{p-1})a^{p-1}....+E_k.(1-R_{p-k})a^{p-k}....+E.(1-R_1)a=0$,

a sei was man wolle. Dies kann aber nicht Statt finden, wenn nicht jeder der Coefficienten

$$1-R_p,\quad E_1.(1-R_{p-1}),\ ....\ E_k.(1-R_{p-k}),\ ....\ E_{p-1}.(1-R_1)$$

den Werth 0 hat. Was nun die Coefficienten betrifft, welche zu Potenzen von a gehören, deren Exponent durch n theilbar ist, so werden diese wirklich $=0$ sein, wenn gleich die in ihnen enthaltenen, mit E bezeichneten, Coefficienten nicht $=0$ sind. Ist nämlich $p-k$ durch n theilbar, so ist $R_{p-k}=1$, und also $E_n.(1-R_{p-k})=0$, auch wenn E_k nicht $=0$ ist. Anders ist es mit den Coefficienten der Glieder, in denen die Exponenten von a nicht durch n theilbar sind; wenn nämlich $p-k$ nicht durch n theilbar ist, so ist auch R_{p-k} nicht $=1$; da nun $E_k.(1-R_{p-1})=0$ sein soll, so mufs hier nothwendig E_k selbst $=0$ sein.

So erhellet, dafs in dem entwickelten Hülfsproducte keine Potenz von a vorkommen kann, deren Exponent nicht durch n theilbar ist. Für b und c würde aber die gleiche Eigenschaft des Hülfsproductes sich auf dieselbe Art beweisen lassen. Hieraus erhellet endlich, dafs, wenn man in dem entwickelten Hülfsproducte statt a^n, b^n, c^n die Werthe A, B, C substituirt, ein rationaler Ausdruck vom $n$ten Grade hervorgehen mufs. Dieser, $=0$ gesetzt, wird sodann die gesuchte, wirklich rationale Gleichung darbieten.

7.

Was nun die Anwendung unsrer Methode auf eine Gleichung von der Form (I.) betrifft, in der das $=0$ gesetzte Aggregat aus mehr als 3, im Allgemeinen aus m Theilen bestehet, so ergiebt sich:

1) Es sind n^{m-1} verschiedene Hülfs-Aggregate zu bilden; das Hülfsproduct ist daher, in Bezug auf a, b, c, ..., von n^{m-1}ten Grade.

2) Dies Hülfsproduct ist symmetrisch für alle Buchstaben a, b, c, ...

3) Dasselbe enthält diese Buchstaben nur in Potenzen, deren Exponenten durch n theilbar sind. Setzt man nun zuletzt statt a^n, b^n, c^n, ... die Werthe A, B, C, ..., so gehet eine rationale Form des n^{m-2}ten Gra-

des in Bezug auf $A, B, C, \ldots$ hervor, und diese, $= 0$ gesetzt, giebt die gesuchte rationale Gleichung.

Die Beweise für die in 2. und 3. aufgestellten Eigenschaften sind den Beweisen, die in §. 6. von den ähnlichen Sätzen für den speciellen Fall, wo $m = 3$, gegeben wurden, so höchst ähnlich, dafs es keiner weiteren Ausführung derselben bedarf.

8.

Bei der Anwendung der nun in der Hauptsache hinreichend erörterten Methode auf besondre Fälle ist die Ausführung der Multiplication der Hülfs-Aggregate gewöhnlich eine schwierige Sache, und zwar desto schwieriger, je gröfser die Zahlen n und m sind. Es giebt aber Mittel, diese Multiplicationen etwas zu erleichtern. Ein erhebliches Erleichterungsmittel finden wir zunächst in folgendem Satze:

Das Hülfsproduct für ein gegebenes m und n enthalte die m Buchstaben $a, b, c, \ldots e, f$: so bestehet dasselbe theils aus Gliedern, welche nur die Buchstaben $a, b, \ldots e$ enthalten, theils aus solchen, die auch f in sich haben. Das aus den Gliedern, welche nicht f enthalten, gebildete Polynom findet sich aber, wenn man das Hülfsproduct, das für dasselbe n aber nur für die $m-1$ Buchstaben $a, b, c, \ldots e$ zu bilden ist, zur $n$ten Potenz erhebt.

Die Richtigkeit dieses Satzes erhellet so: Man betrachte irgend ein Hülfs-Aggregat für die $m-1$ Buchstaben $a, b, c, \ldots e$, z. B. $a + b_\beta + c_\gamma \ldots + e_\varepsilon$, so kommen unter den Hülfs-Aggregaten, welche für $a, b, c, \ldots e, f$ zu bilden sind, n verschiedene vor, die dasselbe Aggregat $a + b_\beta + c_\gamma \ldots + e_\varepsilon$ enthalten. Das erste derselben enthält nämlich aufserdem noch $+f$, das zweite noch $+f_1$, u. s. w. das letzte noch $+f_{n-1}$. Wäre nun $f = 0$, so würde das Product dieser n verschiedenen Hülfs-Aggregate sein

$$= (a + b_\beta + c_\gamma + \ldots + e_\varepsilon)^n.$$

Da nun dieses von jedem der aus $a, b, c, \ldots e$ zu bildenden Hülfs-Aggregate gilt, so mufs offenbar das Hülfsproduct für $a, b, \ldots e, f$, wenn man darin $f = 0$ setzt, in die $n$te Potenz des Hülfsproducts für $a, b, c, \ldots e$ übergehen. Hieraus ergiebt sich nun der obige Satz.

Mittelst dieses Satzes kann man aus einem bekannten Hülfsproducte, für ein gewisses n und m, immer diejenigen Glieder des Hülfsproducts, für dasselbe n aber ein um 1 gröfseres m finden, welche die schon in jenem Hülfsproducte vorhandenen Buchstaben enthalten. Wegen

der Symmetrie des neuen Hülfsproducts für alle Buchstaben kann man aber sodann auch alle diejenigen seiner Glieder bestimmen, welche auch den neu hinzu gekommenen Buchstaben, nicht aber zugleich alle übrigen enthalten. So haben wir also einen Kunstgriff, durch welchen alle Glieder des neuen Hülfsproducts gefunden werden, aufser denen, in welchen alle Buchstaben enthalten sind.

9.

Wir wollen nun unsere Methode an mehreren besondern Beispielen versuchen, zunächst aber den Fall, wo $n=2$, noch ein wenig betrachten, der schon im frühern Aufsatze behandelt wurde.

Setzen wir zunächst $m=2$, und wollen also die Gleichung

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}=0$$

rational machen, so haben wir das Hülfsproduct

$$(a+b).(a+b_1)=(a+b).(a-b)=a^2-b^2,$$

und also, weil $a^2=A$ und $b^2=B$, die rationale Gleichung

$$A-B=0,$$

wie schon in §. 4. angegeben wurde.

10.

Wenden wir dies Resultat auf das Rationalmachen der Gleichung

$$\sqrt{(x+p)}+\sqrt{(x+q)}=0$$

an, so finden wir die rationale Gleichung

$$(x+p)-(x+q)=0 \quad \text{oder} \quad 0x+(p-q)=0.$$

Nun sind zwei Fälle zu unterscheiden: 1) Ist $p=q$, so bleibt x unbestimmt; wirklich ist aber auch, in diesem Falle, die obige irrationale Gleichung bei jedem Werthe von x richtig, wenn man nur die eine Wurzel positiv, die andere negativ nimmt. 2) Ist p nicht $=q$, so wird $x=\infty$. Auch dieses zeigt sich richtig, wenn man nur für die eine Wurzel eine positive, für die andere eine negative Zahl nimmt; denn der Werth von $\sqrt{(x+p)}$ kann sich von dem von $\sqrt{(x+q)}$ sehr wenig unterscheiden, wenn x sehr grofs genommen wird; für $x=\infty$ sind diese Wurzeln als gleich anzusehen.

11.

Um das Hülfsproduct für $n=2$ und $m=3$ zu erhalten, und dadurch die Gleichung

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}=0$$

rational zu machen, quadriren wir, dem in §. 8. angezeigten Vortheile zu Folge, das in §. 9. entstandene Hülfsproduct $a^2 - b^2$, und erhalten $a^4 - 2a^2b^2 + b^4$. Wegen der Symmetrie mufs nun das gesuchte Hülfsproduct noch die Glieder $c^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$ enthalten. Ein Glied mit allen drei Buchstaben kann nicht vorkommen, denn dasselbe müfste von der 4ten Dimension sein, dürfte aber nur gerade Potenzen von a, b, c enthalten, ein Glied mit $a^2b^2c^2$ würde aber schon vom 6ten Grade sein. Das ganze Hülfsproduct ist also

$$a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2,$$

und folglich die gesuchte rationale Gleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 - 2AB - 2AC - 2BC = 0.$$

12.

Aus der Gleichung

$$\sqrt{(x+p)} + \sqrt{(x+q)} + \sqrt{(x+r)} = 0$$

entstehet hiernach die rationale Gleichung

$$-3x^2 - 2(p+q+r)x + p^2 + q^2 + r^2 - 2pq - 2pr - 2qr = 0.$$

Ein Beispiel hierzu findet sich schon in dem früheren Aufsatze (Bd. 8. S. 317.).

13.

Die Gleichung

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} = 0$$

rational zu machen, müssen wir das in §. 11. gefundene Hülfsproduct, dem §. 8. zu Folge, zunächst quadriren. Hier erscheint der Ausdruck

$$\begin{aligned}
&a^8 + b^8 + c^8 \\
&- 4a^6b^2 - 4a^6c^2 - 4a^2b^6 - 4a^2c - 4b^6c^2 - 4b^2c^6 \\
&+ 6a^4b^4 + 6a^4c^4 + 6b^4c^4 \\
&+ 4a^4b^2c^2 + 4a^2b^4c^2 + 4a^2b^2c^4.
\end{aligned}$$

Wegen der Symmetrie kommen hierzu die mit d versehenen Glieder

$$\begin{aligned}
&d^8 \\
&- 4a^6d^2 - 4a^2d^6 - 4b^6d^2 - 4b^2d^6 - 4c^6d^2 - 4c^2d^6 \\
&+ 6a^4d^4 + 6b^4d^4 + 6c^4d^4 \\
&+ 4a^4b^2d^2 + 4a^4c^2d^2 + 4a^2b^4d^2 + 4a^2c^4d^2 + 4a^2b^2d^4 + 4a^2c^2d^4 + 4b^4c^2d^2 \\
&+ 4b^2c^4d^2 + 4b^2c^2d^4.
\end{aligned}$$

Jetzt ist nur noch ein einziges Glied des Hülfsproducts zu bestimmen, nämlich eins, welches alle 4 Buchstaben enthält, und von der Form $E.a^2b^2c^2d^2$ ist. Zur Bestimmung des Coefficienten E dient die Betrach-

tung, dafs das Product der 8 Hülfs-Aggregate, welche alle von der Form $a \pm b \pm c \pm d$ sind, immer dem entwickelten Producte gleich sein mufs, welche Werthe man auch den 4 Buchstaben a, b, c, d beilegt. Setzen wir nämlich jeden dieser Buchstaben $= 1$, so gehen alle Hülfs-Aggregate, welche zwei Glieder mit $+$ und zwei mit $-$ enthalten, in 0 über; daher mufs auch bei dieser Annahme das entwickelte Hülfsproduct $= 0$ sein. Geben wir aber in demjenigen, was vom Hülfsproducte schon entwickelt ist, und auch in dem hinzuzufügenden Gliede $E.a^2b^2c^2d^2$, jedem Buchstaben den Werth 1, so erhalten wir, als Werth des Products, den Ausdruck $40 + E$; offenbar mufs also $E = -40$ sein, und so sind wir berechtigt, zu dem schon Entwickelten noch das Glied $-40a^2b^2c^2d^2$ hinzuzufügen, um das vollständige Hülfsproduct zu haben.

Schreiben wir nun statt a^2, b^2, c^2, d^2 die Werthe A, B, C, D und setzen den daraus hervorgehenden Ausdruck $= 0$, so haben wir die gewünschte rationale Gleichung

$$\begin{aligned}
&A^4+B^4+C^4+D^4\\
&-4(A^3B+A^3C+A^3D+AB^3+AC^3+AD^3+B^3C+B^3D+BC^3+BD^3+C^3D+CD^3)\\
&+6(A^2B^2+A^2C^2+A^2D^2+B^2C^2+B^2D^2+C^2D^2)\\
&+4(A^2BC+A^2BD+A^2CD+AB^2C+AB^2D+ABC^2+ABD^2+AC^2D\\
&\qquad +ACD^2+B^2CD+BC^2D+BCD^2)\\
&-40ABCD = 0:
\end{aligned}$$

eine Gleichung, welche vermittelst eines Summenzeichens kürzer so ausgedrückt werden könnte:

$$\Sigma(4)-4.\Sigma(3,1)+6\Sigma(2,2)+4\Sigma(2,1,1)-40\Sigma(1,1,1,1) = 0.$$

14.

Wenden wir dieses nun auf das Rationalmachen der Gleichung

$$(\alpha) \qquad \sqrt{(x+p)}+\sqrt{(x+q)}+\sqrt{(x+r)}+\sqrt{(x+s)} = 0$$

an, so werden wir zu einer Gleichung vom vierten Grade, wie zu erwarten ist, geführt, aber einer solchen, in welcher die Coefficienten der 4ten, 3ten und 2ten Potenz von x den Werth 0 haben, nämlich zu der Gleichung

$$(\beta) \qquad 0x^4+0^3x+0x^2-\mathfrak{N}x+\mathfrak{Z} = 0,$$

wo die Werthe von $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{N}$ durch folgende Gleichungen bestimmt sind:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{Z} &= p^4+q^4+r^4+s^4\\
&-4[p^3(q+r+s)+q^3(p+r+s)+r^3(p+q+s)+s^3(p+q+r)]\\
&+6(p^2q^2+p^2r^2+p^2s^2+q^2r^2+q^2s^2+r^2s^2)\\
&+4[pqr(p+q+r)+pqs(p+q+s)+prs(p+r+s)+qrs(q+r+s)]\\
&-40pqrs,
\end{aligned}$$

$$\mathfrak{N}=8.[p^3+q^3+r^3+s^3-p^2(q+r+s)-q^2(p+r+s)-r^2(p+q+s)-s^2(p+q+r)+2pqr+2pqs+2prs+2qrs].$$

Vernachlässigen wir in der Gleichung (β.) die Glieder mit x^4, x^3, x^2, weil sie alle 0 zum Coefficienten haben, so haben wir es nur mit einer Gleichung vom ersten Grade zu thun, und finden

$$x = \frac{3}{\mathfrak{N}}.$$

Untersucht man die Richtigkeit dieses Werthes, durch Substitution desselben in die Gleichung (α.), so findet man für jede der darin enthaltenen vier Wurzeln einen Bruch, dessen Nenner $=\sqrt{\mathfrak{N}}$; die Zähler aber sind folgende:

bei $\sqrt{(x+p)}\ldots$ $3p^2-q^2-r^2-s^2-2pq-2pr-2ps+2qr+2qs+2rs$,
bei $\sqrt{(x+q)}\ldots$ $-p^2+3q^2-r^2-s^2-2pq+2pr+2ps-2qr-2qs+2rs$,
bei $\sqrt{(x+r)}\ldots$ $-p^2-q^2+3r^2-s^2+2pq-2pr+2ps-2qr-2qs-2rs$,
bei $\sqrt{(x+s)}\ldots$ $-p^2-q^2-r^2+3s^2+2pq+2pr-2ps+2qr-2qs-2rs$,

welche wirklich die Summe 0 geben.

Aufser dem gefundenen endlichen Werthe von x hat aber diese Unbekannte eigentlich noch drei Werthe, welche sich ergeben, wenn wir in der Gleichung (β.), nach der Analogie mit §. 10., die Glieder mit dem Coefficienten 0 nicht vernachlässigen; und jeder dieser drei Werthe ist $=\infty$. Denn setzen wir $x=\frac{1}{z}$, so entstehet aus der Gleichung (β.) die folgende

$$\mathfrak{Z}z^4-\mathfrak{N}z^3+0z^2+0=0,$$

wonach z aufser dem Werthe $\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{Z}}$ auch drei andere Werthe, jeden $=0$, hat; aus jedem dieser Werthe entspringt aber $x=\infty$. Wirklich siehet man leicht, wie die irrationale Gleichung (α.) durch die Annahme $x=\infty$ gelöset wird, wenn man nur zwei der darin enthaltenen Quadratwurzeln als positive, die beiden andern als negative Zahlen betrachtet. Dafs aber der Ausdruck ∞ ein dreifacher Werth von x ist, erklärt sich aus Folgendem. Bezeichnet man die unendlich grofsen, dabei aber einander gleich zu achtenden, positiven Werthe, welche die vier Quadratwurzeln in (α.)

$$\sqrt{(x+p)},\quad \sqrt{(x+q)},\quad \sqrt{(x+r)},\quad \sqrt{(x+s)}$$

erhalten, wenn man $x=\infty$ setzt, nach der Reihe mit

$$U_p,\quad U_q,\quad U_r,\quad U_s,$$

so finden folgende drei Gleichungen Statt:

$$U_p + U_q - U_r - U_s = 0,$$
$$U_p - U_q + U_r - U_s = 0,$$
$$U_p - U_q - U_r + U_s = 0.$$

Mehr als diese drei unter (α.) begriffenen, unter einander aber wesentlich verschiedenen Gleichungen können aber durch die Annahme $x = \infty$ nicht Statt finden, und jeder dieser drei Gleichungen entspricht einer der drei unendlich grofsen Werthe von x.

Setzen wir, um auch ein Paar Beispiele in bestimmten Zahlen zu betrachten,

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = 3, \quad s = 5,$$

so findet sich der endliche Werth

$$r = \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{N}} = -\frac{71}{120},$$

sodann

$$\sqrt{(x+p)} = \frac{7}{\sqrt{120}}, \quad \sqrt{(x+q)} = \frac{13}{\sqrt{120}}, \quad \sqrt{(x+r)} = \frac{17}{\sqrt{120}}, \quad \sqrt{(x+s)} = \frac{23}{\sqrt{120}},$$

und es ist wirklich

$$\frac{7}{\sqrt{120}} - \frac{13}{\sqrt{120}} - \frac{17}{\sqrt{120}} + \frac{23}{\sqrt{120}} = 0.$$

Nehmen wir aber

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = 3, \quad s = 4,$$

so erhalten wir $\mathfrak{N} = 0$, aber keineswegs $\mathfrak{Z} = 0$, und daher ist auch derjenige Werth von x, der im Allgemeinen ein endlicher ist, in diesem Falle unendlich grofs, so dafs erhellet: die Gleichung

$$\sqrt{(x+1)} + \sqrt{(x+2)} + \sqrt{(x+3)} + \sqrt{(x+4)} = 0$$

sei nicht durch einen endlichen Werth von x auflösbar.

15.

Handelt es sich darum, die Gleichung

$$\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C} + \sqrt{D} + \sqrt{E} = 0$$

rational zu machen, so wird das aus a, b, c, d, e zu bildende Hülfsproduct ein Ausdruck vom 16ten, die rationale Gleichung zwischen A, B, C, D, E aber vom 8ten Grade sein. Bei 6 Quadratwurzeln in der rational zu machenden Gleichung würde das Hülfsproduct vom 32sten, die rationale Gleichung zwischen A, B, C, D, E, F aber vom 16ten Grade sein.

Die wirkliche Berechnung dieser Gleichungen würde, ohne weitere Hülfsmittel als die bisher benutzten, eine überaus beschwerliche Arbeit

sein. Wir unterlassen daher dieselbe, und wollen nur noch eine Betrachtung über die Gleichung hieher setzen, welche aus der rationalen Gleichung für

$$\sqrt{A}+\sqrt{B}+\sqrt{C}+\sqrt{D}+\sqrt{E}+\sqrt{F}=0$$

in dem Falle entspringen würde, wenn gesetzt würde:

$$A=x+p,\ B=x+q,\ C=x+r,\ D=x+s,\ E=x+t,\ F=x+u.$$

Die rationale Gleichung mit den 6 Buchstaben A, B, ... F wird hier dieselbe Eigenschaft haben, wie die in §. 13. abgeleitete rationale Gleichung für die Buchstaben A, B, C, D, nämlich die Eigenschaft, dafs alle Coefficienten der Glieder des links stehenden Ausdrucks die Summe 0 geben. Dieses wird eine nothwendige Folge des Umstandes sein, dafs unter den 32 Factoren, aus denen das für die 6 Buchstaben a, b, c, ... f zu bildende Hülfsproduct entstehet, auch solche vorkommen, die, wenn jeder Buchstabe $=1$ gesetzt wird, den Werth 0 erhalten, wie z. B. der Factor $a+b+c-d-e-f$.

Aus dieser Eigenschaft des die 6 Buchstaben A, B, ... F enthaltenden Ausdrucks vom 16ten Grade folgt aber, wie man leicht erkennt, dafs, wenn man für diese 6 Buchstaben die Werthe

$$x+p,\quad x+q,\quad x+r,\quad x+s,\quad x+t,\quad x+u$$

setzt, der Coefficient des höchsten Gliedes, mit x^{16}, sich auf 0 reduciren wird. Nach der Analogie von dem in §. 14. Gefundenen dürfen wir aber selbst vermuthen, dafs ein Gleiches auch noch bei den Coefficienten vieler niedrigerer Glieder Statt finden mufs. Bezeichnen wir nämlich die Werthe, welche aus den 6 Quadratwurzeln

$$\sqrt{(x+p)},\quad \sqrt{(x+q)},\quad \sqrt{(x+r)},\quad \sqrt{(x+s)},\quad \sqrt{(x+t)},\quad \sqrt{(x+u)}$$

unter der Annahme $x=\infty$ hervorgehen, mit

$$U_p,\quad U_q,\quad U_r,\quad U_s,\quad U_t,\quad U_u,$$

so sind diese, weil in der That z. B. das Verhältnifs von $\sqrt{(x+p)}$ zu $\sqrt{(x+q)}$ dem Verhältnisse der Gleichheit desto näher kommt, je gröfser x wird, alle unter einander gleich grofs zu achten, und folgende $\frac{5.4}{2}=10$ Gleichungen, welche aus der zu Grunde liegenden irrationalen Gleichung hervorgehen, sind richtig:

$$\begin{aligned}
U_p+U_q+U_r-U_s-U_t-U_u &= 0,\\
U_p+U_q-U_r+U_s-U_t-U_u &= 0,\\
U_p+U_q-U_r-U_s+U_t-U_u &= 0,\\
U_p+U_q-U_r-U_s-U_t+U_u &= 0,\\
U_p-U_q+U_r+U_s-U_t-U_u &= 0,\\
U_p-U_q+U_r-U_s+U_t-U_u &= 0,\\
U_p-U_q+U_r-U_s-U_t+U_u &= 0,\\
U_p-U_q-U_r+U_s+U_t-U_u &= 0,\\
U_p-U_q-U_r+U_s-U_t+U_u &= 0,\\
U_p-U_q-U_r-U_s+U_t+U_u &= 0.
\end{aligned}$$

Mehr als diese 10 wesentlich verschiedenen Gleichungen, welche sich unter der Annahme $x=0$ als richtig ergeben, können aber auf diese Weise aus der zu Grunde liegenden irrationalen Gleichung nicht hergeleitet werden. Es ist also zu vermuthen, dafs in der rationalen Gleichung, welche aus der irrationalen

$$\sqrt{(x+p)}+\sqrt{(x+q)}+\sqrt{(x+r)}+\sqrt{(x+s)}+\sqrt{(x+t)}+\sqrt{(x+u)}=0$$

entspringt, die Werthe der Coefficienten der 10 ersten Glieder, nämlich der mit x^{16}, x^{15}, ... x^7, sich auf 0 reduciren werden, und dafs dieselbe nur zu 6 endlichen Werthen von x führen wird.

16.

Es sei nun die Gleichung

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}+\sqrt[3]{C}=0$$

rational zu machen. Das Hülfsproduct wird hier aus den 9 Ausdrücken

$$\begin{array}{lll}
a+b+c & a+b_1+c & a+b_2+c\\
a+b+c_1 & a+b_1+c_1 & a+b_2+c_1\\
a+b+c_2 & a+b_1+c_2 & a+b_2+c_2
\end{array}$$

zu bilden sein, wenn man setzt:

$$\begin{aligned}
b_1 &= b.(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i) & \qquad c_1 &= c.(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)\\
b_2 &= b.(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i) & \qquad c_2 &= c.(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i).
\end{aligned}$$

Zu seiner bequemeren Berechnung benutzen wir die Bemerkung von §. 8. Da nach §. 4. aus den drei Binomien $a+b$, $a+b_1$, $a+b_2$ das Hülfsproduct a^3+b^3 entsteht, so erheben wir diesen Ausdruck zum Cubus, und haben auf diese Weise

$$a^9+3a^6b^3+3a^3b^6+b^9.$$

Hiernach ist zu schliefsen, das Hülfsproduct müsse sein

$$a^9+b^9+c$$
$$+3.(a^6b^3+a^6c^3+a^3b^6+a^3c^6+b^6c^3+b^3c^6)$$
$$+E.a^3b^3c^3,$$

worin nur noch der Coefficient E zu bestimmen bleibt.

Setzt man nun aber $a=b=c=1$, so gehet $a+b_1+c_2$ in 0 über, und Gleiches ist mit $a+b_2+c_1$ der Fall. Unter dieser Annahme mufs also auch das Hülfsproduct $=0$ sein, woraus folgt $E=-21$. Setzt man nun endlich A, B, C, statt a^3, b^3, c^3, so hat man die rationale Gleichung

$$A^3+B^3+C^3+3.(A^2B+A^2C+AB^2+AC^2+B^2C+BC^2)-21ABC=0.$$

Wir wollen dies Resultat, um auch ein Beispiel in bestimmten Zahlen zu geben, zum Rationalmachen der Gleichung

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x-7)}+\sqrt[3]{(-3x-3)}=0$$

anwenden. Hier finden wir zunächst die rationale Gleichung

$$80x^3-516x^2-867x-1000=0$$

oder

$$(x-8).(80x^2+124x+125)=0,$$

woher entweder $x=8$, oder $x=-\frac{1}{40}.(31\pm\sqrt{1539}.i)$.

Die Richtigkeit des Werthes $x=8$ erkennt man sogleich. Bei der Prüfung der imaginairen Werthe findet man für $\sqrt[3]{x}$ die drei, oder vielmehr sechs verschiedenen Werthe:

$$(\sqrt[3]{x})_1=+0{,}79074\pm0{,}73154.i,$$
$$(\sqrt[3]{x})_2=-1{,}02888\pm0{,}31904.i,$$
$$(\sqrt[3]{x})_3=+0{,}23814\mp1{,}05056.i.$$

Dann ist

$$(\sqrt[3]{(x-7)})_1=+1{,}06420\pm1{,}67715.i,$$
$$(\sqrt[3]{(x-7)})_2=-1{,}98455\pm0{,}08305.i,$$
$$(\sqrt[3]{(x-7)})_3=+0{,}92035\mp1{,}76020.i.$$

Endlich

$$(\sqrt[3]{(-3x-3)})_1=+0{,}10854\pm1{,}44116.i,$$
$$(\sqrt[3]{(-3x-3)})_2=-1{,}30235\mp0{,}62658.i,$$
$$(\sqrt[3]{(-3x-3)})_3=+1{,}19381\pm0{,}81458.i,$$

durch welche Werthe folgende drei Gleichungen richtig werden:

$$(\sqrt[3]{x})_1+(\sqrt[3]{(x-7)})_2+(\sqrt[3]{(-3x-3)})_3=0,$$
$$(\sqrt[3]{x})_2+(\sqrt[3]{(x-7)})_3+(\sqrt[3]{(-3x-3)})_1=0,$$
$$(\sqrt[3]{x})_3+(\sqrt[3]{(x-7)})_1+(\sqrt[3]{(-3x-3)})_2=0.$$

17.

Interessant ist noch die Betrachtung des besonderen Falles, wo die Gleichung (α.) $\sqrt[3]{(x+p)}+\sqrt[3]{(x+q)}+\sqrt[3]{(x+r)}=0$ rational zu machen ist. Man erhält hier als Resultat eine cubische Gleichung in welcher die Coefficienten von x^3 und x^2 beide den Werth 0 haben, nämlich die Gleichung

(β.) $0x^3+0x^2+9.(p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr)x+(p+q+r)^3-27pqr=0.$

Diese Gleichung wird zunächst gelöset, wenn wir für x den durch die Gleichung

$$x=-\frac{(p+q+r)^3-27pqr}{9.(p^2+q^2+r^2-pq-pr-qr)}$$

bestimmten endlichen Werth annehmen. Bei der Prüfung desselben findet man für jede der Wurzeln $\sqrt[3]{(x+p)}$, $\sqrt[3]{(x+q)}$, $\sqrt[3]{(x+r)}$ einen Bruch, dessen Nenner die Cubikwurzel des Nenners des so eben als Werth von x aufgestellten Bruches ist, während die Zähler sind:

$$\text{bei } \sqrt[3]{(x+p)}\ldots. = +2p-q-r,$$
$$\text{bei } \sqrt[3]{(x+q)}\ldots. = -p+2q-r,$$
$$\text{bei } \sqrt[3]{(x+r)}\ldots. = -p-q+2r;$$

woraus man die Richtigkeit der Auflösung erkennt.

Aufser dem angegebenen endlichen Werthe führt aber die Gleichung (β.) auch zu dem doppelten Werthe $x=\infty$. Wie dieser Doppelwerth der irrationalen Gleichung (α.) genügen könne, erklärt sich aus Folgendem. Man bezeichne die unendlich grofsen, unter einander als gleich anzusehenden positiven Werthe, welche aus den drei Wurzeln

$$\sqrt[2]{(x+p)},\quad \sqrt[3]{(x+q)},\quad \sqrt[3]{(x+r)}$$

unter der Annahme $x=\infty$ entstehen, nach der Reihe mit

$$U_p,\quad U_q,\quad U_r,$$

so hat $\sqrt[3]{(x+q)}$ auch die beiden imaginären Werthe

$$U_q.(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)\quad\text{und}\quad U_q.(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i),$$

und eben so $\sqrt[3]{(x+r)}$ die imaginären Werthe

$$U_r.(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)\quad\text{und}\quad U_r.(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i),$$

und man erkennt folgende zwei Gleichungen als richtig:

$$U_p+U_q.(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)+U_r.(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i),$$
$$U_p+U_q.(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)+U_r.(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i).$$

Mehr als diese zwei unter einander wesentlich verschiedenen Gleichungen, die durch die Annahme $x=\infty$ entstehen, können aber aus der irrationalen Gleichung (α.) nicht hergeleitet werden, wodurch sich der zweifache Werth $x=\infty$ rechtfertigt.

18.

Um die Gleichung

$$\sqrt[4]{A}+\sqrt[4]{B}+\sqrt[4]{C}=0$$

rational zu machen, mufs das Hülfsproduct aus den 16 Aggregaten

$a+b+c$	$a+b_1+c$	$a+b_2+c$	$a+b_3+c$
$a+b+c_1$	$a+b_1+c_1$	$a+b_2+c_1$	$a+b_3+c_1$
$a+b+c_2$	$a+b_1+c_2$	$a+b_2+c_2$	$a+b_3+c_2$
$a+b+c_3$	$a+b_1+c_3$	$a+b_2+c_3$	$a+b_3+c_3$

gebildet werden, in welchen

$$b_1=b.i,\quad b_2=-b,\quad b_3=-b.i,$$
$$c_1=c.i,\quad c_2=-c,\quad c_3=-c.i.$$

Nach §. 4. ist das aus den 4 Binomien $a+b$, $a+b_1$, $a+b_2$, $a+b_3$ entstehende Hülfsproduct $=a^4-b^4$. Erheben wir dasselbe zur 4ten Potenz, fügen dann diejenigen Glieder hinzu, welche den darin enthaltenen analog sind und c in sich haben, so wie zuletzt noch die aufserdem einzig und allein noch möglichen Glieder von der Form $a^8 b^4 c^4$, mit einem unbestimmten Coefficienten, so erhalten wir als Hülfsproduct den Ausdruck

$$\begin{aligned}&a^{16}+b^{16}+c^{16}\\&-4.(a^{12}b^4+a^{12}c^4+a^4b^{12}+a^4c^{12}+b^{12}c^4+b^4c^{12})\\&+6.(a^8b^8+a^8c^8+b^8c^8)\\&+E.(a^8b^4c^4+a^4b^8c^4+a^4b^4c^8).\end{aligned}$$

Den Coefficienten E zu bestimmen, setzen wir $a=b=c=1$. Hier finden wir für die 16 Hülfs-Aggregate die Werthe

3	$2+i$	1	$2-i$
$2+i$	$1+2i$	i	1
1	i	-1	$-i$
$2-i$	1	$-i$	$1-2i$.

Das Product hieraus ist $=-375$. Für das oben entwickelte Product bekommt man aber, bei derselben Annahme, den Werth $-3+3E$. Man hat also $3E-3=-375$ und daher $E=-124$. Hieraus ergiebt sich endlich die rationale Gleichung

$$\begin{aligned}&A^4+B^4+C^4\\&-4(A^3B+A^3C+AB^3+AC^3+B^3C+BC^3)\\&+6(A^2B^2+A^2C^2+B^2C^2)\\&-124(A^2BC+AB^2C+ABC^2)=0.\end{aligned}$$

19.

Wenden wir dies zum Rationalmachen der Gleichung

$$\sqrt[4]{(x+p)}+\sqrt[4]{(x+q)}+\sqrt[4]{(x+r)}=0$$

an, so erhalten wir die Gleichung des vierten Grades

$$\mathfrak{M}x^4+\mathfrak{N}x^3+\mathfrak{P}x^2+\mathfrak{Q}x+\mathfrak{R}=0,$$

worin

$$\mathfrak{M}=375,$$
$$\mathfrak{N}=500.(p+q+r),$$
$$\mathfrak{P}=130.(p^2+q^2+r^2)+620(pq+pr+qr),$$
$$\mathfrak{Q}=4(p^3+q^3+r^3)+124(p^2(q+r)+q^2(p+r)+r^2(p+q))+498pqr,$$
$$\mathfrak{R}=-p^4-q^4-r^4+4(p^3(q+r)+q^3(p+r)+r^3(p+q))$$
$$-b(p^2q^2+p^2r^2+q^2r^2)+124pqr(p+q+r).$$

Das Zahlenbeispiel

$$\sqrt[4]{(x+80)}+\sqrt[4]{(x+15)}+\sqrt[4]{x}=0$$

führt zu der Gleichung

$$3x^4+380x^3+12842x^2+129580x-142805=0$$

oder

$$(x-1).(3x^3+383x^2+13225x+142805)=0.$$

Diese Gleichung giebt für x erstens die zwei reellen Werthe 1 und $-80{,}000524$. Die Richtigkeit des Werthes 1 erkennt man leicht. Aus dem andern Werthe entstehet aber

$$\sqrt[4]{(x+80)}=\pm 0{,}1513.(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i) \text{ oder } =\pm 0{,}1513.(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i),$$
$$\sqrt[4]{(x+15)}=\pm 2{,}8394.(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i) \text{ oder } =\pm 2{,}8394.(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i),$$
$$\sqrt[4]{x}=\pm 2{,}9907.(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i) \text{ oder } =\pm 2{,}9907.(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,i),$$

und man siehet, wie auch aus diesen Wurzeln die Summe 0 entstehet.

Dann giebt zweitens die obige Gleichung noch für x die beiden imaginären Werthe

$$-23{,}83307\pm 5{,}19631\,i.$$

Macht man mit diesen die Probe, so findet man

$$(\sqrt[4]{(x+80)})_1=+2{,}73979\pm 0{,}06320\,i,$$
$$(\sqrt[4]{(x+80)})_2=-0{,}06320\pm 2{,}73979\,i,$$
$$(\sqrt[4]{(x+80)})_3=-2{,}73979\mp 0{,}06320\,i,$$
$$(\sqrt[4]{(x+80)})_4=+0{,}06320\mp 2{,}73979\,i,$$

Dann

$$(\sqrt[4]{(x+15)})_1=+1{,}42170\pm 1{,}08631\,i,$$
$$(\sqrt[4]{(x+15)})_2=-1{,}08631\pm 1{,}42170\,i,$$
$$(\sqrt[4]{(x+15)})_3=-1{,}42170\mp 1{,}08631\,i,$$
$$(\sqrt[4]{(x+15)})_4=+0{,}08631\mp 1{,}42170\,i.$$

Endlich

$$(\sqrt[4]{x})_1 = +1{,}65348 \pm 1{,}48489\,i,$$
$$(\sqrt[4]{x})_2 = -1{,}48489 \pm 1{,}65348\,i,$$
$$(\sqrt[4]{x})_3 = -1{,}65348 \mp 1{,}48489\,i,$$
$$(\sqrt[4]{x})_4 = +1{,}48489 \mp 1{,}65348\,i.$$

Hieraus erkennt man nun die Richtigkeit folgender Gleichungen:

$$(\sqrt[4]{(x+80)})_1 + (\sqrt[4]{(x+15)})_2 + (\sqrt[4]{x})_3 = 0,$$
$$(\sqrt[4]{(x+80)})_2 + (\sqrt[4]{(x+15)})_3 + (\sqrt[4]{x})_4 = 0,$$
$$(\sqrt[4]{(x+80)})_3 + (\sqrt[4]{(x+15)})_4 + (\sqrt[4]{x})_1 = 0,$$
$$(\sqrt[4]{(x+80)})_4 + (\sqrt[4]{(x+15)})_1 + (\sqrt[4]{x})_2 = 0.$$

20.

Die in den §§. 10., 14., 15. und 17. betrachteten Fälle, wo unter der Annahme $A = x+p$, $B = x+q$, $C = x+r$ u. s. w. Gleichungen hervorgingen, die mit Gliedern, deren Coefficienten $= 0$ waren, begannen, und die daher Auflösungen durch die Annahme $x = \infty$ zuliefsen, stellen nur besondre Fälle eines allgemeinen Satzes dar, nach welchem, unter der Annahme $A = x+p$ u. s. w. ein solches Resultat jedesmal eintritt, sobald die Werthe von n und m nicht relative Primzahlen sind.

Als Beispiele hiefür können noch die Gleichungen dienen:

$\sqrt[4]{(x+p)} + \sqrt[4]{(x+q)} = 0$ (wo $n=4$, $m=2$),
$\sqrt[6]{(x+p)} + \sqrt[6]{(x+q)} = 0$ (wo $n=6$, $m=2$),
$\sqrt[6]{(x+p)} + \sqrt[6]{(x+q)} + \sqrt[6]{(x+r)} = 0$ (wo $n=6$, $m=3$).

In diesem letzten Beispiele erhellet die Richtigkeit des Satzes daraus, dafs das Hülfs-Aggregat

$$a + b_2 + c_4,$$

worin

$$b_2 = b.(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i), \qquad c_4 = c.(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$$

zu setzen ist, den Werth 0 erhält, sobald man $a = b = c = 1$ nimmt; womit auch die Eigenschaft der Gleichung

$$\sqrt[6]{(x+p)} + \sqrt[6]{(x+q)} + \sqrt[6]{(x+r)} = 0$$

zusammenhängt, durch die Annahme $x = \infty$ gelöset zu werden, sobald man, unter U den reellen positiven Werth gedacht, den jede jener drei Wurzeln des 6ten Grades unter der Annahme $x = \infty$ erhält,

dem Gliede $\sqrt[6]{(x+p)}$ den Werth U,
dem Gliede $\sqrt[6]{(x+q)}$ den Werth $U.(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$,
dem Gliede $\sqrt[6]{(x+r)}$ den Werth $U.(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$

beilegt.

21.

Bisher wurde nur das Rationalmachen derjenigen Gleichungen betrachtet, in denen alle Wurzeln von demselben Grade sind. Wenn aber die Gleichungen Wurzeln verschiedener Exponenten enthalten, so kann man diese Wurzeln so verwandeln, dafs sie alle das gemeinschaftliche kleinste Vielfache dieser Exponenten zum Exponenten erhalten, und nun die frühere Methode anwenden.

Wir wollen nur den Fall betrachten, wo die Gleichung

$$\sqrt[m]{A} + \sqrt[n]{B} = 0$$

rational gemacht werden soll, in welcher m und n relative Primzahlen bedeuten sollen. Diese gehet über in

$$\sqrt[mn]{A^n} + \sqrt[mn]{B^m} = 0,$$

und hieraus entstehet (vergl. §. 4.) die rationale Gleichung

$$A^n \pm B^m = 0,$$

wo + oder — gilt, je nachdem mn ungerade oder gerade ist. Dasselbe Resultat findet man auch beim gewöhnlichen Verfahren. Man wird zu demselben aber auch durch Bildung eines Hülfsproducts aus den mn Binomien

$a + b$	$a_1 + b$	u. s. w. bis	$a_{m-1} + b$
$a + b_1$	$a_1 + b_1$		$a_{m-1} + b_1$
$a + b_2$	$a_1 + b_2$		$a_{m-1} + b_2$
. . . .	. . . .		. . . . .
$a + b_{n-1}$	$a_1 + b_{n-1}$		$a_{m-1} + b_{n-1}$

geführt, wenn man hier setzt:

$$a_k = a.\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + \sin\frac{2k\pi}{m}.i\right), \qquad b_k = b.\left(\cos\frac{2k\pi}{n} + \sin\frac{2k\pi}{n}.i\right).$$

Dieses Product ist nämlich $= a^{mn} \pm b^{mn}$, wo + und — wie oben von der Zahl mn abhängig ist. Setzt man nun $a^m = A$, $b^n = B$, so bekommt man die rationale Gleichung $A^n \pm B^m = 0$.

Übrigens läfst sich dem obigen Verfahren auch der (zum Theil schon in §. 5. betrachtete) Fall unterordnen, wo in der rational zu machenden Gleichung ein Glied ohne Wurzelzeichen, etwa $\mathfrak{A}$, vorkommt; denn soll z. B. die Gleichung

$$\mathfrak{A} + \sqrt[m]{B} + \sqrt[n]{C} = 0,$$

wo m und n relative Primzahlen sind, rational gemacht werden, so kann man statt derselben die Form

$$\sqrt[mn]{\mathfrak{A}^{mn}} + \sqrt[mn]{B^n} + \sqrt[mn]{C^m} = 0$$

behandeln.

Die bisher zu sehr vernachläfsigte Theorie des Rationalmachens algebraischer Gleichungen, deren Grundzüge ich hier zu geben versuchte, erlaubt ohne Zweifel noch weiter und tiefer greifende Untersuchungen, und ich würde mich sehr freuen, wenn ich durch Vorliegendes Veranlassung zu solchen Untersuchungen von Seiten Andrer gegeben hätte. Ich erlaube mir aber hier noch einige Nebenbetrachtungen.

I. Mit der hier gegebenen Theorie hängt eine andere, betreffend die Umwandlung von Brüchen, deren Nenner Polynomien aus Wurzelausdrücken sind, in solche, deren Nenner rational sind, innig zusammen. Dies zeige nur folgendes Beispiel. Um den Bruch

$$\frac{1}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}}$$

zu verwandeln, hat man denselben im Zähler und im Nenner mit einem Hülfsausdrucke zu multipliciren, der das Product der Ausdrücke

$$\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}.(-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i) \quad \text{und} \quad \sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}.(-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}.i)$$

ist. Man erhält dadurch

$$\frac{1}{\sqrt[3]{A}+\sqrt[3]{B}} = \frac{\sqrt[3]{A^2}-\sqrt[3]{(AB)}+\sqrt[3]{B^2}}{A+B}.$$

II. Die vorliegende Theorie kann auch dienen, Gleichungen abzuleiten, welche den Zusammenhang zwischen den Sinus einer Anzahl von Winkeln ausdrücken, deren Summe ein Vielfaches von $180°$ ist.

Es seien z. B. drei Winkel α, β, γ, der Bedingung unterworfen, dafs

$$\alpha+\beta+\gamma = k.180°,$$

wo k irgend eine ganze Zahl ist, so hat man

$$\sin\alpha = \pm\sin(\beta+\gamma),$$

wo das Vorzeichen von der Natur der Zahl k abhängt. Diese Gleichung giebt

$$\sin\alpha \pm \sin\beta.\sqrt{(1-\sin\gamma^2)} \pm \sin\gamma.\sqrt{(1-\sin\beta^2)} = 0,$$

welche rational wird, wenn man in der Gleichung von §. 11., nämlich

$$A^2+B^2+C^2-2AB-2AC-2BC = 0$$

setzt:

$$\begin{aligned} A &= \sin\alpha^2, \\ B &= \sin\beta^2.(1-\sin\gamma^2), \\ C &= \sin\gamma^2.(1-\sin\beta^2). \end{aligned}$$

Es gehet aber hierdurch die rationale Endgleichung hervor:

$$\left.\begin{aligned} &\sin A^4+\sin B^4+\sin C^4 \\ &-2\sin A^2\sin B^2-2\sin A^2\sin C^2-2\sin B^2\sin C^2 \\ &+4\sin A^2\sin B^2\sin C^2 \end{aligned}\right\} = 0,$$

oder auch

$$4\sin A^2\sin B^2\sin C^2 = (\sin A+\sin B+\sin C).(-\sin A+\sin B+\sin C)$$
$$\times(\sin A-\sin B+\sin C).(\sin A+\sin B-\sin C).$$

Diese letzte Gleichung erhält man auch aus der bekannten Gleichung, welche den Inhalt eines Dreiecks aus seinen drei Seiten ausdrückt, wenn man unter A, B, C die Winkel des Dreiecks versteht, und die Gleichungen benutzt

$$a = D\sin A,\quad b = D\sin B,\quad c = D\sin C,\quad 2DF = abc,$$

wo a, b, c die Seiten des Dreiecks, D den Durchmesser des umschriebenen Kreises, F den Inhalt bezeichnet.

III. In den obigen Untersuchungen ist ein Satz angewandt worden, der allgemein so ausgesprochen werden kann: eine Gleichung des $n$ten Grades

$$C_n x^n + C_{n-1}x^{n-1} + \ldots + C_{n-k+1}x^{n-k+1} + C_{n-k}x^{n-k} + \ldots + C_1 x + C_0 = 0,$$

worin alle Coefficienten der k höchsten Glieder, nämlich alle von C_n bis C_{n-k+1}, den Werth 0 haben, läfst eine Auflösung durch die $k$fache Wurzel $x = \infty$ zu, und hat aufserdem noch $n-k$ endliche Werthe. An dem im §. 14. betrachteten Beispiele sieht man, wie dieser Satz durch die Substitution $x = \frac{1}{z}$ bewiesen werden kann. Man könnte aber denselben leicht für wenig erheblich halten, so dafs folgende Betrachtung eines Falles, worin dieser Satz sich zu einer einfachen Ableitung benutzen läfst, nicht ohne Interesse sein dürfte.

Eine Hyperbel sei für Parallel-Coordinaten (rechtwinklige oder schiefwinklige) durch die Gleichung gegeben:

$$My^2 - Nx^2 = -Z,$$

eine gerade Linie aber, auf dieselben Coordinatenaxen bezogen, durch die Gleichung

$$y = hx + g,$$

so werden die Abscissen der Schnittpuncte beider Linien durch die Gleichung bestimmt:

$$(Mh^2 - N)x^2 + 2Mhgx + Z + Mg^2 = 0.$$

Wird nun angenommen

$$g = 0$$

und $\quad Mh^2 - N = 0,\quad$ wonach $\quad h = \pm\sqrt{\frac{N}{M}},$

so hat man eine quadratische Gleichung von der Form

$$0x^2 + 0x + Z = 0,$$

aus welcher für die Abscissen der beiden Schnittpuncte sich unendlich grofse Werthe finden. Dies führt offenbar zu den Asymptoten der Hyperbel. Die Gleichungen der Asymptoten sind daher

$$y = \sqrt{\frac{N}{M}}x \quad \text{und} \quad y = -\sqrt{\frac{N}{M}}x.$$

Eine Ausnahme bildet nur der Fall, wo $Z = 0$; hier geht die quadratische Gleichung über in

$$0x^2 + 0x + 0 = 0;$$

sie läfst also x ganz unbestimmt. Hier ist aber die Hyperbel ein System zweier geraden Linien geworden, und fällt mit ihren Asymptoten zusammen.

Man vergleiche auch in Hinsicht des oben angegebenen Satzes die Aufsätze im dritten Bande dieses Journals, S. 347—353, und zwar besonders S. 352.

Im November 1832.

18.
Summenrechnung der durch einfache Functionen erzeugten Reihen.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

(Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI., No. 24. Band XII., und No. 22., 23. und 24. Band XIII.)

A.

§. 72.

Die bisherigen Untersuchungen über Aufstufungen und Unterschiede einfacher und zusammengesetzter Functionen sind als Vorbereitungen zur Aufsuchung weiterer Resultate zu betrachten und erhalten daher ihre weitere Bedeutung in der Eigenschaft: Anwendungen aus sich ziehen zu lassen, die wir auf anderem Wege des Calculs entweder gar nicht oder nicht so zweckmäfsig gewinnen können. Besonders zweckmäfsig lassen sie sich zur Summirung solcher Reihen gebrauchen, die durch Functionen, deren Aufstufungen und Unterschiede leicht gebildet werden können, erzeugt werden.

Wir versuchen es nun, die Summen der durch die Analysis bekannten Functionen nach den bisherigen Vorbereitungen aufzusuchen, und sie in einem Zusammenhange darzustellen, und wünschen, dafs diese Arbeit als ein Versuch, diesen Zweig der Wissenschaft zu bearbeiten betrachtet und günstig aufgenommen werden möge.

Wir beschäftigen uns zu dem Ende zuerst mit der Summirung der durch einfache Functionen erzeugten Reihen; dann mit der Summirung derer, die durch zusammengesetzte erzeugt werden.

Bei allen Summenreihen lassen sich leicht zwei Fälle unterscheiden. Es sind nämlich die Glieder der Reihen mit einerlei (positiven), oder abwechselnden (positiven oder negativen) Zeichen versehen. Beide Arten sollen im Folgenden betrachtet werden. Zu der Darstellung der Summen der durch einfachen Functionen erzeugten Reihen wenden wir uns zuerst.

§. 73.

Die Gleichungen, die wir in §. 4. bei der Darstellung der negativen Aufstufungen aus $(n+1)$ Gliedern der Grundreihe, und §. 25. für die der negativen Unterschiede aus gleicher Glieder-Anzahl gefunden haben, sind, wie man sich leicht überzeugt, von der Beschaffenheit, dafs sie Summenreihen bilden, die durch einfache Functionen erzeugt werden, nach einem bestimmten Gesetze fallen oder steigen, und zwar so, dafs die negativen Aufstufungen Summenreihen mit abwechselnden Zeichen, die negativen Unterschiede Summenreihen mit einerlei Zeichen bilden. Die Richtigkeit dieser Behauptung verdeutlicht sich sehr dadurch, dafs wir die erste negative Aufstufung und den ersten negativen Unterschied, wie sie aus $(n+1)$ Gliedern der Grundreihe gebildet werden, in folgender Anordnung betrachten. Die Gleichung (18.) giebt folgende Darstellung:

$$X_{-1}-X_{-2}+X_{-3}-X_{-4}+\ldots.(-)^n X_{-n-1} = \zeta^{-1}X_0(-)^n\zeta^{-1}X_{-n-1},$$

die Gleichung (123.) folgende:

$$X_{-1}+X_{-2}+X_{-3}+X_{-4}+\ldots.+X_{-n-1} = \Delta^{-1}X_0-\Delta^{-1}X_{-n-1}.$$

Die Ausdrücke auf der linken Seite in den beiden Gleichungen erscheinen als Glieder einer Summenreihe, die einem bestimmten Gesetze unterliegen. Die auf der rechten Seite sind die Summen-Ausdrücke, die ihnen zugehören. Nimmt man nun für X irgend eine Function an, so wird man nach Maafsgabe der vorstehenden Gleichungen die veränderliche Gröfse in ihr abnehmen lassen und von der Function X_1 und X_{-n-1} die ersten negativen Aufstufungen, oder die ersten negativen Unterschiede suchen und sie nach der Vorschrift der Zeichen verbinden müssen, um die Summen-Ausdrücke der Reihen, die mit abwechselnden oder mit einerlei Zeichen verbunden sind, darstellen zu können.

Nach diesen Bemerkungen fällt also die Zusammenrechnung der Functionen mit der Darstellung der negativen Aufstufungen und der negativen Unterschiede zusammen; denn letztere bedingen die Summen-Ausdrücke summirbarer Reihen.

Wir beschränken uns aber nicht auf die zwei vorliegenden speciellen Fälle, sondern gehen von den allgemeinern Gleichungen (25.) und (125.) aus, und beginnen mit den negativen Unterschieden, weil diese auf die Summirung solcher Reihen führen, deren Glieder mit einerlei Zeichen verbunden sind. Aus (126.) entnehmen wir:

$$345.\quad X_{-r}+\frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{-r-1}+\frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{-r-2}+\ldots\ldots+\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{-n-r}$$
$$=\Delta^{-r}X_0-\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}\Delta^{-1}X_{-n-r}-\frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}}\Delta^{-2}X_{-n-r+1}-\ldots.$$
$$\ldots.-\frac{n+1}{1}\Delta^{-r+1}X_{-n-2}-\Delta^{-r}X_{-n-1};$$

aus (25.) Folgendes:

$$346.\quad X_{-r}-\frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{-r-1}-\frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{-r-2}+\ldots\ldots(-)^n\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{-n-r}$$
$$=\zeta^{-r}X_0(-)^r\left[\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}\zeta^{-1}X_{-n-r}+\frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}}\zeta^{-2}X_{-n-r+1}+\ldots.\right.$$
$$\left.\ldots.+\frac{n+1}{1}\zeta^{-r+1}X_{-n-2}+\zeta^{-r}X_{-n-1}\right].$$

Man erkennt leicht die Übereinstimmung und Verschiedenheit in den Grundzügen der Bildungsweise der vorliegenden Gleichungen. Vorzahlen und Stellenzahlen sind vollkommen dieselben; Zeichen und Geschäfte, die mit den Functionen vorgenommen werden sollen, sind verschieden.

Von den Gliedern der Summenreihe hängt die Gestalt der summirbaren Reihe ab. Nur diejenigen Reihen, welche dem angegebenen Grundgesetze unterliegen, sind nach diesen Gleichungen summirbar. Dies ist schon längst als Kennzeichen summirbarer Reihen anerkannt.

Die Reihen sind aber in der vorliegenden Form nicht brauchbar. Um sie brauchbar zu machen, erhöhen wir die Stellenzahlen aller Glieder dieser Gleichungen um $n+r$, und erhalten aus (345.)

$$347.\quad X_n+\frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{n-1}+\frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_{r-2}+\ldots\ldots+\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_0$$
$$=\Delta^{-r}X_{n+r}-\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}\Delta^{-1}X_0-\frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}}\Delta^{-2}X_1-\ldots.$$
$$\ldots.-\frac{n+1}{1}\Delta^{-r+1}X_{r-2}-\Delta^{-r}X_{r-1},$$

Bei der Gleichung (346.) ist jedoch zu berücksichtigen, dafs sich die Form des Summen-Ausdruckes ändert, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist. Ist n eine gerade Zahl, so ist $(-)^r=+$ und es erscheinen alle Glieder im Summen-Ausdrucke mit dem positiven Zeichen. Ist n eine ungerade Zahl, so wird $(-)^n=-$, und es erscheinen alle in Klammern eingeschlossenen Glieder des Summen-Ausdruckes negativ. Hiernach erhalten wir zwei verschiedene Darstellungen. Für ein gerades n, oder eine ungerade Gliederanzahl:

$$348.\quad X_n - \frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_{n-1} + \frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_{n-2} - \ldots\ldots + \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_0$$
$$= \zeta^{-r} X_{n+r} + \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} \zeta^{-1} X_0 + \frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}} \zeta^{-2} X_1 + \ldots + \zeta^{-r} X_{r-1},$$

und für ein ungerades n oder eine gerade Glieder-Anzahl:

$$349.\quad X_n - \frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_{n-1} + \frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_{n-2} + \ldots\ldots - \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_0$$
$$= \zeta^{-r} X_{n+r} - \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} \zeta^{-1} X_0 - \frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}} - \ldots, - \zeta^{-r} X_{r-1}.$$

Zur bequemeren Benutzung dieser allgemeinen Gleichungen geben wir hier eine Zusammenstellung einiger aus ihnen entnommenen speciellen Fälle. Aus (347.) wird, wenn statt r allmälig die Werthe 1, 2, 3, ... eingeführt werden und mit dem mindesten Gliede X_0 der Summenreihe begonnen wird:

$$350.\quad \begin{cases} X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots\ldots + X_n = \Delta^{-1} X_{n+1} - \Delta^{-1} X_0, \\ (n+1) X_0 + n . X_1 + (n-1) X_2 + \ldots + 2 X_{n-1} + X_n \\ \qquad = \Delta^{-2} X_{n+2} - \frac{n+1}{1} \Delta^{-1} X_0 - \Delta^{-2} X_1, \\ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_0 + \frac{n(n+1)}{1.2} + \ldots\ldots\ldots \frac{3.2}{1.2} X_{n-1} + X_n \\ \qquad = \Delta^{-3} X_{n+3} - \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \Delta^{-1} X_0 - \frac{n+1}{1} \Delta^{-2} X_1 - \Delta^{-3} X_2, \\ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} X_0 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} + \ldots\ldots\ldots \frac{4.3.2}{1.2.3} X_{n-1} + \frac{3.2.1}{1.2.3} X_n \\ = \Delta^{-4} X_{n+4} - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} \Delta^{-1} X_0 - \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \Delta^{-2} X_1 - \frac{n+1}{1} \Delta^{-2} X_2 - \Delta^{-3} X_3 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Aus (348.) erhalten wir folgende Fälle für ein gerades n:

$$351.\quad \begin{cases} X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \ldots\ldots\ldots + X_n = \zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0, \\ (n+1) X_0 - n X_1 + (n-1) X_2 - \ldots + X_n = \zeta^{-2} X_{n+2} + \frac{n+1}{1} \zeta^{-1} X_0 + \zeta^{-2} X_1, \\ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_0 - \frac{n(n+1)}{1.2} X_1 + \frac{(n-1)n}{1.2} X_2 - \ldots\ldots - \frac{3.2}{1.2} X_{n-1} + X_n \\ \qquad = \zeta^{-3} X_{n+3} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \zeta^{-1} X_0 + \frac{n+1}{1} \zeta^{-2} X_1 + \zeta^{-3} X_2, \\ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} X_0 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} X_1 + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} X_2 - \ldots\ldots - \frac{4.3.2}{1.2.3} X_{n-1} + X_n \\ = \zeta^{-4} X_{n-4} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} \zeta^{-1} X_0 + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \zeta^{-2} X_1 + \frac{n+1}{1} \zeta^{-3} X_2 + \zeta^{-4} X_3 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Um aus der allgemeinen Gleichung (349.) ähnliche Reihen abzuleiten, die mit dem mindesten Gliede X_0, als einem positiven, und mit X_n als höchsten enden, müssen die Zeichen der ganzen Gleichung in die entgegengesetzten verwandelt werden. Dadurch entstehen folgende Entwicklungen für ein ungerades n:

352.
$$\begin{cases} X_0 - X_1 + X_2 - X_3 + \ldots . - X_n = -\zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0, \\ (n+1)X_0 - nX_1 + (n-1)X_2 - \ldots . + 2X_{n-1} - X_n \\ \qquad = -\zeta^{-2} X^{n+2} + \frac{n+1}{1}\zeta^{-1} X_0 + \zeta^{-2} X_1, \\ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_0 - \frac{n(n+1)}{1.2} X_1 + \ldots . + \frac{3.2}{1.2} X_{n-1} - \frac{2.1}{1.2} X_n \\ = -\zeta^{-3} X_{n+3} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1} X_0 + \frac{n+1}{1}\zeta^{-2} X_1 + \zeta^{-3} X_2, \\ \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3} X_0 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} X_1 + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3} X_2 - \ldots . + \frac{4.3.2}{1.2.3} X^{n-1} - X_n \\ = -\zeta^{-4} X_{n+4} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\zeta^{-1} X_0 + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-2} X_1 + \frac{n+1}{1}\zeta^{-3} X_2 + \zeta^{-4} X_3 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die hier gegebenen Zusammenstellungen zeigen, dafs die auf sie gegründete Summirungsmethode abhängt von der Bestimmung der negativen Unterschiede und Aufstufungen der Functionen. Wie diese aufgefunden werden können, haben wir gezeigt. Die zu suchenden Summenausdrücke werden sich immer bestimmen lassen, wenn sich die negativen Unterschiede und Aufstufungen bilden lassen.

Zugleich geht aus der gefundenen Darstellung hervor, dafs die auf sie gegründete Summirungsmethode allgemein ist, und von allen Functionen ohne Unterschied gilt. Daher lassen sich durch sie, wie wir sehen werden, auch alle Functionen summiren, wenn auch nicht alle bis jetzt summirt wurden.

Die Grundreihe, die allen diesen Entwickelungen zu Grunde liegt, ist:

$$X_0, \quad X_1, \quad X_2, \quad \ldots . \quad X_n.$$

Sie läfst sich auch, wenn $X = fx$ und Δx die Zunahme ist, so darstellen:

$$fx, \quad f(x+\Delta x), \quad f(x+2\Delta x), \quad \ldots . \quad f(x+n\Delta x).$$

Nach diesen Bemerkungen gehen wir nun zu der Darstellung der einzelnen Summenreihen mit ihren Summen-Ausdrücken über, und betrachten zuerst die mit gleichen, dann die mit abwechselnden Zeichen

Summenreihen und Summen-Ausdrücke der Potenzialfunctionen.

§. 74.

Summirung der Potenzenreihen, deren Glieder mit positiven Zeichen verbunden sind.

Um die Summe der Potenzenreihe, deren Glieder mit einerlei Zeichen verbunden sind, zu gewinnen, legen wir die erste Reihe (350.)

$$X_0+X_1+X_2+\ldots.+X_n=\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_0$$

zu Grunde, und setzen in ihr $X_0=x^p$, dann wird, $X_1=(x+\Delta x)^p$, $X_2=(x+2\Delta x)^p$, $X_n=(x+n\Delta x)^p$ und $X_{n+1}=(x+(n+1)\Delta x)^p$. Hieraus entsteht, durch Einführung dieser Werthe:

$$x^p+(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p+\ldots.+(x+n\Delta x)^p=\Delta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p-\Delta^{-1}x^p,$$

die Bestimmung des Summen-Ausdrucks hängt von der Darstellung der beiden negativen Unterschiede von $(x+(n+1)\Delta x)^p$ und x^p ab. Diese gewinnen sich leicht, wenn in der Gleichung (192.) $x+(n+1)\Delta x$ statt y und x statt y gesetzt wird. Hieraus folgt unmittelbar:

$$\begin{aligned}
&x^p+(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p+\ldots.+(x+n\Delta x)^p\\
&=\frac{(x+(n+1)\Delta x)^{p+1}}{(p+1)\Delta x} && -\frac{x^{p+1}}{(p+1)\Delta x}\\
&-\frac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^p && +\frac{x^p}{2}\\
&+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{1}(x+(n+1)\Delta x)^{p-1}\Delta x && -\frac{1}{6}\cdot\frac{p}{2}x^{p-1}\Delta x\\
&-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(x+(n+1)\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3 && +\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}x^{p-3}(\Delta x)^3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Wir bemerken, dafs in dieser Gleichung das höchste Glied der Summenreihe $(x+n\Delta x)^p$ mit dem Ausdrucke $(x+(n+1)\Delta x)^p$, im Summen-Ausdrucke, der Form nach nicht harmonirt. Zählen wir dieses Glied auf beiden Seiten zu, scheiden dann die in beiden Reihen gemeinschaftlichen Factoren aus, so gewinnen wir folgende Darstellung

353.
$$\begin{aligned}
&x^p+(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p+\ldots.+(x+(n+1)\Delta x)^p\\
&=\frac{1}{(p+1)\Delta x}[(x+(n+1)\Delta x)^{p+1}-x^{p+1}]\\
&+\frac{1}{2}[(x+(n+1)\Delta x)^p+x^p]\\
&+\frac{1}{6}\cdot\frac{p}{2}[(x+(n+1)\Delta x)^{p-1}-x^{p-1}]\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Die Richtigkeit dieser Gleichung wird nicht aufgehoben, wenn $n-1$ statt n gesetzt wird. Hierdurch wird aber eine bequemere Darstellung gefunden, und es ist

$$354. \quad x^p+(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p+\ldots.+(x+n\Delta x)^p$$
$$=\frac{1}{(p+1)\Delta x}[(x+n\Delta x)^{p+1}-x^{p+1}]$$
$$+\frac{1}{2}[(x+n\Delta x)^p+x^p]$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{p}{2}\Delta x[(x+n\Delta x)^{p-1}-x^{p-1}]$$
$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\Delta x)^3[(x+n\Delta x)^{p-3}-x^{p-3}]$$
$$+\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{p\ldots.(p-4)}{1.2\ldots.5}(\Delta x)^5[(x+n\Delta x)^{p-5}-x^{p-5}]$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Diese Reihe ist allgemein, und gilt für jeden Werth von x und Δx, die überhaupt keiner weitern Beschränkung in ihrer Annahme unterliegen. Wir machen von ihr eine Anwendung, und setzen $x=0$ und $\Delta x=1$, dadurch entsteht der Summen-Ausdruck für die Potenzenreihe der natürlichen Zahlen:

$$355. \quad 1^p+2^p+3^p+4^p+\ldots.+n^p=\frac{1}{p+1}[n^{p+1}-0^{p+1}]$$
$$+\frac{1}{2}[n^p-0^p]$$
$$+\frac{1}{6}\cdot\frac{p}{2}[n^{p-1}-0^{p-1}]$$
$$-\frac{1}{30}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{4.1.2.3}[n^{p-3}-0^{p-3}]$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

Die Ausdrücke 0^{p+1}, 0^p, 0^{p-1}, ... sind dem ersten Anscheine nach überflüssig. Sie sind es aber nicht, wenn man berücksichtigt, dafs in dem Falle, wo $p-q$ in dem Ausdruck 0^{p-q}, in Null übergeht, dieses Glied einen bestimmten Werth bekömmt. Der alsdann ist:

$$0^0=\frac{0}{0}=1.$$

Benutzen wir diese Bemerkungen, so ziehen wir hieraus folgende Reihen nebst ihren Summen-Ausdrücken:

356.
$$\begin{cases} 1+2+3+4+\ldots.+n = \frac{n^2}{2}+\frac{n}{2}, \\ 1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots.+n^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6}, \\ 1^3+2^3+3^3+4^3+\ldots.+n^3 = \frac{n^4}{3}+\frac{n^3}{2}+\frac{n^2}{4}, \\ 1^4+2^4+3^4+4^4+\ldots.+n^4 = \frac{n^5}{5}+\frac{n^4}{2}+\frac{n^3}{3}-\frac{n}{30}, \\ 1^5+2^5+3^5+4^5+\ldots.+n^5 = \frac{n^6}{6}+\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{12}-\frac{n^2}{12}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Eine andere Darstellung gewinnen wir aus (354.), wenn $x=1$ gesetzt wird. Sie ist:

355.
$$\begin{aligned} (1+\Delta x)^p+(1+2\Delta x)^p+(1+3\Delta x)^p+\ldots.+(1+n\Delta x)^p \\ = \frac{1}{(p+1)}\Delta x[(1+n\Delta x)^{p+1}-1] \\ +\frac{1}{2}[(1+n\Delta x)^p+1] \\ +\frac{1}{6}\cdot\frac{p}{2}\Delta x[(1+n\Delta x)^{p-1}-1] \\ -\frac{1}{30}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{4.1.2.3}[(1+n\Delta x)^{p-3}-1] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Setzen wir hierin $\Delta x=2$, so entstehen die Potenzenreihen der ungeraden Zahlenreihen, nebst ihren Summen-Ausdrücken, und es ist:

358.
$$\begin{cases} 1+3+5+7+\ldots.+2n+1 = \frac{(2n+1)^2}{4}+\frac{2n+1}{2}+\frac{1}{4}, \\ 1+3^2+5^2+7^2+\ldots.+(2n+1)^2 = \frac{(2n+1)^3}{6}+\frac{(2n+1)^2}{2}+\frac{2n+1}{2}, \\ 1+3^3+5^3+7^3+\ldots.+(2n+1)^3 = \frac{(2n+1)^4}{8}+\frac{(2n+1)^3}{2}+\frac{(2n+1)^2}{2}-\frac{1}{8}, \\ 1+3^4+5^4+7^4+\ldots.+(2n+1)^4 = \frac{(2n+1)^5}{10}+\frac{2n+1^4}{2}+\frac{2(2n+1)}{3}-\frac{4(2n+1)}{15} \end{cases}$$

u. s. w. Wird $\Delta x=3$ gesetzt, so gewinnt man folgende Summenreihen mit ihren Summen-Ausdrücken:

359.
$$\begin{cases} 1+4+7+10+\ldots.+3n+1 = \frac{(3n+1)^2}{6}+\frac{3n+1}{2}+\frac{1}{3}, \\ 1+4^2+7^2+10^2+\ldots.+(3n+1)^2 = \frac{(3n+1)^3}{9}+\frac{(3n+1)^2}{2}+\frac{3n+1}{2}-\frac{1}{9}, \\ 1+4^3+7^3+10^3+\ldots.+(3n+1)^3 = \frac{(3n+1)^4}{12}+\frac{(3n+1)^3}{2}+\frac{3(3n+1)}{4}-\frac{1}{3}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§. 75.

Summirung der Potenzenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind.

Um die Summen-Ausdrücke für Potenzenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind, zu erhalten, unterscheiden wir zwischen einer ungeraden und geraden Glieder-Anzahl.

Für die Reihe ersterer Art gilt aus (352.):

$$X_0 - X_1 + X_2 \ldots . + X_n = \zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0,$$

für die Reihe der zweiten Art gilt aus (353.):

$$X_0 - X_1 + X_2 - X_3 \ldots . - X_n = -\zeta^{-1} X_{n+1} + \zeta^{-1} X_0.$$

Wird hierin $X_0 = x^p$ gesetzt, so ergiebt sich hieraus:

$$x^p - (x+\Delta x)^p + (x+2\Delta x)^p - \ldots . + (x+n\Delta x)^p = \zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p + \zeta^{-1} x^p$$

und

$$x^p - (x+\Delta x)^p + (x+2\Delta x)^p - \ldots . - (x+n\Delta x)^p = -\zeta^{-1}(x+(n+1)\Delta x)^p + \zeta^{-1} x^p.$$

Die negativen Aufstufungen für $(x+(n+1)\Delta x)^p$ und x^p erhalten wir aus der Gleichung (84.), §. 13., wenn dort $y = (x+(n+1)\Delta x)$ und $y = x$ gesetzt wird. Hieraus ergiebt sich für eine Summenreihe mit ungerader Glieder-Anzahl:

360.
$$\begin{aligned} & x^p - (x+\Delta x)^p + (x+2\Delta x)^p - \ldots . + (x+n\Delta x)^p \\ & = \frac{1}{2}(x+(n+1)\Delta x)^p + \frac{1}{2} x^p \\ & - \frac{1}{4} p (x+(n+1)\Delta x)^{p-1} \Delta x - \frac{p}{4} x^{p-1} \Delta x \\ & + \frac{1}{8} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} (x+(n+1)\Delta x)^{p-3} (\Delta x)^3 + \frac{1}{8} \cdot \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3} x^{p-3} (\Delta x)^3 \\ & \ldots \ldots \ldots

Zählen wir, um Übereinstimmung herbei zu führen, in der Gleichung (360.) $(x+(n+1)\Delta x)^p$ ab, in der Gleichung (361.) aber zu; berücksichtigen, dafs dann die Zahl der Glieder sich um eins vergröfsert, also die gerade Anzahl in die ungerade und umgekehrt übergeht, scheiden die gemeinschaftlichen Factoren aus, setzen $n-1$ statt n: so erhalten wir folgende Summen-Ausdrücke für Potenzenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, und zwar für eine gerade Glieder-Anzahl, aus (360.):

362.
$$x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p-\ldots.-(x+n\Delta x)^p$$
$$=-\frac{1}{2}[(x+n\Delta x)^p-x^p]$$
$$-\frac{p}{4}\Delta x[(x+n\Delta x)^{p-1}+x^{p-1}]$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{8.1.2.3}(\Delta x)^3[(x+n\Delta x)^{p-3}+x^{p-3}]$$
$$-\frac{p(p-1)\ldots.(p-4)}{4.1.2\ldots.5}(\Delta x)^5[(x+n\Delta x)^{p-5}+x^{p-5}]$$
$$-\frac{17}{16}\cdot\frac{p(p-1)\ldots.(p-6)}{1.2\ldots.6}(\Delta x)^7[(x+n\Delta x)^{p-7}+x^{p-7}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl, aus (361.):

363.
$$x^p-(x+\Delta x)^p+(x+2\Delta x)^p-\ldots.+(x+n\Delta x)^p$$
$$=\frac{1}{2}[(x+n\Delta x)^p+x^p]$$
$$+\frac{p}{4}\Delta x[(x+n\Delta x)^{p-1}-x^{p-1}]$$
$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\Delta x)^3[(x+n\Delta x)^{p-3}-x^{p-3}]$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{p(p-1)\ldots.(p-4)}{1.2\ldots.5}(\Delta x)^5[(x+n\Delta x)^{p-5}-x^{p-5}]$$
$$-\frac{17}{16}\cdot\frac{p\ldots.(p-6)}{1.2\ldots.7}(\Delta x)^7[(x+n\Delta x)^{p-7}-x^{p-7}]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

§. 76.

Die beiden gefundenen Gleichungen haben für die Anwendung eine sehr zweckmäfsige Gestalt. Die Gröfsen x und Δx sind unabhängig von einander. Machen wir vorerst eine Anwendung auf die Potenzenreihen der natürlichen Zahlen, so haben wir $x=0$ und $\Delta x=1$ zu setzen. Dadurch verschwindet aber das erste Glied in den vorliegenden Reihen,

und das zweite Glied, das mit dem negativen Zeichen versehen ist, wird zum ersten. Die Verwandlung aller Zeichen in die entgegengesetzten führt zu einer Reihe, deren erstes Glied positiv wird: die Zahl der Glieder wird aber deswegen auch um eins verkürzt. Diese Bemerkungen führen zu folgenden Reihen, und zwar für eine ungerade Glieder-Anzahl:

$$364.\quad 1^p-2^p+3^p-4^p-\ldots.+n^p=\frac{1}{2}(n_p-0^p)$$
$$+\frac{p}{4}(n^{p-1}+0^{p-1})$$
$$-\frac{1}{8}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(n^{p-3}+0^{p-3})$$
$$+\frac{1}{4}\cdot\frac{p(p-1)\ldots.(p-4)}{1.2,\ldots 5}(n^{p-5}+0^{p-5})$$
$$-\frac{17}{16}\cdot\frac{p\ldots.(p-6)}{1.2\ldots.6}(n^{p-7}+0^{p-7})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

und für eine gerade Glieder-Anzahl:

$$365.\quad 1^p-2^p+3^p-4^p-\ldots.-n^p=-\frac{1}{2}(n^p-0^p)-\frac{p}{4}(n^{p-1}-0^{p-1})$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{8.1.2.3}(n^{p-3}-0^{p-3})-\frac{1}{4}\cdot\frac{p\ldots.(p-4)}{1.2\ldots.5}(n^{p-5}-0^{p-5})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

Aus diesen Gleichungen entnehmen wir, mit der Berücksichtigung, dafs $0^0=\frac{0}{0}=1$ ist, folgende specielle Fälle für Potenzenreihen von einer ungeraden Glieder-Anzahl:

$$366.\quad\begin{cases}1-2+3-4+\ldots.+n=\frac{n+1}{2},\\ 1-2^2+3^2-4^2+\ldots.+n^2=\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2},\\ 1-2^3+3^3-4^3+\ldots.+n^3=\frac{n^3}{2}+\frac{3n^2}{4}-\frac{1}{4},\\ 1-2^4+3^4-4^4+\ldots.+n^4=\frac{n^4}{2}+n^3-\frac{n}{2},\\ 1-2^5+3^5-4^5+\ldots.+n^5=\frac{n^5}{2}+\frac{5n^4}{4}-\frac{5n^2}{4}+\frac{1}{2},\\ 1-2^6+3^6-4^6+\ldots.+n^6=\frac{n^6}{2}+\frac{3n^5}{2}-\frac{5n^3}{2}+\frac{3n}{2},\\ 1-2^7+3^7-4^7+\ldots.+n^7=\frac{n^7}{2}+\frac{7n^6}{4}-\frac{35n^4}{8}+\frac{21n}{8}-\frac{17}{8},\\ 1-2^8+3^8-4^8+\ldots.+n^8=\frac{n^8}{2}+2n^7-7n^5+14n^3-\frac{17n}{2},\\ \text{u. s. w.,}\end{cases}$$

für Potenzenreihen von einer geraden Glieder-Anzahl:

$$\textbf{367.}\quad \begin{cases} 1-2+3-4+\ldots.-n = -\frac{n}{2}, \\ 1-2^2+3^2-4^2+\ldots.-n^2 = -\frac{n^2}{2}-\frac{n}{2}, \\ 1-2^3+3^3-4^3+\ldots.-n^3 = -\frac{n^3}{2}-\frac{3n}{4}, \\ 1-2^4+3^4-4^4+\ldots.-n^4 = -\frac{n^4}{2}-n^3+\frac{n}{2}, \\ 1-2^5+3^5-4^5+\ldots.-n^5 = -\frac{n^5}{2}-\frac{5n^4}{2}+\frac{5n^2}{4}, \\ 1-2^6+3^6-4^6+\ldots.-n^6 = -\frac{n^6}{2}-\frac{3n^5}{2}+\frac{5n^3}{2}-\frac{3n}{2}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Setzt man in (362.) und (363.) $x=1$ und $\Delta x=2$, so gewinnt man aus ihnen die Summen für die Potenzenreihen der ungeraden Zahlen mit abwechselnden Zeichen —, und man erhält:

$$\textbf{368.}\quad \begin{cases} 1-3+5-7+\ldots.-(2n+1) = -\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2}, \\ 1-3^2+5^2-7^2+\ldots.-(2n+1)^2 = -\frac{(2n+1)^2}{2}-\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2}, \\ 1-3^3+5^3-7^3+\ldots.-(2n+1)^3 = -\frac{(2n+1)^3}{2}-\frac{3(2n+1)^2}{2}+1, \\ 1-3^4+5^4-7^4+\ldots.-(2n+1)^4 = -\frac{(2n+1)^4}{2}-2(2n+1)^3+4(2n+1)+\frac{5}{2}, \\ 1-3^5+5^5-7^5+\ldots.-(2n+1)^5 = -\frac{(2n+1)^5}{2}-\frac{5(2n+1)^4}{2}+10(2n+1)^3 \\ \qquad -8(2n+1)-8, \\ \text{u. s. w.,} \end{cases}$$

für Potenzenreihen von ungerader Glieder-Anzahl:

$$\textbf{369.}\quad \begin{cases} 1-3+5-7+\ldots.+2n+1 = \frac{2n+1}{2}+\frac{1}{2}, \\ 1-3^2+5^2-7^2+\ldots.+(2n+1)^2 = \frac{(2n+1)^2}{2}+\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2}, \\ 1-3^3+5^3-7^3+\ldots.+(2n+1)^3 = \frac{(2n+1)^3}{2}+\frac{3(2n+1)^2}{2}-1, \\ 1-3^4+5^4-7^4+\ldots.+(2n+1)^4 = \frac{(2n+1)^4}{2}+2(2n+1)^3-4(2n+1)+\frac{5}{2}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Vergleichen wir die erste Reihe in No. 356., welche die Summe der natürlichen Zahlenreihe ist, mit der zweiten Reihe in 366., welche die Unterschiede der Quadrate der natürlichen Zahlen darstellt, so haben

beide einerlei Summen-Ausdruck; folglich sind beide einander gleich, und man hat:

370. $$1+2+3+\ldots.+n = 1-2^2+3^2-4^2+\ldots.+n^2.$$

Die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis n ist also den Unterschieden der Quadrate derselben Zahlen, oder der Reihe der Quadrate der natürlichen Zahlen, mit abwechselnden Zeichen, gleich. Diese Behauptung gilt für jedes beliebige n. Für den Fall, wo die Anzahl der Glieder in der Reihe der Quadrate gerade ist, wird das Resultat negativ.

§. 77.

Auf dieselbe Weise, findet man auch die Summen von solchen Potenzenreihen, deren Glieder mit den fallenden Zahlen-Ausdrücken der Combinations-Classen verbunden sind. Legt man die zweite Gleichung in (350.) zu Grunde, so hat man folgende Reihe mit ihrem Summen-Ausdrucke:

$$(n+1)x^p+n(x+\Delta x)^p+(n-1)(x+2\Delta x)^p+\ldots.+(x+n\Delta x)^p$$
$$= \Delta^{-2}(x+(n+2)\Delta x)^p-\frac{n+1}{2}\Delta^{-1}x^p-\Delta^{-2}(x+\Delta x)^p.$$

Werden aus den Gleichungen (192.) und (193.) die entwickelten Gleichungen eingeführt, so entsteht:

371.
$$\begin{aligned}(n+1)x^p+n(x+\Delta x)^p+(n-1)(x+2\Delta x)^p+\ldots.+(x+n\Delta x)^p&\\ =\frac{1}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}[(x+(n+2)\Delta x)^{p+2}-(x+\Delta x)^{p+2}]&\\ -\frac{1}{(p+1)\Delta x}\left[(x+(n+2)\Delta x)^{p+1}+\frac{n+1}{1}x^{p+1}-(x+\Delta x)^{p+1}\right]&\\ +\frac{5}{12}\quad(x+(n+2)\Delta x)^p+\frac{n+1}{2}x^p-\frac{5}{12}(x+\Delta x)^p&\\ -\frac{p.\Delta x}{12}\quad\left[(x+(n+2)\Delta x)^{p-1}+\frac{n+1}{1}x^{p-1}-(x+\Delta x)^{p-1}\right]&\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\end{aligned}$$

u. s. w.

Auf ähnliche Weise erhält man für die Reihen aus (351.) und (352.):

$$(n+1)x^p-n(x+\Delta x)^p+(n-1)(x+2\Delta x)^p-\ldots.+(x+n\Delta x)^p$$
$$=\zeta^{-2}(x+(n+2)\Delta x)^p+\frac{n+1}{1}\zeta^{-1}x^p+\zeta^{-2}(x+\Delta x)^p,$$

und

$$(n+1)x^p - n(x+\Delta x)^p + (n-1)(x+2\Delta x)^p - \ldots - (x+n\Delta x)^p$$
$$= -\zeta^{-2}(x+(n+2)\Delta x) + \frac{n+1}{1}\zeta^{-1}x^p + \zeta^{-2}(x+\Delta x)^p$$

für die Summen-Ausdrücke für Potenzenreihen mit abwechselnden Zeichen, wenn man die angezeigten Geschäfte aus den Gleichungen (82.) und (83.) substituirt. Die Ausdrücke der Summen sind dem Anscheine nach sehr weitläufig: in der That sind sie es aber in der Anwendung auf specielle Fälle nicht, indem die zweite Scheitelreihe verschwindet, wenn $x=0$ gesetzt wird, die dritte aber nur die Einheit erzeugt, im Falle, dafs $\Delta x = 1$ angenommen wird. Die weitere Ausführung überlassen wir dem Leser.

(Die Fortsetzung folgt im nächsten Hefte.)

19.

De compositione numerorum e cubis integris positivis.

(Auctore *Zornow*, in Gymnasio Kneiphofiano Regiomantano magistro superiore.)

Eduardus Waring in *Meditationibus algebraicis* (Cantabrigiae a. 1782, ed. 3.) pag. 349. inter plura theoremata, quae sine demonstratione proponit, hoc habet:

„*Omnis integer numerus vel est cubus; vel e duobus, tribus*, 4, 5, „6, 7, 8 *vel novem cubis compositus: est etiam quadrato-quadra-* „*tus vel e duobus, tribus, etc. usque ad novemdecim compositus,* „*et sic deinceps: consimilia etiam affirmari possunt* (*exceptis exci-* „*piendis*) *de eodem numero quantitatum earundem dimensionum.*"

Verba postrema paullo obscuriora significare videntur, (quod ex insequentibus coniicere licet,) idem, quod de cubis et biquadratis, valere de formis generalioribus $a+bx+cx^2+dx^3$, $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$.

Theoremate antecedente communicato, excitavit me Cl. *Jacobi*, ut rem de cubis exemplis comprobarem. Qua de causa tabulam hic annexam calculavi pro compositione numerorum omnium inde a 1 usque ad 3000 e cubus integris positivis. In qua tabula pro singulis tribus millibus designant numeri ante columnas scripti *unitates*, numeri supra columnas scripti *centenarios*. In ipsis columnis invenitur pro unoquoque numero inter 1 et 3000 numerus minimus cuborum positivorum integrorum, e quibus ille additione componi possit. Exempli gratia, ut cognoscas, quinam sit numerus minimus cuborum integrorum positivorum, e quibus 2689 componatur, in tertio mille notas columnam horizontalem, cui praescriptus est 89, et verticalem, cui suprascriptus 6, et invenis in coniunctione duarum columnarum numerum 3, sive 2689 e tribus cubis positivis integris componi posse. Eadem tabula etiam ipsas decompositiones numerorum in numerum minimum cuborum facile suppeditat. A numero enim proposito n, cui in tabula respondeat numerus N, subducantur cubi, usque dum ad numerum $n-a^3$ pervenias, cui in tabula respondet $N-1$; de numero $n-a^3$ rursus subducus cubos, usque dum ad numerum $n-a^3-b^3$ pervenias, cui in tabula respondet numerus $N-2$, et ita pergis, quam diu licet: habebis

decompositionem numeri n in N cubos, $n = a^3 + b^3 + c^3 + \ldots$. Exempli causa, si ipsos tres cubos cognoscere placet, quorum summa 2689, subductis a 2689 numeris 1, 8, 27 habes 2688, 2681, 2662, et huic postremo numero 2662 respondet in tabula 2; unde habetur $2689 = 27 + 2662 = 3^3 + 2.11^3$. Apud numerum 2406 invenis in tabula 6; ut ipsos 6 cubos cognoscas, quarum summa 2406, observas,

apud 2406 — 1 = 2405 inveniri in tabula 5
- 2405 — 1 = 2404 - - - - - 4
- 2404 — 1 = 2403 - - - - - 3
- 2403 — 343 = 2060 - - - - - 2,

unde habes

$$2406 = 1+1+1+343+2060 = 3.1^3 + 7^3 + 7^3 + 11^3.$$

Tabula ea usque tantum uti convenit, sic uti antecc. factum, donec ad numerum pervenias, qui e duobus cubis componitur, quippe qui facilius sine tabula inveniuntur et semper in promptu sunt. Et si plures decompositionis modi dantur, eadem methodo per tabulam omnes invenis.

Eduardi Waring theorema de cubis tabula perfecte confirmat, simul autem graves eius modificationes affert. Docet enim tabula, *unicum tantum extare numerum* 23, *ad quem e cubis componendum novem cubis opus sit; viz.* $23 = 2.2^3 + 7.1^3$. Unde proponi potest theorema:

„*numerum quemlibet praeter* 23 *aut ex octo cubis aut e minore*
„*cuborum numero componi posse.*"

Deinde docet tabula, *extare unicos numeros* 15, 22, 50, 141, 167, 175, 186, 212, 238, 239, 364, 420, 428, 454, *qui non e minore cuborum numero quam octo componantur;* sive proponi potest theorema:

„*numerum qnemlibet maiorem quam* 454 *aut e septem cubis aut*
„*e minore cuborum numero componi posse.*"

Quae theoremata, pro omnibus numeris usque ad 3000 per tabulam nostram comprobata, sine ullo dubio generaliter valent.

Numerus maximus tabulae, ad cuius compositionem septem cubis indigemus, est 2183, neque inter numeros 917 hunc insequentes, quos calculavimus, ullum invenimus, qui non e sex cubis aut minore cuborum numero componi possit. Qua de re habetur theorema probabile:

„*numerum quemlibet maiorem quam* 2183 *aut e sex cubis aut e*
„*minore cuborum numero componi posse.*"

Numeri ad quorum compositionem septem cubis indiges, cum in secundo mille valde rari existant, curiosum est, inter eos numeros in tabula inveniri tres se proxime insequentes 1452, 1453, 1454.

Schema sequens indicat, quot inter binos cubos se proxime sequentes extent numeri, ad quorem compositionem 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 cubis indiges:

	1—8	8—27	27—64	64—125	125—216	216—343	343—512	512—729	729—1000	1000—1331	1331—1728	1728—2197	2197—2744
2	1	2	3	3	5	6	6	8	7	9	10	10	13
3	1	3	5	7	12	14	22	26	32	39	45	54	62
4	1	3	7	11	21	24	42	60	78	98	117	141	191
5	1	3	8	14	24	33	48	70	101	126	148	182	216
6	1	2	8	15	15	33	32	44	48	56	71	75	64
7	1	2	4	9	9	14	14	8	4	2	5	6	0
8	0	2	1	1	4	2	4	0	0	0	0	0	0
9	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Docet schema, in magnis numeris rariores fieri etiam eos, ad quorum compositionem sex cubis opus sit; nam hos numeros inter 1728 et 2197 videmus existere 75, inter 2197 et 2744 tantum 64. Unde fieri potest, ut habeatur theorema:

„*certo limite transgresso, numeros omnes e quinque cubis aut minore cuborum numero componi.*"

D. 25. Apr. 1835.

Primum Mille.

	01234	56789		01234	56789
1	15567	54335	51	46325	55465
2	26674	65443	52	52436	66564
3	37675	43554	53	63347	74433
4	46746	44455	54	24458	65524
5	56453	55566	55	33566	45325
6	67464	56666	56	44475	54234
7	74532	66655	57	55546	34335
8	14543	56654	58	66356	45446
9	25554	65444	59	57433	26556
10	36665	76544	60	63544	35665
11	47776	54435	61	74454	45544
12	57857	15446	62	35565	56335
13	67564	24356	63	44676	56435
14	78535	35445	64	15586	53345
15	85643	46556	65	26657	44446
16	25154	57555	66	37463	35554
17	36245	66554	67	48544	34565
18	43356	75453	68	54632	45564
19	54467	65543	69	65543	56655
20	65558	24534	70	46324	67446
21	76665	34444	71	55433	67544
22	87645	45555	72	25544	64453
23	96754	43666	73	36655	55454
24	36254	54666	74	47564	46555
25	41355	55665	75	58635	44346
26	52466	66544	76	65643	25455
27	13577	56654	77	76354	34466
28	22668	35245	78	57435	45554
29	33775	44144	79	63544	56653
30	44756	44255	80	34255	65543
31	55755	54366	81	35356	66534
32	46362	35445	82	44465	54434
33	52463	47556	83	55546	55344
34	63543	57655	84	66654	33445
35	24654	67765	85	77465	44555
36	33665	46354	86	68544	32665
37	44776	52255	87	74655	43744
38	55867	53346	88	45365	54554
39	66864	24445	89	42466	65445
40	57473	33456	90	53576	65545
41	63524	44556	91	24657	44454
42	74634	55666	92	33665	44355
43	35215	56556	93	44574	35255
44	44326	57463	94	55655	43366
45	54436	63352	95	65743	54455
46	65547	64453	96	56453	45555
47	76655	35544	97	53434	56556
48	67564	43455	98	64544	66555
49	74635	54566	99	35655	55564
50	85245	54377	100	44764	55441
	01234	56789		01234	56789

Secundum Mille.

	01234	56789		01234	56789
1	25555	54336	51	35436	66535
2	36665	55444	52	43547	56443
3	45553	54555	53	54457	35324
4	54544	45565	54	34567	46434
5	54434	55555	55	44646	35234
6	45445	56465	56	45552	45335
7	44543	65543	57	54453	45446
8	25554	64444	58	65422	55456
9	36655	65445	59	45533	36546
10	46766	44455	60	54544	46554
11	56654	53546	61	53455	44435
12	55654	24556	62	44466	55445
13	65444	35466	63	54556	46345
14	56544	46554	64	25563	54446
15	54543	56554	65	35544	55447
16	35254	65545	66	46533	45555
17	46355	64543	64	56434	45656
18	54466	55554	68	65343	56663
19	65565	54634	69	44444	55444
20	55555	35544	70	35435	66533
21	66555	45555	71	35544	56443
22	65543	36655	72	25544	63554
23	65544	44665	73	36655	64555
24	25355	55654	74	47444	32565
25	32456	65554	75	55545	43456
26	43556	66544	76	44454	34564
27	24566	65644	77	55445	45555
28	33666	45145	78	46544	54443
29	34565	55255	79	44554	65544
30	45554	45366	80	35355	44434
31	55614	54456	81	45466	35544
32	35423	45555	82	55555	43345
33	43534	56555	83	56653	34445
34	54644	66654	84	55564	34555
35	34655	55555	85	66533	45565
36	43665	36255	86	56444	43554
37	44676	43366	87	55455	54645
38	55655	54357	88	34366	55545
39	66625	35456	89	43467	46355
40	45334	44566	90	54565	54435
41	54235	45665	91	35664	45535
42	55344	56555	92	44554	45246
43	45325	56625	93	45644	46356
44	44436	45332	94	55545	54455
45	55446	54443	95	44424	65554
46	56556	65444	96	44434	56545
47	56635	24555	97	43545	55444
48	56445	34566	98	43655	65544
49	63344	45666	99	34555	54345
50	64355	55466	100	44665	45352
	01234	56789		01234	56789

Tertium Mille.

	01234	56789		01234	56789
1	35544	55445	51	44345	66646
2	46554	64555	52	54446	66254
3	54543	45556	53	55545	45333
4	55434	43654	54	45655	55444
5	45245	54554	55	55634	45345
6	54356	65545	56	56443	44346
7	54454	55454	57	65542	55446
8	35565	65425	58	66533	65556
9	46654	54235	59	35444	45654
10	57645	54344	60	23445	56362
11	65544	44455	61	34256	45443
12	55444	34564	62	44366	52544
13	55342	45555	63	55445	53455
14	64443	56644	64	36554	54446
15	45544	65554	65	46433	43556
16	46355	65434	66	57544	54666
17	37465	55344	67	45344	35645
18	45556	45455	68	34444	44453
19	56654	54545	69	35355	55523
20	65555	44545	70	45444	63634
21	55443	35655	71	25555	44244
22	55524	46655	72	36645	34334
23	54435	55654	73	45544	43345
24	33245	66545	74	56554	43455
25	43336	65443	75	56455	44556
26	54445	55352	76	45345	45564
27	35555	55443	77	46453	56534
28	44555	45254	78	55454	64534
29	45554	43365	79	35555	55345
30	55534	44466	80	46454	45444
31	65525	54565	81	46555	44445
32	44334	55555	82	56444	34455
33	54445	66553	83	67554	35436
34	45455	56433	84	54453	45545
35	43565	65534	85	53444	46645
36	54665	44344	86	43535	54545
37	55655	54445	87	33345	65353
38	66645	35456	88	44355	54454
39	56535	45565	89	54446	53344
40	55243	25666	90	65554	44443
41	65344	36554	91	46655	45544
42	44455	46544	92	55544	54355
43	54434	55535	93	44555	54456
44	44545	55143	94	54445	45553
45	55536	55244	95	44435	55464
46	66644	44355	96	43445	65534
47	66643	34454	97	51555	64444
48	46354	34565	98	32565	54344
49	54435	45665	99	43566	44445
50	55444	56555	100	54655	54353
	01234	56789		01234	56789

20.

Theoremata nova algebraica circa systema duarum aequationum, inter duas variabiles propositarum.

(Auctore *C. G. J. Jacobi*, prof. ord. math. Regiom.)

1.

E theorematis, quae in elementis algebraicis traduntur, vix extat aliud magis utile in aequationibus maxime diversis, quam notum illud:

„Designante X functionem ipsius x rationalem integram, fieri

$$\Sigma\left(\frac{U}{\frac{\partial X}{\partial x}}\right) = 0,$$

„si quidem extendatur summa ad omnes radices x aequationis $X = 0$, „atque U sit alia functio quaelibet ipsius x rationalis integra, duabus „unitatibus inferior ordine functionis X."

Quod theorema, sequentibus demonstremus, quomodo extendatur ad systema duarum aequationum algebraicarum, inter duas variabiles propositarum.

Sint f, φ functiones ipsarum x, y rationales integrae, quae respective ad μ^{tam} et ν^{tam} dimensionem ascendant. Statuamus, w esse gradum aequationum finalium, quae ex aequationibus $f = 0$, $\varphi = 0$, altera variabili eliminata, proveniunt. Quae aequationes finales sint

$$X = 0, \qquad Y = 0,$$

quarum altera radices x, altera radices y suppeditat. Supponamus porro, esse M, N, P, Q, functiones multiplicatrices simplicissimae, rationales, integrae, quarum ope identice obtineatur:

$$Mf + N\varphi = X,$$
$$Pf + Q\varphi = Y.$$

Sit tandem

$$MQ - NP = V.$$

Designemus per characterem

$$[x^\alpha, y^\beta]$$

functionem ipsarum x, y rationalem, integram, in qua x^α, y^β sunt altissimae, quae inveniuntur, ipsarum x, y dignitates; atque sit:

$$f = [x^\alpha, y^\beta], \qquad \varphi = [x^\gamma, y^\delta].$$

Erit e praeceptis algebraicis notis,

$$M = [x^{w-\alpha}, y^{\delta-1}], \qquad N = [x^{w-\gamma}, y^{\beta-1}],$$
$$P = [x^{\gamma-1}, y^{w-\beta}], \qquad Q = [x^{\alpha-1}, y^{w-\delta}].$$

Unde

$$V = MQ - NP = [x^{w-1}, y^{w-1}].$$

Quod dimensionem ipsius V attinet, erunt M, P dimensionis $(w-\mu)$tae, N, Q dimensionis $(w-\nu)$tae, unde V dimensionis $(2w-\mu-\nu)$tae.

Statuamus, aequationum $f=0$, $\varphi=0$ radices simultaneas esse

$$x=x_1,\ y=y_1; \qquad x=x_2,\ y=y_2; \qquad \ldots\ x=x_w,\ y=y_w.$$

Quoties $x=x_m$, $y=y_n$, neque $m=n$, per illos valores aequationibus quidem

$$X = Mf + N\varphi = 0,$$
$$Y = Pf + Q\varphi = 0$$

satisfit, neque tamen aequationibus $f=0$, $\varphi=0$. Jam vero ex aequationibus illis sequitur

$$Vf = QX - NY = 0,$$
$$V\varphi = MY - PX = 0.$$

Unde si per valores ipsarum x, y aequationibus $X=0$, $Y=0$ satisfit, neque tamen aequationibus $f=0$, $\varphi=0$, eosdem valores habetur

$$V = 0.$$

Designante igitur $V_{m,n}$ valorem, quem induit expressio $MQ-NP$ positis simul $x=x_m$, $y=y_n$, erit, quoties m et n diversi:

$$V_{m,n} = 0;$$

sive expressio V evanescit, quoties pro x, y ponuntur radices aequationum finalium, quae non sunt radices simultaneae aequationum propositarum.

Aequationes identicas

$$Mf + N\varphi = X, \quad Pf + Q\varphi = Y$$

et secundum x et secundum y differentiemus, et post differentiationem factam pro x, y ponamus radices simultaneas aequationum $f=0$, $\varphi=0$. Quo facto, si notationem differentialium Lagrangianam adhibemus, prodeunt pro valoribus ipsarum x, y assignatis, reiectis terminis evanescentibus, aequationes

$$Mf'(x) + N\varphi'(x) = X', \qquad Pf'(x) + Q\varphi'(x) = 0,$$
$$Mf'(y) + N\varphi'(y) = 0, \qquad Pf'(y) + Q\varphi'(y) = Y',$$

unde posito brevitatis causa,

$$f'(x)\varphi'(y) - \varphi'(x)f'(y) = R,$$

prodeunt aequationes:

$$R.M = +X'\varphi'(y), \qquad R.P = -Y'\Phi'(x),$$
$$R.N = -X'f'(y), \qquad R.Q = +Y'f'(x),$$

unde

$$R.V = [f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)](MQ - NP) = X'Y'.$$

Vidimus igitur, *substitutis in expressione* $MQ - NP$ *radicibus simultaneis aequationum* $f = 0$, $\varphi = 0$, *idem prodire atque si iidem valores substituantur in expressione*

$$\frac{X'Y'}{R} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y}}{f'(x)\varphi'(y) - \varphi'(x)f'(y)};$$

sive designantibus X'_m, Y'_m, R_m *valores, quos* X', Y', R *induunt pro radicibus aequationum* $f = 0$, $\varphi = 0$ *simultaneis* $x = x_m$, $y = y_m$, *fieri*

$$V_{m,m} = \frac{X'_m Y'_m}{R_m}.$$

2.

Cum in expressione V singulae x, y ad minorem ordinem ascendant atque in functionibus X, Y, videlicet ad $(w-1)$tam, uti supra demonstravimus, cum X, Y $w$ti ordinis sint: habetur per praecepta nota discerptionis fractionum in simplices:

$$\frac{V}{X.Y} = \Sigma \frac{V_{m,n}}{X'_m Y'_n (x - x_m)(y - y_n)},$$

summa extensa ad valores indicum m, n omnes 1, 2, 3, ... w. Sed de w^2 expressionibus, quas summa amplectitur, evanescunt omnes, in quibus m et n diversi sunt, quippe quo casu invenimus $V_{m,n} = 0$, neque igitur remanent nisi in quibus $m = n$. Unde aequatio antecedens in hanc abit simpliciorem:

$$\frac{V}{X.Y} = \Sigma \frac{V_{m,m}}{X'_m Y'_m (x - x_m)(y - y_m)},$$

sive cum sit

$$\frac{V_{m,m}}{X'_m Y'_m} = \frac{1}{R_m},$$

in hanc:

$$\frac{V}{X.Y} = \frac{MQ - NP}{XY} = \Sigma \frac{1}{R_m (x - x_m)(y - y_m)}$$
$$= \frac{1}{R_1 (x - x_1)(y - y_1)} + \frac{1}{R_2 (x - x_2)(y - y_2)} + \ldots + \frac{1}{R_w (x - x_w)(y - y_w)}.$$

Quae est aequatio valde memorabilis. Cuius ope, multiplicatione per XY facta, eruis expressionem ipsius V per radices simultaneas aequationum

$f=0,\ \varphi=0$:

$$V = MQ-NP =$$
$$\frac{1}{R_1}(x-x_2)(x-x_3)\ldots(x-x_w)(y-y_2)(y-y_3)\ldots(y-y_w)+$$
$$\frac{1}{R_2}(x-x_1)(x-x_3)\ldots(x-x_w)(y-y_1)(y-y_3)\ldots(y-y_w)+$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{1}{R_w}(x-x_1)(x-x)_2\ldots(x-x)_{w-1}(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_w),$$

siquidem in functionibus X, Y coefficientes ipsarum x^w, y^w unitati aequales accipiuntur, sive

$$X = Mf+N\varphi = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_w),$$
$$Y = Pf+Q\varphi = (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_w).$$

Habetur ex antecedentibus, aequatione inventa per U multiplicata,

$$\frac{UV}{XY} = \Sigma\frac{U}{R_m(x-x_m)(y-y_m)}.$$

Sit U ipsarum x, y functio rationalis integra, sitque U_m valor ipsius U pro $x=x_m$, $y=y_m$, habetur, designantibus W, W' functiones ipsarum x, y integras rationales,

$$U = U_m+W_m(x-x_m)+W'_m(y-y_m),$$

unde

$$\frac{U}{(x-x_m)(y-y_m)} = \frac{U_m}{(x-x_m)(y-y_m)}+\frac{W}{y-y_m}+\frac{W'}{x-x_m}.$$

Tribus autem expressionibus ad dextram evolutis secundum ipsarum x, y dignitates descendentes, tantum prima terminos continet, simul in utriusque x, y dignitates negativas ductos. Unde evoluta expressione

$$\frac{U}{(x-x_m)(y-y_m)}$$

secundum ipsarum x, y dignitates descendentes, termini, simul in utriusque x, y dignitates negativas ducti, iidem proveniunt atque ex evolutione expressionis

$$\frac{U_m}{(x-x_m)(y-y_m)}.$$

Unde, *evoluta expressione*

$$\frac{UV}{XY} = \frac{U(MQ-NP)}{XY} = \Sigma\frac{U}{R_m(x-x_m)(y-y_m)}$$

secundum ipsarum x, y dignitates descendentes, termini, simul in utriusque x, y dignitates negativas ducti iidem proveniunt atque ex evolutione expressionis

$$\Sigma \frac{U_m}{R_m(x-x_m)(y-y_m)}$$
$$= \frac{U_1}{R_1(x-x_1)(y-y_1)} + \frac{U_2}{R_2(x-x_2)(y-y_2)} \cdots + \frac{U_w}{R_w(x-x_w)(y-y_w)};$$

sive *in evolutione expressionis*

$$\frac{UV}{XY}$$

coefficientem termini $x^{-(\alpha+1)}y^{-(\beta+1)}$, *designantibus* α, β *numeros positivos, nanciscimur*

$$\frac{x_1^\alpha y_1^\beta U_1}{R_1} + \frac{x_2^\alpha y_2^\beta U_2}{R_2} + \cdots + \frac{x_w^\alpha y_w^\beta U_w}{R_w}.$$

Unde, posito $U = R$, **sequitur,** *evoluta expressione*

$$\frac{RV}{XY} = \frac{[f'(x)\varphi'(y) - f'(y)\varphi'(x)][MQ-NP]}{XY}$$

secundum ipsarum x, y *dignitates descendentes, coefficientem termini* $x^{-(\alpha+1)}y^{-(\beta+1)}$, *designantibus* α, β *numeros integros positivos quoscunque, fore*

$$x_1^\alpha y_1^\beta + x_2^\alpha y_2^\beta + \cdots + x_w^\alpha y_w^\beta,$$

sive etiam, *terminos simul in utriusque* x, y *dignitates negativas ductos ex evolutione proposita expressionis* $\frac{RV}{XY}$ *prodire eosdem atque ex aggregato*

$$\frac{1}{(x-x_1)(y-y_1)} + \frac{1}{(x-x_2)(y-y_2)} + \cdots + \frac{1}{(x-x_w)(y-y_w)}.$$

Antecedentia inservire possunt determinandis expressionibus

$$x_1^\alpha y_1^\beta + x_2^\alpha y_2^\beta + \cdots + x_w^\alpha y_w^\beta,$$

quae, si neuter numerorum α, β **evanescit, per methodos vulgares nonnisi maxima molestia inveniuntur.**

3.

Adnotavimus supra, expressionem V **tantum ad dimensionem** $(2w-\mu-\nu)$**tam ascendere; qua de re, evoluta expressione**

$$\frac{V}{XY} = \frac{1}{R_1(x-x_1)(y-y_1)} + \frac{1}{R_2(x-x_2)(y-y_2)} + \cdots + \frac{1}{R_w(x-x_w)(y-y_w)}$$

secundum ipsarum x, y **dignitates descendentes, termini ex evolutione prodeuntes altioris dimensionis esse nequeunt quam** $(-\mu-\nu)$**tae. Habetur autem evolutionis terminus generalis**

$$\left(\frac{x_1^\alpha y_1^\beta}{R_1} + \frac{x_2^\alpha y_2^\beta}{R_2} + \cdots + \frac{x_w^\alpha y_w^\beta}{R_w}\right) x^{-(\alpha+1)} y^{-(\beta+1)},$$

quem igitur evanescere oportet, quoties $\alpha+\beta < \mu+\nu-2$. **Unde fluit theorema:**

Theorema.

Sint f, φ duarum variabilium x, y functiones quaecunque rationales integrae; sint $x=x_1$, $y=y_1$; $x=x_2$, $y=y_2$; .... $x=x_\omega$, $y=y_\omega$ radices omnes simultaneae aequationum $f=0$, $\varphi=0$; sit porro R_m valor expressionis

$$f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)$$

pro $x=x_m$, $y=y_m$; erit

$$\frac{x_1^\alpha y_2^\beta}{R_1}+\frac{x_2^\alpha y_2^\beta}{R_2}+\ldots.+\frac{x_\omega^\alpha y_\omega^\beta}{R_\omega}=0,$$

designantibus α, β numeros positivos integros, quorum summa duobus aucta minor quam summa dimensionum, ad quas ascendunt functiones propositae f, φ.

Unde statim etiam sequitur theorema hoc.

Theorema.

Sint f, φ duarum variabilium x, y functiones quaecunque rationales, integrae; sit F alia functio ipsarum x, y rationalis, integra quaecunque cuius ordo tribus inferior summa ordinum functionum f, φ; erit

$$\Sigma\frac{F}{f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)}=0,$$

summa extensa ad valores ipsorum x, y omnes, qui sunt radices simultaneae aequationum $f=0$, $\varphi=0$.

Ut unico saltem exemplo theorema memorabile confirmemus, sint f, φ *secundi* ordinis. Quo casu constantem λ ita determinari posse constat, ut $f+\lambda\varphi$ in duos factores lineares resolvi possit, idque tribus modis pro tribus radicibus aequationis cubicae, a qua valor ipsius λ pendet. Sint λ', λ'' duo ipsius λ valores diversi, ac statuatur

$$\Pi=f+\lambda'\varphi=t.u, \qquad \Phi=f+\lambda''\varphi=v.w,$$

designantibus t, u, v, w expressiones lineares. Radices aequationum $f=0$, $\varphi=0$ eaedem erunt atque aequationum $\Pi=0$, $\Phi=0$, quae in quatuor haec systemata aequationum linearium resolvi possunt:

1) $t=0$, $v=0$, e quibus sequatur $x=x_1$, $y=y_1$,
2) $t=0$, $w=0$, - - - - - $x=x_2$, $y=y_2$,
3) $u=0$, $v=0$, - - - - - $x=x_3$, $y=y_3$,
4) $u=0$, $w=0$, - - - - - $x=x_4$, $y=y_4$.

Ope radicum appositarum ipsas expressiones lineares t, u, v, w exhibere licet; nam cum ex. gr. t evanescat et pro $x=x_1$, $y=y_1$, et pro $x=x_2$ $y=y_2$, notum est, ipsam t hoc modo exprimi posse:

$$t = \alpha[x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-y_1x_2],$$

designante α constantem. Simili modo si u, v, w exhibentur, prodit:

$$\begin{aligned}
t &= \alpha[x(y_1-y_2)-y(x_1-x_2)+x_1y_2-y_1x_2],\\
u &= \beta[x(y_3-y_4)-y(x_3-x_4)+x_3y_4-y_3x_4],\\
v &= \gamma[x(y_1-y_3)-y(x_1-x_3)+x_1y_3-y_1x_3],\\
w &= \delta[x(y_2-y_4)-y(x_2-x_4)+x_2y_4-y_2x_4].
\end{aligned}$$

Unde, posito brevitatis causa:

$$\begin{aligned}
+\Delta_1 &= x_2(y_3-y_4)+x_3(y_4-y_2)+x_4(y_2-y_3),\\
-\Delta_2 &= x_3(y_4-y_1)+x_4(y_1-y_3)+x_1(y_3-y_4),\\
+\Delta_3 &= x_4(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_4)+x_2(y_4-y_1),\\
+\Delta_4 &= x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2),
\end{aligned}$$

eruitur:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} &= -\alpha\gamma\Delta_4,\\
\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial t}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} &= +\alpha\delta\Delta_3,\\
\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} &= +\beta\gamma\Delta_2,\\
\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} &= -\beta\delta\Delta_1,
\end{aligned}$$

ideoque, cum sit $\Pi = tu$, $\Phi = vw$:

$$\begin{aligned}
&\Pi'(x)\Phi'(y)-\Pi'(y)\Phi'(x)\\
&= -\alpha\gamma\Delta_4 uw+\alpha\delta\Delta_3 uv+\beta\gamma\Delta_2 tw-\beta\delta\Delta_1 tv.
\end{aligned}$$

Jam observo, ipsas

x	y	t	u	v	w

simul induere valores

x_1	y_1	0	$-\beta\Delta_2$	0	$+\delta\Delta_3$
x_2	y_2	0	$+\beta\Delta_1$	$+\gamma\Delta_4$	0
x_3	y_3	$-\alpha\Delta_4$	0	0	$-\delta\Delta_1$
x_4	y_4	$+\alpha\Delta_3$	0	$-\gamma\Delta_2$	0.

Uude cum sit

$$\begin{aligned}
&\Pi'(x)\Phi'(y)-\Pi'(y)\Phi'(x)\\
&= (\lambda''-\lambda')[f'(x)\varphi'(y)-f'(y)\varphi'(x)] = (\lambda''-\lambda')R,
\end{aligned}$$

tandem obtinetur

$$\begin{aligned}
R_1 &= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\lambda''-\lambda'}\cdot\Delta_2\Delta_3\Delta_4, & R_3 &= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\lambda''-\lambda'}\cdot\Delta_4\Delta_1\Delta_2,\\
R_2 &= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\lambda''-\lambda'}\cdot\Delta_3\Delta_4\Delta_1, & R_4 &= \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{\lambda''-\lambda'}\cdot\Delta_1\Delta_2\Delta_3,
\end{aligned}$$

Jam e theoremate proposito habentur casu, quo functiones f, φ tantum ad secundam dimensionem ascendunt, tres aequationes:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\frac{1}{R_4}=0,$$
$$\frac{x_1}{R_1}+\frac{x_2}{R_2}+\frac{x_3}{R_3}+\frac{x_4}{R_4}=0,$$
$$\frac{y_1}{R_1}+\frac{y_2}{R_2}+\frac{y_3}{R_3}+\frac{y_4}{R_4}=0,$$

quae per valores ipsarum R_1, R_2, R_3, R_4 inventos facillime confirmantur. Quippe quibus substitutis valoribus, abeunt illae, per

$$\frac{\alpha\beta\gamma\delta.\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4}{\lambda''-\lambda'}$$

multiplicatae in sequentes:

$$\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3+\Delta_4=0,$$
$$x_1\Delta_1+x_2\Delta_2+x_3\Delta_3+x_4\Delta_4=0,$$
$$y_1\Delta_1+y_2\Delta_2+y_3\Delta_3+y_4\Delta_4=0,$$

quas facile patet identicas esse.

Regiomonti d. 13. Juni 1835.

21.

Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpuncte nicht paralleler Kräfte.

(Von Herrn Dr. *Ferd. Minding* zu Berlin.)

Unter allen Puncten in der Richtung der Resultante eines Systemes paralleler Kräfte zeichnet sich bekanntlich derjenige, welcher Mittelpunct des Systemes, häufig auch Schwerpunct genannt wird, durch die Unabhängigkeit seiner Lage von der gemeinschaftlichen Richtung der Kräfte aus. Da bisher aber nicht bewiesen war, dafs ein auf ähnliche Weise ausgezeichneter Punct nur in der Resultante paralleler Kräfte sich finden liefse; so schien mir zu klarerer Einsicht in die Sache eine nähere Untersuchung nothwendig zu sein. Wenn auch die Ergebnisse derselben, welche ich hier mittheilen will, auf Wichtigkeit nicht Anspruch machen; so wird der Leser doch nicht ungern wenigstens einen Theil derjenigen Eigenschaften eines Systemes beliebiger Kräfte entwickelt sehen, welche dem Schwerpuncte am nächsten verwandt sind, und ihre Übergänge vom allgemeinsten bis zum letzten besonderen Falle verfolgen.

Demnach, so wie der Schwerpunct sich ergiebt als gemeinschaftlicher Durchschnitt aller Resultanten, welche entstehen, wenn parallele Kräfte zwar mit Beibehaltung des Parallelismus, sonst aber beliebig um ihre Angriffspuncte gedreht werden; eben so sollen im Folgenden die näheren Bestimmungen ermittelt werden, welche eintreten, wenn beliebig gegebene Kräfte um fest verbundene Angriffspuncte so gedreht werden, dafs die Winkel zwischen den Richtungen je zweier unverändert bleiben.

Um sich eine Anschauung von solchen Drehungen zu verschaffen, denke man sich aus einem willkürlich gewählten Puncte, welcher zugleich zum Anfange der Coordinaten kann genommen werden, Strahlen gezogen parallel den Richtungen der, an fest verbundenen Angriffspuncten wirkenden, Kräfte eines gegebenen Systemes. Diese Strahlen, deren, wie sich versteht, keiner über den angenommenen Punct hinaus nach der anderen Seite verlängert werden darf, bilden zusammen ein Bündel; ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunct würde zwar angemessen der Mittelpunct

des Bündels genannt werden können; da aber der Name Mittelpunct ohnehin schon in sehr verschiedenen Beziehungen gebraucht wird, so soll der Punct die Spitze des Bündels heifsen, ungeachtet im Allgemeinen die Strahlen nicht blofs nach einer Seite von demselben gerichtet sind. Dreht man nun das Bündel als ein festes Ganze beliebig um seine Spitze, und mit ihm gleichzeitig die Kräfte um ihre Angriffspuncte so, dafs jede Kraft ihrem zugehörigen Strahle parallel und zugleich in Hinsicht auf ihre Stellung gegen den Angriffspunct mit der Lage des Strahls gegen die Spitze des Bündels übereinstimmend bleibt, — also nicht etwa willkürlich in ihrer Richtung umgekehrt wird; so ist offenbar die an die Drehung der Kräfte geknüpfte Bedingung, die gegenseitigen Neigungen ungeändert zu lassen, in aller Strenge beobachtet.

Es ist klar, dafs eine Drehung dieser Art keinen Einfluſs hat auf die Gröfse der Resultante, welche sich ergiebt, wenn sämmtliche Kräfte an einem einzigen Puncte in ihren Richtungen angebracht und zusammengesetzt werden. Da aber im Folgenden der Fall, in welchem die Kräfte um einen Punct gerade im Gleichgewichte sind, gänzlich ausgeschlossen werden, also jene Resultante niemals verschwinden soll, so steht es frei, ihre Gröfse als Maafs der übrigen Kräfte anzusehen, und mithin als Einheit anzusetzen, wodurch eine der Allgemeinheit nicht nachtheilige, wenn auch geringe, Vereinfachung der Rechnung erlangt wird.

Um ein gleichmäfsiges Verfahren in Hinsicht auf alle Kräfte zu beobachten, denke man sich mit dem vorhin bezeichneten Bündel noch zwei Strahlen fest verbunden, auf welche die Richtungen der übrigen Strahlen bezogen werden. Es sei ω der Winkel, welchen diese beiden Strahlen mit einander bilden; die Winkel aber, welche die Strahlen P, P_1, P_2, P_3, u. s. f., entsprechend den Kräften P, P_1, P_2, P_3, u. s. f., mit dem ersten der beiden Hülfsstrahlen bilden, heifsen ω', ω'_1, ω'_2, ω'_3, u. s. f., mit dem zweiten: ω'', ω''_1, ω''_2, ω''_3, u. s. f. Ferner wähle man drei auf einander senkrechte Coordinaten-Axen, mit welchen

der erste Strahl	die Winkel	α'',	β'',	γ''	bildet,	deren	Cosinus	a'',	b'',	c'' sind,
der zweite Strahl	-	-	α',	β',	γ'	-	-	-	a',	b',	c'	-
der Strahl P	-	-	α,	β,	γ	-	-	-	a,	b,	c	-
der Strahl P_1	-	-	α_1,	β_1,	γ_1	-	-	-	a_1,	b_1,	c_1	-
der Strahl P_2	-	-	α_2,	β_2,	γ_2	-	-	-	a_2,	b_2,	c_2	-

u. s. f.

Zwischen den Bestimmungsstücken der Richtungen der beiden Hülfsstrahlen und eines dritten Strahles, z. B. P, finden nun folgende bekannte sechs Gleichungen Statt:

$$1.\quad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = \cos\omega, \\ a\,a'' + b\,b'' + c\,c'' = \cos\omega', \\ a\,a' + b\,b' + c\,c' = \cos\omega''. \end{cases}$$

Um zu einer befriedigenden Lösung der Haupt-Aufgabe zu gelangen, ist eine Auflösung dieser sechs Gleichungen in der Art wünschenswerth, dafs jeder der neun auf der linken Seite der Gleichheitszeichen stehenden Cosinus durch drei veränderliche Gröfsen, den obigen Gleichungen genügend, ausgedrückt werde. Zu diesem Ende sind zunächst folgende neun Gröfsen in die Rechnung einzuführen:

$$2.\quad \begin{cases} A = c'b'' - c''b', & B = a'c'' - a''c', & C = b'a'' - b''a', \\ A' = c''b - cb'', & B' = a''c - ac'', & C' = b''a - ba'', \\ A'' = cb' - c'b, & B'' = ac' - a'c, & C'' = ba' - b'a, \end{cases}$$

welche so bestimmt sind, dafs

$$3.\quad \begin{cases} Aa' + Bb' + Cc' = 0, & A'a + B'b + C'c = 0, & A''a + B''b + C''c = 0, \\ Aa'' + Bb'' + Cc'' = 0, & A'a'' + B'b'' + C'c'' = 0, & A''a' + B''b' + C''c' = 0. \end{cases}$$

Wird nun gesetzt

$$4.\quad \begin{cases} A\,a + B\,b + C\,c = \mathfrak{M}, & \text{so ist auch} \\ A'\,a' + B'\,b' + C'\,c' = \mathfrak{M}, \\ A''a'' + B''b'' + C''c'' = \mathfrak{M}, \\ A\,a + A'\,a' + A''a'' = \mathfrak{M}, \\ B\,b + B'\,b' + B''b'' = \mathfrak{M}, \\ C\,c + C'\,c' + C''c'' = \mathfrak{M}. \end{cases}$$

Durch Einsetzung der Werthe von A, B, C u. s. f. aus (2.), mit Rücksicht auf die Gleichungen (1.), wird erhalten:

$$5.\quad \begin{cases} A^2 + B^2 + C^2 = \sin\omega^2, \\ A'^2 + B'^2 + C'^2 = \sin\omega'^2, \\ A''^2 + B''^2 + C''^2 = \sin\omega''^2; \end{cases}$$

$$6.\quad \begin{cases} A'A'' + B'B'' + C'C'' = \cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega, \\ AA'' + BB'' + CC'' = \cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega', \\ AA' + BB' + CC' = \cos\omega\cos\omega' - \cos\omega''; \end{cases}$$

$$7.\quad \begin{cases} A'B-AB' = c''\,\mathfrak{M}, & AB''-A''B = c'\,\mathfrak{M}, & A''B'-A'B'' = c\,\mathfrak{M}, \\ AC'-A'C = b''\,\mathfrak{M}, & A''C-AC'' = b'\,\mathfrak{M}, & A'C''-A''C' = b\,\mathfrak{M}, \\ B'C-BC' = a''\,\mathfrak{M}, & BC''-B''C = a'\,\mathfrak{M}, & B''C'-B'C'' = a\,\mathfrak{M}. \end{cases}$$

Werden die Gleichungen (7.) sämmtlich quadrirt, und die Quadrate der in einer Reihe von oben nach unten stehenden addirt, so erhält man, mit Hülfe der Gleichungen (5.), (6.) und der ersten drei Gleichungen (1.),

$$8.\quad \begin{cases} \mathfrak{M}^2 = \sin\omega^2\,\sin\omega'^2 - (\cos\omega\,\cos\omega' - \cos\omega'')^2 \\ \quad = \sin\omega^2\,\sin\omega''^2 - (\cos\omega\,\cos\omega'' - \cos\omega')^2 \\ \quad = \sin\omega'^2\sin\omega''^2 - (\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega)^2, \\ \mathfrak{M}^2 = 1 - \cos\omega^2 - \cos\omega'^2 - \cos\omega''^2 + 2\cos\omega\,\cos\omega'\cos\omega''. \end{cases}$$

Die Bogen ω, ω', ω'' bilden ein sphärisches Dreieck; ihre Gegenwinkel sollen der Reihe nach ε, ε', ε'' heifsen.

Man hat

$$9.a.\quad \begin{cases} \cos\omega'' = \cos\omega\,\cos\omega' + \sin\omega\,\sin\omega'\,\cos\varepsilon'', \\ \cos\omega' = \cos\omega\,\cos\omega'' + \sin\omega\,\sin\omega''\cos\varepsilon', \\ \cos\omega\ = \cos\omega'\cos\omega'' + \sin\omega'\sin\omega''\cos\varepsilon, \end{cases}$$

$$\mathfrak{M}^2 = (\sin\omega\sin\omega'\sin\varepsilon'')^2 = (\sin\omega\sin\omega''\sin\varepsilon')^2 = (\sin\omega'\sin\omega''\sin\varepsilon)^2.$$

Wird daher $\sin\omega'\sin\varepsilon'' = \sin\omega''\sin\varepsilon' = \sin h$ gesetzt, so ist h die Höhe des sphärischen Dreiecks über der Grundlinie ω, und

$$9.b.\quad \mathfrak{M} = \pm\sin\omega\sin h,$$

positiv oder negativ, je nachdem die Spitze auf der einen oder der andern Seite der Grundlinie liegt.

Werden nun die Gleichungen (1.) differentiirt, dabei aber ω, ω', ω'' als beständig angesehen, so folgt:

$$10.\quad a\,da + b'\,db + c\,dc = 0,$$
$$11.\quad a'\,da' + b'\,db' + c'\,dc' = 0,$$
$$12.\quad a''da'' + b''db'' + c''dc'' = 0,$$
$$13.\quad d(a'a'') + d(b'b'') + d(c'c'') = 0,$$
$$14.\quad d(a\,a'') + d(b\,b'') + d(c\,c'') = 0,$$
$$15.\quad d(a\,a') + d(b\,b') + d(c\,c') = 0.$$

Es sollen nun zunächst durch die drei Differenziale da, db, da', die sämmtlichen sechs übrigen ausgedrückt werden.

Den Ausdruck für dc giebt die Gleichung (10.).

Multiplicirt man (10.) mit $-c'c'$, (11.) mit $-cc$, (15.) mit $+cc'$, und addirt die Producte, so erhält man für db':

$$16.\quad B''(c\,da' - c'\,da) = A''(c\,db' - c'\,db.)$$

Wird durch Verbindung von (11.) mit (16.) db' weggeschafft, so ergiebt sich:

$$17. \quad B''b'da + C''c\,da' = A''(b'db + c\,dc').$$

Werden aus den Gleichungen (12.), (13.), (14.) db'' und dc'' weggeschafft, so kommt:

$$a''(A\,da + A'da') + b''(A\,db + A'db') + c''(A\,dc + A'dc') + \mathfrak{M}\,da'' = 0.$$

Schafft man wiederum aus dieser Gleichung durch (10.) und (11.) dc und dc' weg, so folgt:

$$AB'c'da - A'Bc\,da' + AA'(c\,db' - c'db) + \mathfrak{M}c'da'' = 0.$$

Wird in dieser Gleichung der Werth von $c\,db' - c'db$ aus (16.) gesetzt, so findet man für da'':

$$18. \quad A\,da + A'da' + A''da'' = 0.$$

Die beiden folgenden Gleichungen dienen um db'' und dc'' auszudrücken:

$$19. \quad B'(c'da - c\,da') = A''(c\,db'' - c''db),$$

$$20. \quad (B'b' - Aa)da + C'c\,da' + A''(b''db + c\,dc'') = 0.$$

Es sollen ferner die Differentiale dA, dA', dA'' entwickelt werden. Man erhält aus (2.):

$$dA'' = b'dc + c\,db' - c'db - b\,dc'.$$

Dieser Werth, auf die unabhängigen Differentiale zurückgeführt, wird, da von ihnen das eine (db) herausfällt:

$$A''dA'' = (C''b' - B''c')da + (B''c - C''b)da'.$$

Nun findet man aber leicht, dafs

$$C''b' - B''c' = a'\cos\omega'' - a, \qquad B''c - C''b = a\cos\omega'' - a'.$$

Also folgt

$$21. \quad A''dA'' = (a'\cos\omega'' - a)da + (a\cos\omega'' - a')da'.$$

Ebenfalls findet sich der Werth von dA', auf die Differentiale da, da' zurückgeführt, unabhängig von db; nämlich

$$22. \quad A''dA' = (a\cos\omega - a''\cos\omega'')da + (a'' - a\cos\omega')da'.$$

Einer der Gleichungen (4.) zufolge ist:

$$d(Aa) + d(A'a') + d(A''a'') = 0.$$

Diese Gleichung mit (18.) verglichen, giebt:

$$23. \quad a\,dA + a'dA' + a''dA'' = 0.$$

Durch Verbindung der Gleichungen (21.), (22.), (23.), wird erhalten:

$$24. \quad A''dA = (a'' - a'\cos\omega)da + (a'\cos\omega' - a''\cos\omega'')da'.$$

Durch Vertauschung von A' mit A'', a' mit a'', erhält man aus (22.):

$$25. \quad A'dA'' = (a\cos\omega - a'\cos\omega')da + (a' - a\cos\omega'')da''.$$

Die Addition von (22.) und (25.) giebt:

$$26. \quad d(A'A'') = (2a\cos\omega - a'\cos\omega' - a''\cos\omega'')\,da + (a'' - a\cos\omega')\,da' + (a' - a\cos\omega'')\,da''.$$

Aus den Gleichungen (21.) und (26.) folgt durch Integration:

$$A''^2 = 2aa'\cos\omega'' - a^2 - a'^2 + \text{const.},$$
$$A'A'' = a^2\cos\omega + a'a'' - aa'\cos\omega' - aa''\cos\omega'' + \text{const.}$$

Um die Constanten zu bestimmen, bemerke man, dafs die vorstehenden Gleichungen auch gelten müssen, wenn in ihnen die Buchstaben a, A mit b, B und mit c, C vertauscht werden.

Man hat daher:

$$A''^2 = 2aa'\cos\omega'' - a^2 - a'^2 + \text{const.},$$
$$B''^2 = 2bb'\cos\omega'' - b^2 - b'^2 + \text{const.},$$
$$C''^2 = 2cc'\cos\omega'' - c^2 - c'^2 + \text{const.},$$

in welchen Ausdrücken die beständige Gröfse eine und dieselbe ist. Der Werth derselben findet sich durch Addition gleich $\sin\omega''^2$; mithin hat man:

$$27. \quad A''^2 = 2aa'\cos\omega'' - a^2 - a'^2 + \sin\omega''^2,$$

desgleichen

$$28. \quad A'^2 = 2aa''\cos\omega' - a^2 - a''^2 + \sin\omega'^2,$$
$$29. \quad A^2 = 2a'a''\cos\omega - a'^2 - a''^2 + \sin\omega^2.$$

Durch dieselbe Vertauschung der Buchstaben und Addition findet sich der Werth der beständigen Gröfse in dem Ausdrucke für $A'A''$:

$$\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega.$$

Mithin ist:

$$A'A'' = a'a'' + a^2\cos\omega - aa'\cos\omega' - aa''\cos\omega'' + \cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega,$$

oder

$$30. \quad A'A'' = (a' - a\cos\omega'')(a'' - a\cos\omega') + (1 - a^2)(\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega),$$

desgleichen

$$31. \quad AA'' = (a - a'\cos\omega'')(a'' - a'\cos\omega) + (1 - a'^2)(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega'),$$
$$32. \quad AA' = (a - a''\cos\omega')(a' - a''\cos\omega) + (1 - a''^2)(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'').$$

Werden die Gröfsen A', A'' durch Verbindung der Gleichungen (27.), (28.), (30.) weggeschafft, so kommt, nach gehöriger Entwickelung:

$$33. \quad a^2\sin\omega^2 + a'^2\sin\omega'^2 + a''^2\sin\omega''^2 + 2aa'(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'')$$
$$+ 2aa''(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega') + 2a'a''(\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega) = \mathfrak{M}^2.$$

Diese Gleichung ist die bekannte Relation zwischen den sechs Winkeln, welche vier Richtungen mit einander bilden, oder die Relation zwischen den vier Seiten und den beiden Diagonalen eines sphärischen Vierecks.

Aus (33.) ergiebt sich die Gleichung:

$$34. \qquad K da + K' da' + K'' da'' = 0,$$

worin gesetzt ist:

$$K = a \sin\omega^2 + a'(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'') + a''(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega'),$$
$$K' = a(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'') + a'\sin\omega'^2 + a''(\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega),$$
$$K'' = a(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega') + a'(\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega) + a''\sin\omega''^2.$$

Da zwischen den in der Gleichung (33.) vorkommenden sechs Stücken nur eine Relation statt findet; so mufs das Differenzial (34.) mit (18.) übereinstimmen. Wird daher durch f ein vorläufig noch unbekannter Factor bezeichnet, so mufs sein:

$$K = Af, \qquad K' = A'f, \qquad K'' = A''f.$$

Um f zu bestimmen, bemerke man, dafs zufolge (4.) und (33.)

$$Aa + A'a' + A''a'' = \mathfrak{M},$$
$$Ka + K'a' + K''a'' = \mathfrak{M}^2,$$

woraus sich ergiebt:

$$f = \mathfrak{M}.$$

Das Ergebnifs der Rechnung ist mithin folgendes:

$$35. \quad \mathfrak{M}A = a\sin\omega^2 + a'(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'') + a''(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega'),$$
$$36. \quad \mathfrak{M}A' = a(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'') + a'\sin\omega'^2 + a''(\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega),$$
$$37. \quad \mathfrak{M}A'' = a(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega') + a'(\cos\omega'\cos\omega'' - \cos\omega) + a''\sin\omega''^2.$$

Es versteht sich, dafs diese Gleichungen auch gelten, wenn in ihnen die Buchstaben a, A mit b, B und mit c, C gehörig vertauscht werden.

Die so erhaltenen Werthe der neun Gröfsen

$$A \quad B \quad C \quad A' \quad B' \quad C' \quad A'' \quad B'' \quad C''$$

liefern die Mittel, um die vorgelegten neun Cosinus auf die verlangte Weise auszudrücken.

Werden nämlich mit Φ, ψ, θ drei veränderliche Winkel bezeichnet, und gesetzt:

$$a'' = \cos\Phi\cos\psi + \sin\Phi\sin\psi\cos\theta,$$
$$b'' = -\cos\Phi\sin\psi + \sin\Phi\cos\psi\cos\theta,$$
$$c'' = \sin\Phi\sin\theta,$$
$$a' = \cos(\Phi+\omega).\cos\psi + \sin(\Phi+\omega).\sin\psi\cos\theta,$$
$$b' = -\cos(\Phi+\omega).\sin\psi + \sin(\Phi+\omega).\cos\psi\cos\theta,$$
$$c' = \sin(\Phi+\omega).\sin\theta,$$

so befriedigen diese Formeln, deren Ableitung aus der sphärischen Trigonometrie leicht zu erkennen ist, drei von den sechs Gleichungen (1.).

Vermittelst derselben findet man die Werthe von A, B, C, nach (2.) berechnet:

$$A = -\sin\psi\sin\theta\sin\omega,$$
$$B = -\cos\psi\sin\theta\sin\omega,$$
$$C = +\cos\theta\sin\omega.$$

Werden nun die Werthe von A, a', a'' in (35.) gesetzt, so ergiebt sich a. Durch Vertauschung der Buchstaben A, a mit B, b in (35.) und Einsetzung der Werthe von B, b', b'' in die erhaltene Gleichung wird b, und auf ähnliche Weise durch Einführung der Buchstaben C, c der Werth von c gefunden.

Dieses zusammenfassend und zur Abkürzung setzend:

$$38.\quad \begin{cases} \cos\Phi\cos\psi + \sin\Phi\sin\psi\cos\theta = g, \\ -\sin\Phi\cos\psi + \cos\Phi\sin\psi\cos\theta = f, \\ -\cos\Phi\sin\psi + \sin\Phi\cos\psi\cos\theta = k, \\ \sin\Phi\sin\psi + \cos\Phi\cos\psi\cos\theta = t, \end{cases}$$

erhält man:

$$39.\quad a'' = g, \qquad b'' = k, \qquad c'' = \sin\Phi\sin\theta,$$

$$40.\quad a' = g\cos\omega + f\sin\omega, \quad b' = k\cos\omega + t\sin\omega, \quad c' = \sin(\Phi+\omega).\sin\theta,$$

$$41.\quad \begin{cases} a\sin\omega = g\cos\omega'\sin\omega + f(\cos\omega'' - \cos\omega\cos\omega') - \mathfrak{M}\sin\psi\sin\theta, \\ b\sin\omega = k\cos\omega'\sin\omega + t(\cos\omega'' - \cos\omega\cos\omega') - \mathfrak{M}\cos\psi\sin\theta, \\ c\sin\omega = \sin\Phi\sin\theta\cos\omega'\sin\omega + \cos\Phi\sin\theta(\cos\omega'' - \cos\omega\cos\omega') + \mathfrak{M}\cos\theta, \end{cases}$$

$$42.\quad A = -\sin\psi\sin\theta\sin\omega, \quad B = -\cos\psi\sin\theta\sin\omega, \quad C = +\cos\theta\sin\omega,$$

$$43.\quad \begin{cases} A'\sin\omega = -\sin\psi\sin\theta(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'') + \mathfrak{M}f, \\ B'\sin\omega = -\cos\psi\sin\theta(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'') + \mathfrak{M}t, \\ C'\sin\omega = +\cos\theta\,(\cos\omega\cos\omega' - \cos\omega'') + \mathfrak{M}\cos\Phi\sin\theta, \end{cases}$$

$$44.\quad \begin{cases} A''\sin\omega = -\sin\psi\sin\theta\,(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega') + \mathfrak{M}(g\sin\omega - f\cos\omega), \\ B''\sin\omega = -\cos\psi\sin\theta\,(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega') + \mathfrak{M}(k\sin\omega - t\cos\omega), \\ C''\sin\omega = +\cos\theta\,(\cos\omega\cos\omega'' - \cos\omega') - \mathfrak{M}\cos(\Phi+\omega).\sin\theta. \end{cases}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (9.) können die vorstehenden Ausdrücke etwas vereinfacht werden, wenn man für $\mathfrak{M}$ schreibt: $-\sin\omega.\sin h$,

$$a'' = g, \qquad b'' = k, \qquad c'' = \sin\Phi\sin\theta,$$

$$a' = g\cos\omega + f\sin\omega, \quad b' = k\cos\omega + t\sin\omega, \quad c' = \sin(\Phi+\omega).\sin\theta,$$

$$45.\quad \begin{cases} a = g\cos\omega' + f\sin\omega'\cos\varepsilon'' + \sin\psi\sin\theta\sin h, \\ b = k\cos\omega' + t\sin\omega'\cos\varepsilon'' + \cos\psi\sin\theta\sin h, \\ c = \sin\Phi\sin\theta\cos\omega' + \cos\Phi\sin\theta\sin\omega'\cos\varepsilon'' - \cos\theta\sin h, \end{cases}$$

$$A = -\sin\psi\sin\theta\sin\omega, \quad B = -\cos\psi\sin\theta\sin\omega, \quad C = +\cos\theta\sin\omega,$$

$$46.\quad \begin{cases} A' = -f\sin h + \sin\psi\sin\theta\sin\omega'\cos\varepsilon'', \\ B' = -t\sin h + \cos\psi\sin\theta\sin\omega'\cos\varepsilon'', \\ C' = -\cos\Phi\sin\theta\sin h - \cos\theta\sin\omega'\cos\varepsilon'', \end{cases}$$

$$47.\quad \begin{cases} A'' = (f\cos\omega - g\sin\omega)\sin h + \sin\psi\sin\theta\sin\omega''\cos\varepsilon', \\ B'' = (t\cos\omega - k\sin\omega)\sin h + \cos\psi\sin\theta\sin\omega''\cos\varepsilon', \\ C'' = +\cos\Phi + \omega.\sin\theta\sin h - \cos\theta\sin\omega''\cos\varepsilon'. \end{cases}$$

Die Werthe von a'', b'', c'', a', b', c', a, b, c aus (39.), (40.), (41.) in die Gleichungen (1.) gesetzt, thun denselben vollständig Genüge, ohne Rücksicht auf die Werthe von ψ, Φ, θ.

Das vorgelegte System, wie es auch beschaffen sei, läfst sich immer auf eine einzelne Kraft und ein Kräftepaar (in dem Sinne der von Herrn Poinsot aufgestellten Theorie) zurückführen. Es wird angenommen, dafs die einzelne Kraft nicht Null ist, und unter dieser Voraussetzung ihre Gröfse als Maafs der übrigen Kräfte angesehen. Heifsen nun die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtung mit den drei Coordinaten-Axen einschliefst, l, m, n; so drücken diese Cosinus zugleich die Componenten jener Kraft nach den drei Axen aus. Wird ferner das Kräftepaar nach drei auf die Axen x, y, z senkrechten Ebenen auf die bekannte Weise zerlegt in die Paare L, M, N, und werden noch die festen Angriffspuncte der Kräfte P, P_1, u. s. f. durch die Coordinaten x, y, z; x_1, y_1, z_1; u. s. f. bestimmt; so hat man zwischen allen diesen Gröfsen die sechs folgenden Gleichungen, deren abgekürzte Andeutung hier hinreicht, nämlich:

$$48.\quad l = \Sigma Pa, \qquad m = \Sigma Pb, \qquad n = \Sigma Pc,$$

$$49.\quad L = \Sigma P(bz - cy), \quad M = \Sigma P(cx - az), \quad N = \Sigma P(ay - bx).$$

In diese Gleichungen müssen die Werthe der Cosinus a, b, c, a_1, b_1, c_1, u. s. f., ausgedrückt durch Φ, ψ, θ, eingesetzt werden. Um dieselben möglichst zu vereinfachen, nehme man an, dafs der erste und zweite Hülfsstrahl einen rechten Winkel mit einander bilden, also $\omega = \frac{1}{2}\pi$, mithin nach (9.) $\sin\omega'\cos\varepsilon'' = \cos\omega''$ sei.

Die Formeln (45.) geben dann, für die Richtung der Kraft P:

$$50.\quad \begin{cases} a = g\cos\omega' + f\cos\omega'' + \sin\psi\sin\theta\sin h, \\ b = k\cos\omega' + t\cos\omega'' + \cos\psi\sin\theta\sin h, \\ c = \sin\Phi\sin\theta\cos\omega' + \cos\Phi\sin\theta\cos\omega'' - \cos\theta\sin h. \end{cases}$$

Desgleichen für die Kraft P_1:

$$a_1 = g\cos\omega_1' + f\cos\omega_1'' + \sin\psi\sin\theta\sin h_1,$$
$$b_1 = k\cos\omega_1' + t\cos\omega_1'' + \cos\psi\sin\theta\sin h_1,$$
$$c_1 = \sin\Phi\sin\theta\cos\omega_1' + \cos\Phi\sin\theta\cos\omega_1'' - \cos\theta\sin h_1.$$

Allgemein für die Kraft P_n:

$$51.\quad \begin{cases} a_n = g\cos\omega_n' + f\cos\omega_n'' + \sin\psi\sin\theta\sin h_n, \\ b_n = k\cos\omega_n' + t\cos\omega_n'' + \cos\psi\sin\theta\sin h_n, \\ c_n = \sin\Phi\sin\theta\cos\omega_n' + \cos\Phi\sin\theta\cos\omega_n'' - \cos\theta\sin h_n. \end{cases}$$

Man bemerke, dafs

$$\cos\omega'^2 + \cos\omega''^2 + \sin h^2 = 1,$$

und überhaupt

$$52.\quad \cos\omega_n'^2 + \cos\omega_n''^2 + \sin h_n^2 = 1.$$

Werden nun die sämmtlichen Kräfte nach den Richtungen des ersten und zweiten Strahles und einer dritten darauf senkrechten zerlegt, die entstehenden Componenten aber mit Π, Π', Π'' bezeichnet, so ist:

$$53.\quad \Pi = \Sigma P\cos\omega', \qquad \Pi' = \Sigma P\cos\omega'', \qquad \Pi'' = \Sigma P\sin h.$$

Hier bedeutet z. B. das Zeichen $\Sigma P\cos\omega'$ die Summe:

$$P\cos\omega' + P_1\cos\omega_1' + P_2\cos\omega_2 + P_3\cos\omega_3' + \ldots.$$

Bezeichnet man gleichfalls durch $\Sigma Px\cos\omega'$ die Summe

$$Px\cos\omega' + P_1x_1\cos\omega_1' + P_2x_2\cos\omega_2' + P_3x_3\cos\omega_3' + \ldots.,$$

so sind auch die Bedeutungen der Zeichen $\Sigma Px\cos\omega''$, $\Sigma Px\sin h$, $\Sigma Py\cos\omega'$, u. s. f. verständlich. Man setze nun:

$$54.\quad X = \Sigma Px\cos\omega', \qquad X' = \Sigma Px\cos\omega'', \qquad X'' = \Sigma Px\sin h,$$
$$55.\quad Y = \Sigma Py\cos\omega', \qquad Y' = \Sigma Py\cos\omega'', \qquad Y'' = \Sigma Py\sin h,$$
$$56.\quad Z = \Sigma Pz\cos\omega', \qquad Z' = \Sigma Pz\cos\omega'', \qquad Z'' = \Sigma Pz\sin h.$$

Durch Einführung dieser Werthe in (48.) und (49.) wird erhalten:

$$57.\quad \begin{cases} l = \Pi g + \Pi' f + \Pi''\sin\psi\sin\theta, \\ m = \Pi k + \Pi' t + \Pi''\sin\psi\sin\theta, \\ n = \Pi\sin\Phi\sin\theta + \Pi'\cos\Phi\sin\theta - \Pi''\cos\theta. \end{cases}$$

$$58.\quad \begin{cases} L = Zk + Z't + Z''\cos\psi\sin\theta - Y\sin\Phi\sin\theta - Y'\cos\Phi\sin\theta + Y''\cos\theta, \\ M = X\sin\Phi\sin\theta + X'\cos\Phi\sin\theta - X''\cos\theta - Zg - Z'f - Z''\sin\psi\sin\theta, \\ N = Yg + Y'f + Y''\sin\psi\sin\theta - Xk - X't - X''\cos\psi\sin\theta. \end{cases}$$

Bildet man mit Hülfe dieser Ausdrücke den Werth

$$59.\quad V = Ll + Mm + Nn,$$

der bekanntlich das kleinste unter allen möglichen Momenten des zusammengesetzten Paares angiebt, welches kleinste Moment alsdann statt findet, wenn die Ebene des Paares senkrecht auf der Richtung der ein-

zelnen Kraft genommen wird; so kommt nach gehörig ausgeführter Rechnung:

$$60.\quad \begin{cases} V = (\Pi' X - \Pi X')\sin\psi\sin\theta + (\Pi' Y - \Pi Y')\cos\psi\sin\theta - (\Pi' Z - \Pi Z')\cos\theta \\ \quad + (\Pi X'' - \Pi'' X) f + (\Pi Y'' - \Pi'' Y) t + (\Pi Z'' - \Pi'' Z)\cos\Phi\sin\theta \\ \quad + (\Pi'' X' - \Pi' X'') g + (\Pi'' Y' - \Pi' Y'') k + (\Pi'' Z' - \Pi' Z'')\sin\Phi\sin\theta. \end{cases}$$

Werden nun die Kräfte des Systemes auf die oben beschriebene Weise einer beliebigen Drehung des Bündels entsprechend um ihre festen Angriffspuncte gedreht, so kann man die durch den Buchstaben ω mit angehängten Zeigern bezeichneten Winkel, welche ihre Richtungen mit den beiden Hülfsstrahlen bilden, als beständig ansehen, in so fern diese beiden Strahlen mit den übrigen Strahlen des Bündels unwandelbar verbunden gedacht werden. Es verändern sich also durch die Drehung nur die Winkel ψ, θ, Φ, von denen die beiden ersten dienen, um die Lage der durch die beiden Hülfsstrahlen gelegten Ebene zu bestimmen, vermittelst der Gleichung:

$$61.\qquad \sin\psi\sin\theta . x + \cos\psi\sin\theta . y - \cos\theta . z = 0;$$

der dritte (Φ) aber, um die Lage des ersten Strahles in dieser Ebene, oder genauer die Neigung des ersten Strahles gegen den Durchschnitt dieser Ebene mit der Ebene xy, anzugeben.

Einer näheren Betrachtung der Gleichung (60.) kann es nicht entgehen, dafs die Winkel ψ, θ, Φ sich immer auf unendlich viele Arten so bestimmen lassen, dafs

$$62.\qquad V = 0$$

werde, und dafs mithin unzählige Stellungen des Systemes möglich sind, in welchen dessen sämmtliche Kräfte durch eine einzige Kraft, ohne Mitwirkung eines Paares, ersetzt werden können.

Zur Bestimmung der Lage und Richtung dieser Kraft, erhält man zwischen den Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ die Gleichungen:

$$63.\qquad m\bar{z} - n\bar{y} = L, \qquad n\bar{x} - l\bar{z} = M, \qquad l\bar{y} - m\bar{x} = N,$$

welche mit einander verträglich sind vermöge der erfüllten Bedingung

$$V = Ll + Mm + Nn = 0.$$

Stellt man sich nun das System in einer anderen, ebenfalls der Bedingung $V = 0$ genügenden Stellung vor, zu welcher ψ', Φ', θ' als Werthe von ψ, Φ, θ gehören; so erhält man eine zweite Resultante, deren Richtung und Lage durch die den obigen ähnlichen Gleichungen:

64. $m'\bar{z}-n'\bar{y}=L', \quad n'\bar{x}-l'\bar{z}=M', \quad l'\bar{y}-m'\bar{x}=N',$

angegeben wird, in welchen $L'l'+M'm'+N'n'=0$.

Damit nun die beiden Geraden (63.) und (64.) sich schneiden, mufs sein:

65. $$Ll'+L'l+Mm'+M'm+Nn'+N'n=0.$$

Die vollständige Entwickelung dieser Gleichung, die etwas weitläufig ausfällt, ist nicht eben nöthig, um einzusehen, dafs im Allgemeinen zweien beliebigen, jedoch mit der Bedingung $V=0$ verträglichen Stellungen der Kräfte, nicht solche Resultanten zukommen, die sich in irgend einem Puncte schneiden.

Die beiden Hülfsstrahlen wurden bisher zwar mit dem Bündel als fest verbunden angesehen; ihre Stellung aber gegen die übrigen Strahlen war willkürlich angenommen. Für die Folge ist nun nöthig, in den Ausdrücken (53.—56.) für Π, Π', Π'', X, ... Z'', die Bestimmungsstücke der Stellung der Hülfsstrahlen von den übrigen zu sondern, welche den Bedingungen der Aufgabe gemäfs unwandelbar sind. Diese letzteren sind die Neigungen der Strahlen P, P_1, P_2, gegen einander, welche sich vorläufig am bequemsten durch (PP_1), (PP_2), (P_1P_2) u. s. f. bezeichnen lassen.

Wird nun der Gleichförmigkeit wegen gesetzt:

$$h=\tfrac{1}{2}\pi-\omega''', \quad h_1=\tfrac{1}{2}\pi-\omega_1''', \quad h_2=\tfrac{1}{2}\pi-\omega_2''', \text{ u. s. f.,}$$

so sind die Winkel, welche der erste, zweite und ein dritter auf ihnen senkrechter Strahl einschliefsen

mit dem Strahle P: $\omega' \quad \omega'' \quad \omega'''$,
mit dem Strahle P_1: $\omega_1' \quad \omega_1'' \quad \omega_1'''$,
mit dem Strahle P_2: $\omega_2' \quad \omega_2'' \quad \omega_2'''$,
u. s. f.

Es gelten daher zwischen diesen Winkeln folgende Gleichungen:

66.
$$\begin{cases} \cos\omega'^2+\cos\omega''^2+\cos\omega'''^2=1, \\ \cos\omega_1'^2+\cos\omega_1''^2+\cos\omega_1'''^2=1, \\ \cos\omega'\cos\omega_1'+\cos\omega''\cos\omega_1''+\cos\omega'''\cos\omega_1'''=\cos PP_1, \end{cases}$$

67.
$$\begin{cases} \cos\omega_2'^2+\cos\omega_2''^2+\cos\omega_2'''^2=1, \\ \cos\omega'\cos\omega_2'+\cos\omega''\cos\omega_2''+\cos\omega'''\cos\omega_2'''=\cos PP_2, \\ \cos\omega_1'\cos\omega_2'+\cos\omega_1''\cos\omega_2''+\cos\omega_1'''\cos\omega_2'''=\cos P_1P_2, \end{cases}$$

68.
$$\begin{cases} \cos\omega_3'^2+\cos\omega_3''^2+\cos\omega_3'''^2=1, \\ \cos\omega'\cos\omega_3'+\cos\omega''\cos\omega_3''+\cos\omega'''\cos\omega_3'''=\cos PP_3, \\ \cos\omega_1'\cos\omega_3'+\cos\omega_1''\cos\omega_3''+\cos\omega_1'''\cos\omega_3'''=\cos P_1P_3, \end{cases}$$

u. s. f.

Sind überhaupt der Kräfte n, so finden zwischen den $3n$ Neigungswinkeln ihrer Richtungen gegen die drei auf einander senkrechten Hülfsstrahlen, $3n-3$ Bedingungsgleichungen Statt, welche erforderlich und hinreichend sind, um die gegenseitigen Neigungen der Kräfte, wie verlangt wird, unverändert zu erhalten.

Werden nun wieder drei veränderliche Winkel ξ, ζ, η eingeführt, und zur Abkürzung gesetzt:

$$\begin{aligned}
\cos\zeta\cos\xi + \sin\zeta\sin\xi\cos\eta &= G,\\
-\sin\zeta\cos\xi + \cos\zeta\sin\xi\cos\eta &= F,\\
-\cos\zeta\sin\xi + \sin\zeta\cos\xi\cos\eta &= K,\\
\sin\zeta\sin\xi + \cos\zeta\cos\xi\cos\eta &= T,\\
\cos P_1P_2 &= \cos PP_1.\cos PP_2 + \sin PP_1.\sin PP_2.\cos k_2,\\
\cos P_1P_3 &= \cos PP_1.\cos PP_3 + \sin PP_1.\sin PP_3.\cos k_3,
\end{aligned}$$

u. s. f.

$PP_1 = \pi_1$, $PP_2 = \pi_2$, $PP_3 = \pi_3$, überhaupt $PP_n = \pi_n$, so erhält man, den Ausdrücken (39.—41.) gemäfs, um den Bedingungen (66.), (67.), (68.), u. s. f. in voller Allgemeinheit zu genügen:

$$\begin{aligned}
\cos\omega' &= G, \quad \cos\omega'' = K, \quad \cos\omega''' = \sin\zeta\sin\eta,\\
\cos\omega_1' &= G\cos\pi_1 + F\sin\pi_1, \quad \cos\omega_1'' = K\cos\pi_1 + T\sin\pi_1,\\
\cos\omega_1''' &= \sin\zeta\sin\eta\cos\pi_1 + \cos\zeta\sin\eta\sin\pi_1,\\
\cos\omega_2' &= G\cos\pi_2 + F\sin\pi_2\cos k_2 + \sin\xi\sin\eta\sin\pi_2\sin k_2,\\
\cos\omega_2'' &= K\cos\pi_2 + T\sin\pi_2\cos k_2 + \cos\xi\sin\eta\sin\pi_2\sin k_2,\\
\cos\omega_2''' &= \sin\zeta\sin\eta\cos\pi_2 + \cos\zeta\sin\eta\sin\pi_2\cos k_2 - \cos\eta\sin\pi_2\sin k_2.
\end{aligned}$$

Eben so für die Cosinus der übrigen Winkel ω_3', ω_3'', u. s. f.

Die Allgemeinheit dieser Ausdrücke ist jedoch in dem gegenwärtigen Falle entbehrlich, weil es nur darauf ankommt, den Gleichungen (66.), (67.), ... auf eine gewisse besondere Weise Genüge zu leisten. Nämlich es werde als erster Strahl die Projection des Strahles P auf die Ebene der beiden Hülfsstrahlen angenommen, so dafs der zweite Hülfsstrahl nicht allein senkrecht auf dem ersten, sondern auch auf dem Strahle P stehe, mithin $\cos\omega'' = 0$ sei. Daher wird $K = 0$ und mithin

$$\operatorname{tang}\xi = \operatorname{tang}\zeta\cos\eta.$$

Um dieser Bedingung zu genügen, führe man zwei neue veränderliche Winkel λ und u ein, so bestimmt, dafs:

$$\sin\zeta\sin\eta = \cos\lambda, \quad \cos\zeta\sin\eta = \sin\lambda\cos u, \quad \cos\eta = \sin\lambda\sin u;$$

wodurch zugleich wird:

$$\sin\xi\sin\eta = \cos\lambda\sin u, \qquad \cos\xi\sin\eta = \cos u,$$

$$G = \sin\lambda, \qquad F = -\cos\lambda\cos u, \qquad K = 0, \qquad T = \sin u,$$

69. $$\cos\omega' = \sin\lambda, \quad \cos\omega'' = 0, \quad \cos\omega''' = \cos\lambda,$$

70.
$$\begin{cases} \cos\omega_1' &= \sin\lambda\cos\pi_1 - \cos\lambda\cos u\sin\pi_1, \\ \cos\omega_1'' &= \sin u\sin\pi_1, \\ \cos\omega_1''' &= \cos\lambda\cos\pi_1 + \sin\lambda\cos u\sin\pi_1, \end{cases}$$

71.
$$\begin{cases} \cos\omega_2' &= \sin\lambda\cos\pi_2 - \cos\lambda\cos(u+k_2).\sin\pi_2, \\ \cos\omega_2'' &= \sin(u+k_2).\sin\pi_2 \\ \cos\omega_2''' &= \cos\lambda\cos\pi_2 + \sin\lambda\cos(u+k_2).\sin\pi_2. \end{cases}$$

Allgemein:

72.
$$\begin{cases} \cos\omega_n' &= \sin\lambda\cos\pi_n - \cos\lambda\cos(u+k_n).\sin\pi_n, \\ \cos\omega_n'' &= \sin(u+k_n).\sin\pi_n, \\ \cos\omega_n''' &= \cos\lambda\cos\pi_n + \sin\lambda\cos(u+k_n).\sin\pi_n, \end{cases}$$

welche Ausdrücke sich auch sämmtlich auf trigonometrischem Wege, mit Hülfe der Zeichnung, sehr leicht ergeben.

Werden nun die Kräfte zerlegt nach drei auf einander senkrechten Richtungen, von denen die erste parallel mit P, die zweite senkrecht darauf in der Ebene PP_1 gelegen ist, und heifsen die Summen der Seitenkräfte p, q, r; so ergeben sich dafür die Ausdrücke:

73.
$$\begin{cases} p = P + P_1\cos\pi_1 + P_2\cos\pi_2 + P_3\cos\pi_3 + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ q = \quad P_1\sin\pi_1 + P_2\sin\pi_2\cos k_2 + P_3\sin\pi_3\cos k_3 + \ldots. \\ r = \quad P_2\sin\pi_2\sin k_2 + P_3\sin\pi_3\sin k_3 + \ldots. \end{cases}$$

welche sich abgekürzt schreiben lassen:

74. $$p = \Sigma P_n\cos\pi_n, \quad q = \Sigma P_n\sin\pi_n\cos k_n, \quad r = \Sigma P_n\sin\pi_n\sin k_n,$$

wenn man nicht unterläfst $\cos\pi_0 = 1$, $\sin\pi_0 = 0$, $\cos k_1 = 1$, $\sin k_1 = 0$ anzusetzen. In demselben Sinne sei auch:

75.
$$\begin{cases} p' = \Sigma P_n x_n\cos\pi_n, & q' = \Sigma P_n x_n\sin\pi_n\cos k_n, & r' = \Sigma P_n x_n\sin\pi_n\sin k_n, \\ p'' = \Sigma P_n y_n\cos\pi_n, & q'' = \Sigma P_n y_n\sin\pi_n\cos k_n, & r'' = \Sigma P_n y_n\sin\pi_n\sin k_n, \\ p''' = \Sigma P_n z_n\cos\pi_n, & q''' = \Sigma P_n z_n\sin\pi_n\cos k_n, & r''' = \Sigma P_n z_n\sin\pi_n\sin k_n. \end{cases}$$

Hierdurch erhält man aus (53.) — (56.):

76.
$$\begin{cases} \Pi &= p\sin\lambda - q\cos\lambda\cos u + r\cos\lambda\sin u, \\ \Pi' &= \quad q\sin u + r\cos u, \\ \Pi'' &= p\cos\lambda + q\sin\lambda\cos u - r\sin\lambda\sin u, \end{cases}$$

77.
$$\begin{cases} X &= p'\sin\lambda - q'\cos\lambda\cos u + r'\cos\lambda\sin u, \\ X' &= \quad q'\sin u + r'\cos u, \\ X'' &= p'\cos\lambda + q'\sin\lambda\cos u - r'\sin\lambda\sin u, \end{cases}$$

$$78.\quad \begin{cases} Y &= p'' \sin\lambda - q'' \cos\lambda \cos u + r'' \cos\lambda \sin u, \\ Y' &= \qquad\qquad q'' \sin u + r'' \cos u, \\ Y'' &= p'' \cos\lambda + q'' \sin\lambda \cos u + r'' \sin\lambda \sin u, \end{cases}$$

$$79.\quad \begin{cases} Z &= p''' \sin\lambda - q''' \cos\lambda \cos u + r''' \cos\lambda \sin u, \\ Z' &= \qquad\qquad q''' \sin u + r''' \cos u, \\ Z'' &= p''' \cos\lambda + q''' \sin\lambda \cos u - r''' \sin\lambda \sin u. \end{cases}$$

In diesen Ausdrücken sind nur die Winkel λ und u als unbestimmt und veränderlich, alle übrigen Gröfsen aber als unwandelbar gegeben anzusehen. Es sollen nun λ, u, ψ, θ so bestimmt werden, dafs vermittelst der Drehung das System der Kräfte und zugleich die Ebene der beiden Hülfsstrahlen solche Stellungen im Raume erhalten, in welchen:

erstens das ganze System der Kräfte durch eine einzige Kraft ersetzt werden könne, mithin $V = 0$ sei;

zweitens nach Zerlegung jeder der Kräfte in zwei Seitenkräfte, die eine parallel der Ebene des ersten und zweiten Hülfsstrahles, die andere senkrecht darauf, die letzteren unter sich im Gleichgewichte seien.

Unter diesen Umständen wird offenbar die Resultante des ganzen Systemes der Ebene der beiden Hülfsstrahlen parallel sein.

Die Bedingungen, welchen die Winkel λ, u, ψ, θ unterworfen werden sollen, sind demnach folgende:

$$80.\qquad \Pi'' = 0,$$

$$81.\quad \begin{cases} Z'' \cos\psi \sin\theta + Y'' \cos\theta &= 0, \\ X'' \cos\theta + Z'' \sin\psi \sin\theta &= 0, \\ Y'' \sin\psi - X'' \cos\psi &= 0. \end{cases}$$

Von den vorstehenden drei Gleichungen (81.) ist jede, wie man sieht, eine Folge der beiden andern. Vermöge derselben verschwinden in (57.) (58.) Π'', X'', Y'', Z''; diese Gröfsen fallen daher auch aus der Gleichung (60.) heraus, welche übergeht in:

$$82.\quad V = (\Pi' X - \Pi X') \sin\psi \sin\theta + (\Pi' Y - \Pi Y') \cos\psi \sin\theta - (\Pi' Z - \Pi Z') \cos\theta = 0,$$

und mithin unabhängig von φ geworden ist.

Werden nun aus (82.) mit Hülfe der Gleichungen (81.) die Winkel ψ und θ weggeschafft, so kommt:

$$83.\quad X''(\Pi' X - \Pi X') + Y''(\Pi' Y - \Pi Y') + Z''(\Pi' Z - \Pi Z') = 0.$$

Diese Gleichung verbunden mit $\Pi'' = 0$ dient zur Bestimmung von λ und u. Es werde zur Abkürzung gesetzt:

$$84.\quad \begin{cases} p'q-q'p=\varrho', & r'p-p'r=k', & q'r-r'q=\pi', \\ p''q-q''p=\varrho'', & r''p-p''r=k'', & q''r-r''q=\pi'', \\ p'''q-q'''p=\varrho''', & r'''p-p'''r=k''', & q'''r-r'''q=\pi''', \end{cases}$$

$$85.\quad \begin{cases} pp'+qq'+rr'=Q', \\ pp''+qq''+rr''=Q'', \\ pp'''+qq'''+rr'''=Q''', \end{cases}$$

so ergiebt sich:

$$86.\quad \begin{cases} \Pi'X-\Pi X'=\varrho'\sin\lambda\sin u-k'\sin\lambda\cos u-\pi'\cos\lambda, \\ \Pi'Y-\Pi Y'=\varrho''\sin\lambda\sin u-k''\sin\lambda\cos u-\pi''\cos\lambda, \\ \Pi'Z-\Pi Z'=\varrho'''\sin\lambda\sin u-k'''\sin\lambda\cos u-\pi'''\cos\lambda. \end{cases}$$

Wird aus diesen Ausdrücken $\cos\lambda$ mit Hülfe der Gleichung $\Pi''=0$ oder:

$$87.\quad p\cos\lambda=(r\sin u-q\cos u)\sin\lambda$$

weggeschafft, so kommt zunächst:

$$p(\Pi'X-\Pi X')=[(p\varrho'-r\pi')\sin u+(q\pi'-pk')\cos u]\sin\lambda.$$

Nun ist aber, weil nach der angenommenen Einheit der Kräfte $p^2+q^2+r^2=1$,

$$\begin{aligned} p\varrho'-r\pi' &= Q'q-q', \\ q\pi'-pk' &= Q'r-r'. \end{aligned}$$

Mithin

$$88.\quad \begin{cases} p(\Pi'X-\Pi X')=[(Q'q-q')\sin u+(Q'r-r')\cos u]\sin\lambda, \text{ desgleichen} \\ p(\Pi'Y-\Pi Y')=[(Q''q-q'')\sin u+(Q''r-r'')\cos u]\sin\lambda, \\ p(\Pi'Z-\Pi Z')=[(Q'''q-q''')\sin u+(Q'''r-r''')\cos u]\sin\lambda. \end{cases}$$

Auf ähnliche Weise erhält man, durch Wegschaffung von $\cos\lambda$, aus (77.), (78.), (79.),

$$89.\quad \begin{cases} -pX''=(\varrho'\cos u+k'\sin u)\sin\lambda, \\ -pY''=(\varrho''\cos u+k''\sin u)\sin\lambda, \\ -pZ''=(\varrho'''\cos u+k'''\sin u)\sin\lambda. \end{cases}$$

Es ergiebt sich daher zur Bestimmung von u, nach Weglassung des unbrauchbaren Factors $\sin\lambda^2$, aus (83.) die Gleichung:

$$90.\quad \left\{ \begin{aligned} &(\varrho'\cos u+k'\sin u)((Q'r-r')\cos u+(Q'q-q')\sin u) \\ +&(\varrho''\cos u+k''\sin u)((Q''r-r'')\cos u+(Q''q-q'')\sin u) \\ +&(\varrho'''\cos u+k'''\sin u)((Q'''r-r''')\cos u+(Q'''q-q''')\sin u) \end{aligned} \right\}=0.$$

Die Gleichung der Ebene der beiden Hülfsstrahlen (61.) war:

$$\sin\psi\sin\theta.x+\cos\psi\sin\theta.y-\cos\theta.z=0.$$

Werden aus derselben vermittelst (81.) die Winkel ψ und θ weggeschafft, so kommt:

$$X''x+Y''y+Z''z=0,$$

daher vermöge (89.):

91. $(\varrho' \cos u + k' \sin u)x + (\varrho'' \cos u + k'' \sin u)y + (\varrho''' \cos u + k''' \sin u)z = 0.$

Zufolge dieser Gleichung hängt die Lage der Ebene der beiden Hülfsstrahlen, welche den durch die Formeln (80.) (81.), (82.) ausgedrückten Bedingungen Genüge leistet, von dem Werthe von $\tang u$, dieser aber nach (90.) von einer quadratischen Gleichung ab. Man darf daher schliefsen, dafs es im Allgemeinen zwei verschiedene Ebenen giebt, welche den gestellten Anforderungen genügen; dafs diese jedoch in eine einzige zusammenfallen können, wenn die Wurzeln der Gleichung (90.) (d. i. die Werthe von $\tang u$) einander gleich sind, und dafs sie auch beide fehlen können, wenn die Wurzeln der Gleichung (90.) fehlen. Sobald es aber gelingt, den Winkel u aus der Gleichung (90.) zu bestimmen, so liefern die Gleichungen (87.), (81.) immer brauchbare Werthbestimmungen für λ, ψ, θ. Durch Einsetzung der Werthe von λ und u in die Gleichungen (70.), (71.), (72.) ergeben sich sodann die erforderlichen Stellungen der sämmtlichen Kräfte des Systems gegen die Ebene der beiden Hülfsstrahlen (91.).

Man bringe nun die Kräfte des Systemes und mit ihnen zugleich das Bündel ihrer Richtungsstrahlen in die oben bestimmte Stellung gegen die Ebene der beiden Hülfsstrahlen, deren Lage durch die Gleichung (91.) gegeben ist, und errichte aus der Spitze des Bündels ein Loth auf der genannten Ebene. Da nun die Bedingungen, von welchen die Stellung des Bündels gegen diese Ebene abhängt, den Winkel Φ nicht enthalten, und mithin die Lage der beiden auf einander senkrechten Hülfsstrahlen in ihrer Ebene willkürlich bleibt; so werden dieselben auch dann noch befriedigt sein, wenn das Bündel beliebig um das erwähnte Loth als um eine feste Axe gedreht wird, und mit ihm zugleich die Kräfte des Systemes ihre Richtungen auf die entsprechende Weise verändern. Es wird daher das System während der Drehung nicht aufhören eine Resultante zu haben, und die Richtung derselben auf der Drehungsaxe des Bündels fortwährend senkrecht sein. Für die Lage dieser Resultante gelten die Gleichungen (63.), in welchen zu setzen ist:

92. $l = \Pi g + \Pi' f, \quad m = \Pi k + \Pi' t, \quad n = \Pi \sin\Phi \sin\theta + \Pi' \cos\Phi \sin\theta,$

93.
$$\begin{cases} L = Zk + Z't - Y\sin\Phi\sin\theta - Y'\cos\Phi\sin\theta, \\ M = X\sin\Phi\sin\theta + X'\cos\Phi\sin\theta - Zg - Z'f, \\ N = Yg + Y'f - Xk - X't, \end{cases}$$

welche Ausdrücke, weil u, λ, ψ θ bestimmte Werthe haben, kein anderes willkürliches Element als Φ enthalten.

Nun bemerke man, dafs

94. $$\frac{dl}{d\varphi} = \Pi f - \Pi' g, \quad \frac{dm}{d\varphi} = \Pi t - \Pi' k, \quad \frac{dn}{d\varphi} = (\Pi\cos\Phi - \Pi'\sin\Phi)\sin\theta.$$

95. $$\begin{cases} \frac{dL}{d\varphi} = Zt - Z'k - Y\cos\Phi\sin\theta + Y'\sin\Phi\sin\theta, \\ \frac{dM}{d\varphi} = X\cos\Phi\sin\theta - X'\sin\Phi\sin\theta - Zf + Z'g, \\ \frac{dN}{d\varphi} = Yf - Y'g - Xt + X'k, \end{cases}$$

96. $$\begin{cases} \frac{d^2 l}{d\varphi^2} + l = 0, & \frac{d^2 m}{d\varphi^2} + m = 0, & \frac{d^2 n}{d\varphi^2} + n = 0, \\ \frac{d^2 L}{d\varphi^2} + L = 0, & \frac{d^2 M}{d\varphi^2} + M = 0, & \frac{d^2 N}{d\varphi^2} + N = 0. \end{cases}$$

Betrachtet man nun das System in zwei verschiedenen, den Winkeln Φ und $\Phi + \Phi'$ entsprechenden Stellungen, für welche aber die Werthe von λ, u, ψ, θ auf die angegebene Weise bestimmt und genau dieselben sind, und bezeichnet mit l', m', n', L', M', N' die dem Winkel $\Phi + \Phi'$ zugehörigen Werthe (92., 93.) von l, m, ... N; so ergiebt sich

97. $$\begin{cases} l' = l\cos\Phi' + \frac{dl}{d\varphi}\sin\Phi', & m' = m\cos\Phi' + \frac{dm}{d\varphi}\sin\Phi', \\ n' = n\cos\Phi' + \frac{dn}{d\varphi}\sin\Phi', \\ L' = L\cos\Phi' + \frac{dL}{d\varphi}\sin\Phi', & M' = M\cos\Phi' + \frac{dM}{d\varphi}\sin\Phi', \\ N' = N\cos\Phi' + \frac{dN}{d\varphi}\sin\Phi'. \end{cases}$$

Werden ferner diese Werthe in die Gleichung (65.) gesetzt, welche die Bedingung ausdrückt, die nöthig ist, damit die beiden Resultanten sich schneiden, so geht dieselbe, weil

$$V = Ll + Mm + Nn = 0,$$

über in die Gleichung:

$$L\frac{dl}{d\varphi} + l\frac{dL}{d\varphi} + M\frac{dm}{d\varphi} + m\frac{dM}{d\varphi} + N\frac{dn}{d\varphi} + n\frac{dN}{d\varphi} = 0,$$

oder kürzer:

$$\frac{dV}{d\varphi} = 0,$$

welche von selbst befriedigt ist, weil der Werth von V (82.) von Φ nicht abhängt.

Da nun während der Drehung des Systemes die Resultanten der festen Ebene (91.) stets parallel bleiben, und sich, wie eben bewiesen, gegenseitig schneiden; so liegen sie alle in einer der Ebene der beiden Hülfsstrahlen (91.) parallelen Ebene, welche von nun an die Mittel-Ebene des Systemes genannt werden soll.

Um die Coordinaten des Durchschnittspunctes zweier Resultanten zu finden, mufs man die Gleichungen (63.) und (64.) zusammennehmen. Die Gleichungen (64.) gehen aber, vermöge der Formeln (97.), über in die folgenden:

$$98.\quad \frac{dm}{d\varphi}\bar{z}-\frac{dn}{d\varphi}\bar{y}=\frac{dL}{d\varphi},\quad \frac{dn}{d\varphi}\bar{x}-\frac{dl}{d\varphi}\bar{z}=\frac{dM}{d\varphi},\quad \frac{dl}{d\varphi}\bar{y}-\frac{dm}{d\varphi}\bar{x}=\frac{dN}{d\varphi}.$$

Diese verbunden mit (63.) geben:

$$99.\quad \begin{cases}\left(n\frac{dl}{d\varphi}-l\frac{dn}{d\varphi}\right)\bar{x}=M\frac{dl}{d\varphi}-l\frac{dM}{d\varphi},\\ \left(l\frac{dm}{d\varphi}-m\frac{dl}{d\varphi}\right)\bar{y}=N\frac{dm}{d\varphi}-n\frac{dN}{d\varphi},\\ \left(m\frac{dn}{d\varphi}-n\frac{dm}{d\varphi}\right)\bar{z}=L\frac{dn}{d\varphi}-m\frac{dL}{d\varphi}.\end{cases}$$

Durch Einsetzung der Werthe der Ableitungen aus (94.), (95.) wird mit Hülfe der Gleichung $V=0$ (82.) erhalten:

$$100.\quad \begin{cases}\bar{x}=\Pi X+\Pi' X'-(\Pi' Y-\Pi Y')\cos\theta-(\Pi' Z-\Pi Z')\cos\psi\sin\theta,\\ \bar{y}=\Pi Y+\Pi' Y'+(\Pi' X-\Pi X')\cos\theta+(\Pi' Z-\Pi Z')\sin\psi\sin\theta,\\ \bar{z}=\Pi Z+\Pi' Z'+(\Pi' X-\Pi X')\cos\psi\sin\theta-(\Pi' Y-\Pi Y')\sin\psi\sin\theta.\end{cases}$$

Nun ist in Folge der Gleichungen (76.), (77.), (87.):

$$101.\quad \begin{cases}p\Pi=[p^2+(r\sin u-q\cos u)^2]\sin\lambda,\\ pX=[pp'+(r\sin u-q\cos u)(r'\sin u-q'\cos u)]\sin\lambda,\\ \Pi'=q\sin u+r\cos u,\quad X'=q'\sin u+r'\cos u.\end{cases}$$

$$102.\quad p^2=\sin\lambda^2[p^2+(r\sin u-q\cos u)^2].$$

Vermittelst dieser Ausdrücke findet man:

$$103.\quad \begin{cases}\Pi X+\Pi' X'=pp'+qq'+rr'=Q'.\\ \text{Auf ähnliche Weise wird erhalten:}\\ \Pi Y+\Pi' Y'=pp''+qq''+rr''=Q''.\\ \Pi Z+\Pi' Z'=pp'''+qq'''+rr'''=Q'''.\end{cases}$$

Die Ausdrücke (100.) lehren, dafs die Coordinaten des Durchschnittspunctes zweier beliebigen Resultanten unabhängig von Φ sind, und dafs mithin die sämmtlichen Resultanten, welche den durch die gefundenen

Werthe von ψ, θ, λ, u bestimmten Stellungen des Systemes entsprechen, sich in einem und demselben Puncte treffen. Dieser Punct kann ein Mittelpunct des vorgelegten Systemes nicht paralleler Kräfte genannt werden; die Bedeutung eines solchen kommt ihm jedoch nur für eine bestimmte Stellung und eine damit zusammenhängende Drehung der Kräfte zu, und ist daher nur sehr eingeschränkt.

Wird nun durch diesen Punct eine Ebene gelegt parallel der Ebene der beiden Hülfsstrahlen (91.); so ist diese offenbar diejenige, für welche weiter oben der Name Mittel-Ebene gewählt worden ist. Die Gleichung der Mittel-Ebene läfst sich daher, wenn unter ψ und θ ihre bestimmten Werthe verstanden werden, schreiben wie folgt:

$$104. \quad \sin\psi \sin\theta (x - \overline{x}) + \cos\psi \sin\theta (y - \overline{y}) - \cos\theta (z - \overline{z}) = 0.$$

Werden in diese Gleichung die Werthe (100.) von $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ eingeführt, so geht dieselbe in die folgende über:

$$\sin\psi \sin\theta (x - Q') + \cos\psi \sin\theta (y - Q'') - \cos\theta (z - Q''') = 0.$$

Oder

$$105. \quad (\varrho' \cos u + k' \sin u)(x - Q') + (\varrho'' \cos u + k'' \sin u)(y - Q'') + (\varrho''' \cos u + k''' \sin u)(z - Q''') = 0.$$

Es geht daher die Mittel-Ebene durch den festen Punct, dessen Coordinaten Q', Q'', Q''' sind; und da diese Folgerung für jede der beiden Mittel-Ebenen gültig ist, welche vermöge der quadratischen Gleichung für $\tang u$ (90.) dem Systeme im Allgemeinen beigelegt werden müssen, so ist zu schliefsen, dafs der in Rede stehende Punct in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte liegen mufs.

Werden die Ausdrücke für die Coordinaten dieses Punctes entwickelt, indem man die gegenseitige Neigung zweier Kräfte durch die Verbindung der diese letzteren bezeichnenden Buchstaben andeutet, wie schon oben einmal geschehen ist, so erhält man z. B. die Abscisse Q':

$$106. \quad Q' = \frac{P^2 x + P_1^2 x_1 + P_2^2 x_2 + \ldots + P_n^2 x_n \ldots + PP_1 \cos PP_1 (x + x_1) + \ldots + P_n P_m \cos P_n P_m (x_n + x_m) + \ldots}{P^2 + P_1^2 + P_2^2 + \ldots + P_n^2 \ldots + 2PP_1 \cos PP_1 + \ldots + 2P_n P_m \cos P_n P_m + \ldots},$$

in welchem Ausdrucke zu besserer Übersicht der sonst der Einheit gleichgesetzte Nenner hergestellt ist. Die Werthe von Q'', Q''' werden durch Vertauschung von x mit y und mit z erhalten.

Nimmt man nun für einen Augenblick die Kräfte des Systemes als parallel an, so wird $\cos PP_1$, $\cos PP_2$, und überhaupt $\cos P_n P_m$ gleich $+1$ oder -1. Man kann jedoch die negativen Vorzeichen in die Factoren

P, P_1, P_2, ... angemessen verlegen, und unter dieser Voraussetzung alle Cosinus als der positiven Einheit gleich ansehen, wodurch sich der besondere Werth von Q' ergiebt gleich:

$$\frac{Px+P_1x_1+P_2x_2+....+P_nx_n}{P+P_1+P_2+....+P_n},$$

welcher Ausdruck zeigt, dafs der in Rede stehende bemerkenswerthe feste Punct für parallele Kräfte der Schwerpunct selbst ist.

Wird nun zur Vereinfachung der Formeln dieser Punct als Anfang der Coordinaten angenommen, so ist $Q'=0$, $Q''=0$, $Q'''=0$. Wird ferner gemäfs (81.) gesetzt:

$$U = \sqrt{(X''^2+Y''^2+Z''^2)},$$

$$\text{107.}\quad \sin\psi\sin\theta=\frac{X''}{U},\quad \cos\psi\sin\theta=\frac{Y''}{U},\quad \cos\theta=-\frac{Z''}{U},$$

so gehen die Ausdrücke (100.) über in die folgenden:

$$\text{108.}\quad \begin{cases} U.\bar{x} = Z''(\Pi'Y-\Pi Y')-Y''(\Pi'Z-\Pi Z'), \\ U.\bar{y} = X''(\Pi'Z-\Pi Z')-Z''(\Pi'X-\Pi X'), \\ U.\bar{z} = Y''(\Pi'X-\Pi X')-X''(\Pi'Y-\Pi Y'). \end{cases}$$

Nun sei zur Abkürzung

$$\text{109.}\quad S=\sqrt{[\varrho'\cos u+k'\sin u)^2+(\varrho''\cos u+k''\sin u)^2+(\varrho'''\cos u+k'''\sin u)^2},$$

so wird nach (89.) $pU=S.\sin\lambda$,

$$\text{110.}\quad \frac{X''}{U}=\frac{\varrho'\cos u+k'\sin u}{S},\quad \frac{Y''}{U}=\frac{\varrho''\cos u+k''\sin u}{S},\quad \frac{Z''}{U}=\frac{\varrho'''\cos u+k'''\sin u}{S}.$$

Man setze diese Werthe in (108.) und schaffe noch vermittelst (88.) die Buchstaben Π, X, Y, Z fort; so kommt, mit Beibehaltung von Q', Q'', Q''':

$$\text{111.}\quad \bar{x} = \frac{\sin\lambda}{S.p}.\Big[(\varrho'''\cos u+k'''\sin u)[(Q''q-q'')\cos u+(Q''r-r'')\sin u] - (\varrho''\cos u+k''\sin u)[(Q'''q-q''')\cos u+(Q'''r-r''')\sin u]\Big]$$

und ähnliche Ausdrücke für $\bar{y}$ und $\bar{z}$.

Wird der in Klammern eingeschlossene Factor der Kürze wegen mit H bezeichnet, so ist $\bar{x}=\frac{\sin\lambda}{S.p}.H$.

Es ergiebt sich durch Ausführung der Rechnung:

$$\begin{aligned}\text{112.}\quad H = {} & [q(\varrho'''\pi''-\varrho''\pi''')+p(k'''\varrho''-k''\varrho''')]\cos u^2 \\ & +[p(k'''\varrho''-k''\varrho''')+r(\pi'''k''-\pi''k''')]\sin u^2 \\ & -[r(\varrho'''\pi''-\varrho''\pi''')+q(\pi'''k''-\pi''k''')]\sin u\cos u.\end{aligned}$$

Nun ist zufolge (84.):

$$p\pi' + qk' + r\varrho' = 0,$$
$$p\pi'' + qk'' + r\varrho'' = 0,$$
$$p\pi''' + qk''' + r\varrho''' = 0.$$

Man kann, den beiden letzten dieser Gleichungen zufolge, setzen:

$$113. \quad \begin{cases} W'.p = k'''\varrho'' - k''\varrho''', \\ W'.q = \varrho'''\pi'' - \varrho''\pi''', \\ W'.r = \pi'''k'' - \pi''k''', \end{cases}$$

wenn mit W' ein noch unbekannter Factor bezeichnet wird. Wird nun, mit Hülfe der Werthe (84.) von k'', k''', ϱ'', ϱ''', der Ausdruck $k'''\varrho'' - k''\varrho'''$ entwickelt, und durch p getheilt, so ergiebt sich

$$114. \quad W' = p(q'''r'' - q''r''') + q(p''r''' - r''p''') + r(q''p''' - p''q''').$$

Hieraus folgt weiter

$$H = W'[(p^2+q^2)\cos u^2 + (p^2+r^2)\sin u^2 - 2rq\sin u\cos u]$$

oder

$$H = W'[p^2 + (r\sin u - q\cos u)^2];$$

mithin nach (102.):

$$115. \quad H\sin\lambda^2 = W'.p^2.$$

Man erhält folglich

$$116. \quad \bar{x} = \frac{H\sin\lambda}{S.p} = \frac{pW'}{S.\sin\lambda}.$$

Es ist aber nach (102.), (109.):

$$117. \quad \frac{p^2}{S^2.\sin\lambda^2} = \frac{p^2 + (r\sin u - q\cos u)^2}{(\varrho'\cos u + k'\sin u)^2 + (\varrho''\cos u + k''\sin u)^2 + (\varrho'''\cos u + k'''\sin u)^2} = T,$$

welcher Quotient T, wie man sieht, nicht von $\sin u$ und $\cos u$, sondern lediglich von $\operatorname{tang} u$ abhängig ist.

Man erhält folglich

$$118. \quad \bar{x} = W'\sqrt{T}.$$

Wird nun gleichfalls gesetzt:

$$119. \quad W'' = p(q'r''' - r'q''') + q(r'p''' - r'''p') + r(q'''p' - q'p'''),$$
$$120. \quad W''' = p(q''r' - r''q') + q(r''p' - r'p'') + r(p''q' - p'q''),$$

so ergiebt sich auf demselben Wege:

$$121. \quad \bar{y} = W''\sqrt{T}, \qquad \bar{z} = W'''\sqrt{T}.$$

In dem Gange der Rechnung von (107.) an, sind mehrmals zweideutige Wurzel-Ausdrücke vorgekommen; die Untersuchung ihrer doppelten Zeichen aber absichtlich bis zum Schlusse der Rechnung verschoben worden, welcher zeigt, dafs jede der Coordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$ zwei verschiedene Werthe haben kann, nämlich

122. $\begin{cases} \text{entweder} & \bar{x} = +W'\sqrt{T}, \quad \bar{y} = +W''\sqrt{T}, \quad \bar{z} = +W'''\sqrt{T}, \\ \text{oder} & \bar{x} = -W'\sqrt{T}, \quad \bar{y} = -W''\sqrt{T}, \quad \bar{z} = -W'''\sqrt{T}, \end{cases}$

denen zusammen zwei verschiedene Puncte in der Mittel-Ebene, gelegen in einer durch den Anfang der Coordinaten (den Punct Q', Q'', Q''' in 105.) gezogenen Geraden, und zu beiden Seiten gleich weit von demselben entfernt, zugehören. Dieses kann auf keine andere Weise erklärt werden, als dafs das System, in Bezug auf jede der beiden Mittel-Ebenen, zweier verschiedenen Stellungen fähig sein mufs.

Um dieses in helleres Licht zu setzen, nehme man den einer Wurzel $\tang u$ der Gleichung (90.) zugehörigen Winkel u kleiner als zwei Rechte; so sind $\cos u$ und $\sin u$ nicht allein der Gröfse, sondern auch dem Zeichen nach vollständig bestimmt, und die Gleichung (87.) giebt einen Werth für $\tang\lambda$, dem die Winkel λ und $\pi+\lambda$ angehören. Wird von diesen der erste (λ) genommen, so erhält man zur Bestimmung der Richtungen der Kräfte P, P_1, P_2, ... P_n, in Beziehung auf die drei Hülfsstrahlen, die Werthe von $\cos\omega'$, $\cos\omega''$, u. s. f., aus den Gleichungen (69.), (70.), (71.), (72.). Wird dagegen statt λ gesetzt $\pi+\lambda$, so kommt, denselben Gleichungen zufolge:

69. †
$$\cos\omega' = -\sin\lambda, \qquad \cos\omega'' = 0, \qquad \cos\omega''' = -\cos\lambda,$$

70. †
$$\begin{cases} \cos\omega_1' = -\sin\lambda\cos\pi_1 + \cos\lambda\cos u\sin\pi_1, & \cos\omega_1'' = \sin u\sin\pi_1, \\ \cos\omega_1''' = -\cos\lambda\cos\pi_1 - \sin\lambda\sin\pi_1\cos u, \end{cases}$$

72. †
$$\begin{cases} \cos\omega_n' = -\sin\lambda\cos\pi_n + \cos\lambda\cos(u+k_n).\sin\pi_n, \\ \cos\omega_n'' = \sin(u+k_n).\sin\pi_n, \\ \cos\omega_n''' = -\cos\lambda\cos\pi_n - \sin\lambda\cos(u+k_n).\sin\pi_n. \end{cases}$$

Vergleicht man die Werthe der Winkel ω', ω'' .... aus diesen Formeln mit denen aus (69.) bis (72.), so zeigt sich, dafs, wenn die Richtung irgend einer Kraft, z. B. P_n, mit den drei auf einander senkrechten Hülfsstrahlen in der einen (ersten) Stellung die Winkel ω_n', ω_n'', ω_n''' bildete, dieselben Winkel für die andere (zweite) Stellung übergehen in $\pi-\omega_n'$, ω_n'', $\pi-\omega_n'''$.

Diese beiden Stellungen sind aber wesentlich von einander verschieden, weil die eine aus der andern nicht durch eine Drehung um den dritten lothrechten Strahl oder die Axe der Mittel-Ebene erzeugt werden kann, da eine solche die Winkel ω''', ω_1''', ω_2''', ... ω_n''' sämmtlich unverändert läfst. Vielmehr entsteht die eine dieser Stellungen aus der andern,

wenn das Bündel um den zweiten Hülfsstrahl als um eine feste Axe eine halbe Umdrehung macht. Als zweiter Hülfsstrahl aber kann jede beliebige Gerade, welche in der Mittel-Ebene durch den Anfang der Coordinaten gelegt ist, angesehen werden, wenn das Bündel so steht, dafs die Projection des gegen die Mittelebene unter dem Winkel $\pm\lambda$ geneigten Strahles P (als erster Hülfsstrahl) senkrecht ist auf dem angenommenen zweiten Hülfsstrahle.

Wird statt u, $\pi+u$ als der zu $\tang u$ gehörige Winkel gewählt, so erhält man aus (87.) statt λ entweder den Werth $2\pi-\lambda$, und damit eine Stellung, welche sich aus der als erste Stellung bezeichneten (69. —72.) durch eine halbe Umdrehung des Bündels um die Axe der Mittel-Ebene ergiebt; oder den Werth $\pi-\lambda$, welcher einer halben Umdrehung des Bündels in der zweiten Stellung (69. † u. f.) um die Axe der Mittel-Ebene entspricht.

Zu jeder der beiden Mittel-Ebenen gehören also zwei verschiedene Stellungen des Systemes, deren jeder ein Punct als gemeinschaftlicher Durchschnitt der Resultanten entspricht. Es ergeben sich daher zwei Paare von Durchschnittspuncten, von denen das eine in der einen, das andere in der andern Mittel-Ebene sich befinden mufs. Werden nun die Puncte jedes dieser beiden Paare durch eine Gerade verbunden, so erhält man aus (122.) die folgenden Gleichungen dieser Geraden:

$$123. \qquad \frac{x}{W'} = \frac{y}{W''} = \frac{z}{W'''},$$

in welchen kein u mehr vorkommt, und die mithin eben so wohl für die eine, als für die andere Gerade gelten müssen; woraus zu schliefsen ist, dafs diese beiden Linien, und mit ihnen zugleich die beiden Paare von Durchschnittspuncten der Resultanten, in den Durchschnitt der beiden Mittel-Ebenen fallen, und zwar so, dafs die Puncte jedes Paares zu beiden Seiten gleich weit vom Anfange der Coordinaten abstehen.

Obgleich im Vorstehenden die Untersuchung mehr nur eröffnet, als wirklich ausgeführt ist; so bin ich doch durch anderweitige Beschäftigungen genöthigt, sie hier, unter Vorbehalt künftiger Wiederaufnahme, einstweilen abzubrechen. Nur eines gewissen besonderen Falles soll noch in Kürze erwähnt werden.

Wenn nämlich sämmtliche Kräfte des Systemes einer Ebene parallel sind, so wird in den Formeln (75.) $\sin k_2 = 0$, $\sin k_3 = 0$, und überhaupt $\sin k_n = 0$, mithin $r = 0$, $r' = 0$, $r'' = 0$, $r''' = 0$, und nach (84.) $k' = 0$, $k'' = 0$, $k''' = 0$, $\pi' = 0$, $\pi'' = 0$, $\pi''' = 0$. Die Gleichung (90.) geht dann über in die folgende:

$$124. \qquad \sin u \cos u = 0.$$

Wird nun erstens $\cos u = 0$ gesetzt, so ergiebt sich aus (105.) die Lage der Mittel-Ebene als unbestimmt, was sich auch leicht vorhersehen liefs. Nämlich in jeder Stellung des Systemes, in welcher dessen sämmtliche Kräfte durch eine einzige ersetzt werden können, oder welche der Bedingungsgleichung $V = 0$ (82.) Genüge leistet, ist auch eine Mittel-Ebene vorhanden, welche den sämmtlichen Kräften des Systemes parallel sein wird. Alle diese Mittel-Ebenen gehen durch einen festen Punct (Q', Q'', Q'''), der wieder als Anfang der Coordinaten soll angesehen werden. Die Gleichung einer solchen Ebene ist alsdann folgende:

$$125. \qquad \sin\psi \sin\theta . x + \cos\psi \sin\theta . y - \cos\theta . z = 0,$$

in welcher ψ und θ durch die Bedingung $V = 0$ (82.) mit einander verbunden sind, welche in dem vorliegenden Falle, da vermöge (87.), (88.)

$$\Pi' X - \Pi X' = \varrho', \qquad \Pi' Y - \Pi Y' = \varrho'', \qquad \Pi' Z - \Pi Z' = \varrho''',$$

übergeht in

$$126. \qquad \varrho' \sin\psi \sin\theta + \varrho'' \cos\psi \sin\theta - \varrho''' \cos\theta = 0.$$

Wird aus (125.), (126.) θ weggeschafft, so kommt:

$$127. \qquad \varrho''' \sin\psi . x + \varrho''' \cos\psi . y = (\varrho' \sin\psi + \varrho'' \cos\psi) z,$$

als Gleichung für alle Mittel-Ebenen, welche der Annahme $\cos u = 0$ entsprechen. Setzt man nun die beiden Gleichungen:

$$128. \qquad \varrho''' x - \varrho' z = 0, \qquad \varrho''' y - \varrho'' z = 0,$$

so ergiebt sich eine Linie, welche offenbar in allen Mittel-Ebenen (127.) zugleich liegt, und mithin ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt ist. Die sämmtlichen Durchschnittspuncte der Resultanten in allen diesen Mittel-Ebenen werden bestimmt durch die Coordinaten:

$$129. \qquad \begin{cases} \bar{x} = -\varrho'' \cos\theta - \varrho''' \cos\psi \sin\theta, \\ \bar{y} = \varrho' \cos\theta + \varrho''' \sin\psi \sin\theta, \\ \bar{z} = \varrho' \cos\psi \sin\theta - \varrho'' \sin\psi \sin\theta, \end{cases}$$

zwischen welchen durch Wegschaffung von ψ und θ die Gleichung

$$130. \qquad \varrho' \bar{x} + \varrho'' \bar{y} + \varrho''' \bar{z} = 0$$

gefunden wird, welche einer durch den Anfang der Coordinaten gelegten, auf dem Durchschnitte aller Mittel-Ebenen (128.) senkrechten Ebene angehört. Ferner erhält man aus (129.):

$$R^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2 + \varrho'''^2 - (\varrho' \sin\psi \sin\theta + \varrho'' \cos\psi \sin\theta - \varrho''' \cos\theta)^2,$$

also zufolge (126.)

$$131. \qquad R^2 = \varrho'^2 + \varrho''^2 + \varrho'''^2.$$

Die sämmtlichen Durchschnittspuncte der Resultanten für die verschiedenen Mittel-Ebenen liegen daher in dem Umfange eines Kreises vom Halbmesser R (131.), dessen Ebene (130.) senkrecht ist auf dem gemeinschaftlichen Durchschnitte (128.) aller Mittel-Ebenen, und wie dieser, durch den Anfang der Coordinaten geht.

Wird zweitens $\sin u = 0$ gesetzt, so ist nach (76.) .... (79.):

$$\Pi' = 0, \qquad X' = 0, \qquad Y' = 0, \qquad Z' = 0;$$

folglich nach (100.), (103.) (da $Q' = 0$, $Q'' = 0$, $Q''' = 0$ angenommen worden)

$$132. \qquad \bar{x} = 0, \qquad \bar{y} = 0, \qquad \bar{z} = 0.$$

Zur Bestimmung der Lage des Systems erhält man ferner aus (87.), je nachdem $u = 0$ oder $u = \pi$ gesetzt wird, $\text{tang}\lambda = -\frac{p}{q}$ oder $\text{tang}\lambda = +\frac{p}{q}$. Die Gleichung der Mittel-Ebene (105.) wird in diesem Falle:

$$133. \qquad \varrho' x + \varrho'' y + \varrho''' z = 0,$$

und zeigt, dafs diese Mittel-Ebene mit der Ebene des Kreises vom Halbmesser R (130.) zusammenfällt, dessen Mittelpunct zugleich der einzige Durchschnitt aller in diese Mittel-Ebene fallenden Resultanten ist.

Das Ergebnifs läfst sich etwa in folgende Beschreibung zusammenfassen:

Die sämmtlichen einzelnen, d. h. von einem Kräftepaare nicht begleiteten Resultanten, auf welche ein System, dessen Kräfte alle einer Ebene parallel sind, in unzählig vielen seiner verschiedenen Stellungen sich zurückführen läfst, bilden, als gerade Linien betrachtet, eine stetige Folge von ebenen Strahlbüscheln, deren Ebenen sich in einer gemeinschaftlichen Axe durchschneiden, und deren Spitzen in dem Umringe eines Kreises liegen, dessen Ebene senkrecht auf, und dessen Mittelpunct in jener Axe gelegen ist. Mithin bilden auch die in der Ebene dieses Kreises liegenden Resultanten einen neuen Strahlbüschel, dessen Ebene senk-

recht auf denen aller übrigen steht, und dessen Strahlen in dem Mittelpuncte jenes Kreises zusammentreffen.

Oder kürzer: Wenn das in Rede stehende System so gestellt ist, dafs die sämmtlichen Kräfte desselben durch eine einzige ersetzt werden können, so geht diese immer durch den Umring eines gewissen festen Kreises und ein auf der Ebene desselben von dem Mittelpuncte aus errichtetes Loth.

Werden nun sämmtliche Kräfte einander parallel, so hat das System in jeder Stellung eine Resultante; jede durch irgend eine Resultante gelegte Ebene ist eine Mittel-Ebene; und indem der Halbmesser des Kreises, in welchem die Durchschnittspuncte der Resultanten sich befanden, verschwindet, vereinigen sich alle Resultanten in seinem Mittelpuncte.

22.

Über die Auflösung der numerischen Gleichungen mit Einer Unbekannten.

(Von Herrn Dr. *Dirksen*, Prof. ord. an der Universität zu Berlin.)

(Ein Auszug aus einer, am 7. Mai d. J. in der Königl. Akademie der Wissenschaften gehaltenen Vorlesung.)

1.

Bekanntlich läfst sich die Lösung der allgemeinen, die Bestimmung der Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung mit einer Unbekannten betreffenden, Aufgabe auf die zweier anderen, und zwar der beiden folgenden, zurückführen:

I. Die reellen Wurzeln einer gegebenen numerischen Gleichung mit einer Unbekannten zu trennen, d. h. für eine jede derselben zwei Gröfsen, Grenzen genannt, zu ermitteln, zwischen denen sie allein enthalten sei.

II. Vermittelst der gewonnenen Grenzen den Werth der entsprechenden Wurzel mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit zu bestimmen.

Die erste dieser beiden Aufgaben als gelöset vorausgesetzt, besitzt die Analysis hinreichende Mittel, auch die zweite zur Erledigung zu bringen. Was aber die Lösung von jener selbst anbelangt, so ist dieselbe mit solchen Schwierigkeiten verbunden, dafs sie bis jetzt, aller angewandten Bestrebungen ungeachtet, blofs mit Bezug auf die algebraischen Gleichungen, zu einer vollständigen Erledigung hat gebracht werden können.

Die erste Lösung dieses Problems verdankt die Wissenschaft Lagrange. Derselbe fordert, unter andern, die Bildung einer Hülfsgleichung, deren Wurzeln die Quadrate der Differenzen von je zwei der Wurzeln der gegebenen Gleichung seien, — eine Anforderung, deren Erfüllung zwar stets möglich ist, jedoch zu sehr weitläufigen Rechnungen

führt, sobald der Grad der gegebenen Gleichung nur einigermafsen beträchtlich ist.

Die zweite Lösung des angeregten Problems ist Fourier zu verdanken. Die betreffende Methode fordert die Bildung einer Reihe von Hülfsfunctionen mittelst des einfachen Prozesses der Differentiation einer ganzen Function, und umgeht dagegen die Bildung der Lagrangeschen; wie auch, wenn man den besondern Fall, wo zwei oder mehrere auf einander folgende Glieder jener Reihe für einerlei Werth der Veränderlichen verschwinden, ausnimmt, einer jeden Hülfsgleichung, gänzlich. Dieselbe ist eben deshalb, für die Anwendung, um vieles bequemer als die Lagrangesche Methode.

Die dritte Lösung der in Rede stehenden Aufgabe ist die Wissenschaft Herrn Sturm schuldig. Dieselbe verlangt ebenfalls die Bildung einer Reihe von Hülfsfunctionen, und zwar mittelst des Prozesses der Division zweier ganzen Functionen, und umgeht dagegen gleichfalls die Bestimmung der Lagrangeschen Hülfsgleichung. Wenn gleich mit Bezug auf die Bildung der Hülfsfunctionen weniger einfach, als die Fouriersche Methode, hat doch die nach der Sturmschen Weise gewonnene Reihe, für den fernern Lösungs-Verlauf, ihre überwiegenden Vortheile vor jener.

Keine von diesen drei verschiedenen Lösungs-Methoden ist, ihren wesentlichen Stücken nach, von der Art, dafs ihre Anwendbarkeit nothwendigerweise auf die algebraischen Gleichungen beschränkt wäre. Vielmehr läfst sich eine jede derselben als Folge eines Haupt-Lehrsatzes betrachten, der auf Bedingungen beruht, welchen in dem Falle, wo das mit Null verglichene Glied der Gleichung eine ganze Function bildet, streng allgemein, aufserdem aber noch in einer unbegrenzten Anzahl anderer Fälle, entsprochen werden kann.

Rücksichtlich der Lagrangeschen Lösungs-Art liegt dieser Haupt-Lehrsatz sehr nahe. Was aber die Fouriersche und die Sturmsche Methode anbelangt, so ist die Ermittelung der entsprechenden Sätze mit mehr Schwierigkeiten verbunden, und hier deshalb zum Gegenstand einer Abhandlung gemacht worden. Dieselbe wird vielleicht dazu dienen können, die Grenzen der Anwendbarkeit beider Lösungsweisen mit der zugehörigen Schärfe festzustellen; was um so weniger ohne Interesse sein

dürfte, als in dieser Beziehung über die Fourierschе Methode bereits Erörterungen statt gefunden haben (*vid. Journ. de l'Ecole Polyt. Cah. XIX., pag.* 382.; *Mémoires de l'Acad. d. sciences Tom X.*, 1831).

2.

Die Abhandlung zerfällt in zwei Abschnitte. Der erste Abschnitt hat die Ermittlung und Begründung der hier in Rede stehenden Haupt-Lehrsätze zum Gegenstande. Beide sind hypothetischer Form, und setzen die mit Null verglichene Function, wenigstens innerhalb desjenigen Intervalls von besonderen Werthen der ursprünglichen Veränderlichen, zwischen dessen Grenzen die Wurzeln bestimmt werden sollen, als continuirlich, und überdies noch eine endliche Reihe von Functionen voraus, die jene gegebene Function selbst zum Anfangsgliede haben, und deren übrige Glieder, sowohl mit diesem Gliede, als unter einander, in einem gewissen, näher bestimmten Zusammenhange stehen. Wäre es möglich, zu jeder gegebenen Function dieser Art, eine die betreffenden Bedingungen erfüllende, endliche Reihe von Functionen zu bestimmen; so würde, sowohl vermittelst des einen, als des andern jener Sätze, jede danach gebildete Gleichung, allgemein gesprochen, zur Lösung gebracht werden können. Da dies aber nicht der Fall ist, so hat der zweite Abschnitt eine nähere Betrachtung der Fälle und Methoden zum Gegenstande, für welche, und mittelst welcher sich zu einer gegebenen Function eine, den geforderten Eigenschaften entsprechende, Reihe von Functionen gewinnen lasse.

3.

Der Haupt-Lehrsatz, welcher der Fourierschen Methode als zu Grunde liegend betrachtet werden kann, lautet folgendermafsen:

Lehrsatz 1. Es bezeichnen A und B irgend zwei reelle Werthe der ursprünglichen Veränderlichen x, von denen $B > A$ sei; r bezeichne eine angebbare Zahl, gröfser als 1, und nicht gröfser als ω; ferner bezeichnen i und μ zwei ganze Zahlen, von denen i kleiner als r, und μ gröfser als i, und nicht gröfser als r sei; endlich bezeichne $f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x) \ldots f_\varrho(x)$, $f_{\varrho+1}(x)$, $f_{\varrho+2}(x) \ldots f_\omega(x)$ oder $R_0^{(\omega)}(x)$, eine endliche oder unendliche, den folgenden Bedingungen entsprechende, Reihe von Functionen:

α) dafs ihre verschiedenen Glieder, entweder insgesammt, oder wenig-

stens von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r$, continuirlich bleiben für alle besonderen Werthe von x, von $x = A$, bis $x = B$;

β) dafs, wenn c_ϱ einen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werth von x bezeichnet, für welchen man hat $f_\varrho(x) = 0$, alsdann, h als eine positiv bleibende Veränderliche betrachtet,

$$\overset{h=0}{G}\, r f_\varrho(c_\varrho - h) \quad \text{und} \quad \overset{h=0}{G}\, r f_{\varrho+1}(c_\varrho - h) \quad \text{ungleichnamig,}$$

dagegen

$$\overset{h=0}{G}\, r f_\varrho(c_\varrho + h) \quad \text{und} \quad \overset{h=0}{G}\, r f_{\varrho+1}(c_\varrho + h) \quad \text{gleichnamig}$$

seien, und zwar von $\varrho = 0$, bis $\varrho = r - 1$ einschliefslich;

γ) dafs die besonderen Werthe des Gliedes $f_\mu(x)$ von $x = A$ bis $x = B$, keine Zeichen-Änderung erleiden.

Dies vorausgesetzt, hat man, indem man sich für x nach und nach, alle zwischen A und B enthaltenen besondern Werthe gesetzt denkt, die Zahl der Zeichenwechsel der Reihe $R_i^{(\mu)}(x)$, dem besondern Werthe k von x entsprechend, mit $N_i^{(\mu)}(k)$ bezeichnet und zur Abkürzung $N_i^{(\mu)}(p) - N_i^{(\mu)}(q) = \triangle_i^{(\mu)}\binom{p}{q}$ setzt:

1°. in so fern a und b zwei solche zwischen A und B enthaltene, besondere Werthe von x bezeichnen, von denen $b > a$, und für welche beziehungsweise kein Glied der Reihe $R_i^{(\mu)}(x)$ in Null übergeht,

$\triangle_i^{(\mu)}\binom{a}{b}$ = entweder Null, oder = einer positiven ganzen Gröfse;

2°. so oft für einen zwischen A und B enthaltenen besondern Werth c von x, eine Anzahl n der unmittelbar auf einander folgenden Glieder der Reihe $R_i^{(\mu)}(x)$, einschliefslich des anfänglichen $f_i(x)$, Null werden, in so fern $f_{i+i'+1}(x)$ als das erste der verschiedenen Glieder betrachtet wird:

$$\triangle_i^{(\mu)}\binom{\leq c}{> c} = n, \text{ wenn } n \text{ gerade ist,}$$

$= n-1$, wenn n ungerade ist, und $f_{i+i'}(<c)$ und $f_{i+i'+1}(<c)$ gleichnamig sind,

$= n+1$, wenn n ungerade ist, und $f_{i+i'}(<c)$ und $f_{i+i'+1}(<c)$ ungleichnamig sind.

Aus diesem Lehrsatze ergeben sich nun mit Leichtigkeit die folgenden Corollare:

Folg. 1. Bezeichnen c_1, c_2, c_3, ... c_ν eine Anzahl ν verschiedener, zwischen A und B enthaltener, und zunehmend geordneter, besonderer Werthe von x, für welche eins oder mehrere der Glieder von $R_i^{(\mu)}(x)$ Null werden, so hat man, in so fern noch ausdrücklich angenommen wird, dafs für alle übrigen, zwischen A und B denkbaren, besondern Werthe von x kein Glied der Reihe $R_i^{(\mu)}$ Null werde,

$$\triangle_i^{(\mu)}\binom{A}{B} = \triangle_i^{(\mu)}\binom{\leq c_1}{> c_1} + \triangle_i^{(\mu)}\binom{\leq c_2}{> c_2} + \triangle_i^{(\mu)}\binom{\leq c_3}{> c_3} + \ldots + \triangle_i^{(\mu)}\binom{\leq c_\nu}{> c_\nu}.$$

Folg. 2. Die Anzahl der verschiedenen zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werthe von x, für welche die Gleichung $f_i(x) = 0$ statt findet, kann niemals gröfser, wohl aber kleiner als $\triangle_i^{(\mu)}\binom{A}{B}$ und mithin auch als $\mu - i$ sein.

Folg. 3. Ist $\triangle_i^{(\mu)}\binom{A}{B}$ eine ungerade Zahl, so mufs wenigstens für einen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werth von x der Gleichung $f_i(x) = 0$ Genüge geschehen.

Folg. 4. So viele Änderungen in den Zeichenständen der verschiedenen Zeichen-Reihen, den verschiedenen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werthen von x entsprechend, aus solchen besonderen Werthen von x entspringen, für welche $f_i(x)$ nicht Null wird: eben so viel beträgt die Zahl $\triangle_i^{(\mu)}\binom{A}{B}$ mehr als die Anzahl der von einander verschiedenen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werthe von x, welche der Gleichung $f_i(x) = 0$ Genüge leisten, ohne zugleich eins oder mehrere der übrigen Glieder der Reihe $R_i^{(\mu)}(x)$ gleich Null zu machen. Da nun jene Anzahl stets gerade ist; so folgt, dafs die Anzahl aller verschiedenen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werthe von x, welche der Gleichung $f_i(x) = 0$ Genüge leisten, ohne zugleich irgend eins oder mehrere von den übrigen Gliedern der Reihe zum Verschwinden zu bringen, stets von der Form

$$\triangle_i^{(\mu)}\binom{A}{B} - 2n$$

ist, wo n irgend eine, mit Einschlufs der Null, ganze Zahl bezeichnet.

Folg. 5. Findet die Erfüllung der Bedingungen des obigen Lehrsatzes für alle reellen besonderen Werthe von x statt, so gelten auch die betreffenden Ergebnisse von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

4.

Der Haupt-Lehrsatz, welcher als die Grundlage der Sturmschen Lösungsweise angesehen werden kann, ist folgender:

Lehrsatz 2. Es bezeichnen A und B, von denen $B>A$, irgend zwei reelle besondere Werthe von x, und r irgend eine angebbare ganze Zahl; ferner bezeichne

$f_0(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ... $f_\varrho(x)$, $f_{\varrho+1}(x)$, $f_{\varrho+2}(x)$, ... $f_r(x)$,

oder $R_0^{(r)}(x)$, eine Reihe von $r+1$ den folgenden Bedingungen entsprechenden Functionen von x:

α) dafs ihre verschiedenen Glieder insgesammt continuirlich bleiben für alle besonderen Werthe von x, von $x=A$ bis $x=B$;

β) dafs, wenn $c_{r+\varrho}$ einen, zwischen A und B enthaltenen, besondern Werth von x bezeichnet, für welchen man hat:

$$f_{\varrho+1}(x) = 0,$$

alsdann, von $\varrho=0$ bis $\varrho=r-1$, h als eine positiv bleibende Veränderliche betrachtet,

$\overset{h=0}{Gr} f_\varrho(c_{\varrho+1}-h)$ und $\overset{h=0}{Gr} f_{\varrho+2}(c_{\varrho+1}-h)$ ungleichnamig, und

$\overset{h=0}{Gr} f_\varrho(c_{\varrho+1}+h)$ und $\overset{h=0}{Gr} f_{\varrho+2}(c_{\varrho+1}+h)$ ungleichnamig,

wie auch, wenn c_0 einen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werth von x bezeichnet, für welchen man hat:

$$f_0(x) = 0,$$

alsdann:

$\overset{h=0}{Gr} f_0(c_0-h)$ und $\overset{h=0}{Gr} f_1(c_0-h)$ ungleichnamig, dagegen

$\overset{h=0}{Gr} f_0(c_0+h)$ und $\overset{h=0}{Gr} f_1(c_0+h)$ gleichnamig seien;

γ) dafs die besonderen Werthe des Endgliedes $f_r(x)$, von $x=A$ bis $x=B$, keine Zeichen-Änderung erleiden.

Dies vorausgesetzt, hat man, indem man der Veränderlichen x, nach und nach, alle zwischen A und B enthaltenen besondern Werthe beigelegt denkt:

1°. in so fern a und b, von denen $b>a$, zwei zwischen A und B enthaltene, besondere Werthe von x bezeichnen, für welche kein Glied der Reihe $R_0^{(r)}(x)$ in Null übergeht,

$\triangle_0^{(r)}\binom{a}{b}$ = entweder Null oder einer positiven ganzen Gröfse;

2°. so oft für einen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werth c von x, eins oder mehrere von den Gliedern der Reihe $R_0^{(r)}(x)$, ausschliefslich des anfänglichen $f_0(x)$, in Null übergehen,

$$\triangle_0^{(r)}\left(\begin{matrix}<c\\>c\end{matrix}\right) = 0;$$

3°. so oft für einen zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werth c von x, das Anfangsglied $f_0(x)$, nebst den n unmittelbar darauf folgenden Gliedern der Reihe $R_0^{(r)}(x)$, den Werth Null erlangt,

$$\triangle_0^{(r)}\left(\begin{matrix}<c\\>c\end{matrix}\right) = 1, \text{ wenn } n \text{ (mit Einschlufs der Null) gerade}$$
$$= 0, \text{ wenn ungerade ist.}$$

Als Corollare dieses Satzes verdienen hier die folgenden angeführt zu werden:

Folg. 1. Die Anzahl der verschiedenen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werthe von x, für welche der Gleichung $f_0(x) = 0$ Genüge geschieht; kann wohl gröfser, aber nicht kleiner als $\triangle_i^{(r)}\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right)$ sein.

Folg. 2. Bezeichnen C_1, C_2, C_3, ... C_ν eine Anzahl ν verschiedener, zwischen A und B enthaltener und zunehmend geordneter, besonderer Werthe von x, der Gleichung

$$f_0(x) = 0$$

genügend; so hat man, in so fern noch ausdrücklich angenommen wird, dafs für keinen der übrigen zwischen A und B enthaltenen besonderen Werthe von x, $f_0(x)$ den Werth Null erlange, — wie auch, dafs für keinen jener ν besondern Werthe von x zugleich eine ungerade Anzahl von den unmittelbar auf $f_0(x)$ folgenden Gliedern der Reihe $R_0^{(r)}(x)$ in Null übergehe,

$$\triangle_0^{(r)}\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right) = \nu.$$

Und umgekehrt: wird für keinen, zwischen A und B enthaltenen, besondern Werth von x eine ungerade Anzahl der unmittelbar auf $f_0(x)$ folgenden Anfangsglieder der Reihe $R_0^{(r)}(x)$ zugleich mit $f_0(x)$ Null, und hat man

$$\triangle_0^{(r)}\left(\begin{matrix}A\\B\end{matrix}\right) = \nu:$$

so giebt es gerade ν von einander verschiedene, zwischen A und B enthaltene, besondere Werthe von x, für welche beziehungsweise der Gleichung

$$f_0(x) = 0$$

Genüge geschieht.

Folg. 3. Angenommen, dafs für keinen, zwischen A und B enthaltenen Werth von x eine ungerade Anzahl von den unmittelbar auf $f_0(x)$ folgenden Anfangsgliedern der Reihe $R_0^{(r)}(x)$ zugleich mit $f_0(x)$ in Null übergehe, so wird die Anzahl der verschiedenen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werthe von x, der Gleichung

$$f_0(x) = 0$$

genügend, niemals gröfser sein können als r.

Folg. 4. Die Ergebnisse der beiden vorigen Folgerungen haben, unter andern, ihre Richtigkeit, sobald nur für keinen, zwischen A und B enthaltenen, besonderen Werth von x, die Glieder $f_0(x)$ und $f_1(x)$ zugleich den Werth Null erlangen.

Folg. 5. Findet die Erfüllung der in Rede stehenden Bedingungen für alle reellen besonderen Werthe von x statt, so gelten auch die betreffenden Ergebnisse von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$.

5.

Was ferner die Bedingungen anbelangt, an welche die den beiden vorigen Lehrsätzen zum Grunde liegenden Reihen beziehungsweise gebunden sind; so ergeben sich in Bezug auf diejenigen, welche den ersten Lehrsatz betreffen, die folgenden Theoreme.

Lehrsatz 3. Bleiben die Functionen

$$\psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \psi_3(x), \quad \ldots . \quad \psi_r(x)$$

beziehungsweise von $x = A$ bis $x = B$ continuirlich und positiv; so wird, wenn die Reihe

$$F_0(x), \quad F_1(x), \quad F_2(x), \quad \ldots . \quad F_r(x),$$

die Bedingungen (α.), (β.) und (γ.) des ersten Lehrsatzes erfüllet, auch die Reihe

$$F_0(x), \quad \psi_1(x)\,F_1(x), \quad \psi_2(x)\,F_2(x), \quad \psi_3(x)\,F_3(x), \quad \ldots . \quad \psi_r(x)\,F_r(x)$$

denselben Bedingungen entsprechen.

Lehrsatz 4. Bleiben von $x = A$ bis $x = B$ continuirlich:

Der Differ.-Quotient der $r$ten Ordnung von $f_0(x)$;

\- - - - $(r-\varrho)$ten Ordnung von $\varphi_\varrho(x)$,
von $\varrho = 0$ bis $\varrho = (r-1)$;

\- - - - $(r-\varrho-1)$ten Ordnung von $\psi_{\varrho+1}(x)$,
von $\varrho = 0$ bis $\varrho = (r-1)$;

sind ferner, von $x = A$ bis $x = B$, $\varphi_\varrho(x)$ und $\psi_{\varrho+1}(x)$, für einerlei Werth von ϱ, unter einander gleichnamig: so wird diejenige Reihe von Functionen, deren Anfangsglied $f_0(x)$ ist, und deren folgende Glieder, von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r-1$, durch die Gleichung

$$f_{\varrho+1}(x) = \psi_{\varrho+1}(x) \frac{d \cdot \varphi_\varrho(x) \cdot f_\varrho(x)}{dx}$$

bestimmt werden, den unter (α.) und (β.) enthaltenen Bedingungen des 1sten Lehrsatzes genügen.

Folg. 1. Lassen sich demnach, $f_0(x)$ als gegeben vorausgesetzt, die Hülfsfunctionen $\varphi_\varrho(x)$ und $\psi_{\varrho+1}(x)$ so wählen, dafs $f_{\varrho+1}(x)$, nach der vorigen Gleichung aus $f_\varrho(x)$ bestimmt, für irgend einen angebbaren Werth r von $\varrho+1$, von der Beschaffenheit ausfalle, dafs ihre besonderen Werthe, von $x = A$ bis $x = B$, keine Zeichen-Änderung erleiden; so wird die so entstehende Reihe von Functionen auch der Bedingung (γ.) des 1sten Lehrsatzes entsprechen.

Folg. 2. Nimmt man den aller einfachsten Fall an, namentlich:

$$\varphi_\varrho(x) = 1, \qquad \psi_{\varrho+1}(x) = 1,$$

wodurch offenbar den betreffenden Bedingungen des vorhergehenden Lehrsatzes entsprochen wird; so entsteht die folgende Reihe von Functionen:

$$f_0(x), \quad \frac{df_0(x)}{\partial x}, \quad \frac{d^2 f_0(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f_0(x)}{dx^3}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^\varrho f_0(x)}{dx^\varrho}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^r f_0(x)}{dx^r},$$

welche also die Bedingungen (α.) und (β.) des 1sten Lehrsatzes erfüllt, in so fern $f_0(x)$ den Bedingungen des 4ten Lehrsatzes entspricht.

Ist nun $f_0(x)$ eine ganze Function vom Grade n, so ist bekanntlich

$$\frac{d^n f_0(x)}{dx^n} = \pm 1.2.3 \ldots . n,$$

und daher eine von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ beständig entweder positiv oder negativ bleibende Gröfse.

Für diesen besondern Fall von $f_0(x)$ wird also den Bedingungen (α.), (β.), (γ.) des ersten Lehrsatzes entsprochen werden durch die Reihe

$$f_0(x), \quad \frac{df_0\,dx}{dx}, \quad \frac{d^2 f_0(x)}{dx^2}, \quad \frac{d^3 f_0(x)}{dx^3}, \quad \ldots\ldots \quad \frac{d^n f_0(x)}{dx^n},$$

welches bekanntlich die Fouriersche Hülfsreihe ist.

Lehrsatz 5. Bleibt $F(x)$, von $x = A$ bis $x = B$, continuirlich und beständig entweder positiv oder negativ, und setzt man:

$$
\begin{aligned}
f_r(x) &= F(x)\\
f_{r-1}(x) &= \varphi_{r-1}(x)\int_{a_{r-1}}^{x}\psi_r(x)F(x)\,dx\\
f_{r-2}(x) &= \varphi_{r-2}(x)\int_{a_{r-2}}^{x}\psi_{r-1}(x)f_{r-1}(x)\,dx,\\
f_{r-3}(x) &= \varphi_{r-3}(x)\int_{a_{r-3}}^{x}\psi_{r-2}(x)f_{r-2}(x)\,dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_{\varrho-1}(x) &= \varphi_{\varrho-1}(x)\int_{a_{\varrho-1}}^{x}\psi_{\varrho}(x)f_{\varrho}(x)\,dx,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
f_1(x) &= \varphi_1(x)\int_{a_1}^{x}\psi_2(x)f_2(x)\,dx,\\
f_0(x) &= \varphi_0(x)\int_{a_0}^{x}\psi_1(x)f_1(x)\,dx,
\end{aligned}
$$

so wird, in so fern nur, von $x=A$ bis $x=B$, die Hülfsfunctionen $\varphi_\varrho(x)$ und $\psi_{\varrho+1}(x)$, von $\varrho=0$ bis $\varrho=r-1$, continuirlich, und für einerlei Werth von ϱ, unter einander gleichnamig sind, wie auch $\varphi_\varrho(x)$ nicht Null wird, und $\frac{d\varphi_\varrho(x)}{dx}$ ebenfalls continuirlich bleibt, die Reihe von Functionen

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x),\quad \ldots\ldots\quad f_r(x),$$

die Bedingungen (α.), (β.), (γ.) des ersten Lehrsatzes erfüllen, welche Werthe übrigens für die, als bestimmt gedachten, Gröfsen

$$a_0,\quad a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots\ldots\quad a_{r-1}$$

angenommen werden.

Folg. 1. Setzt man, um einen einfachen concreten Fall zu gewinnen:

$$F(x)=C,\qquad \psi_{\varrho+1}(x)=x^{\alpha_{\varrho+1}},\qquad \varphi_\varrho(x)=x^{\beta_\varrho},$$

wo C eine Constante, $\alpha_{\varrho+1}$ und β_ϱ, von $\varrho=0$ bis $\varrho=r-1$, ganze, für einerlei Werth von ϱ zugleich gerade oder ungerade Zahlen bezeichnen, so werden die Bedingungen des vorigen Lehrsatzes erfüllt von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, und die Function $f_0(x)$ wird alsdann eine ganze.

Folg. 2. Setzt man:

$$F(x)=C,\qquad \psi_{\varrho+1}(x)=x^{\alpha_{\varrho+1}},\qquad \varphi_\varrho(x)=x^{\beta_\varrho},$$

wo $\alpha_{\varrho+1}$ und β_ϱ Brüche von ungeraden Nennern, welche für einerlei Werth von ϱ, zugleich gerade oder ungerade Zähler haben, bezeichnen, so werden die vorigen Bedingungen ebenfalls erfüllt von $x=-\infty$ bis $x=+\infty$, und die Function $f_0(x)$ wird alsdann eine irrationale.

Folg. 3. Setzt man:

$$F(x)=C,\qquad \psi_{\varrho+1}(x)=a^{\varepsilon_{\varrho+1}x},\qquad \varphi_\varrho(x)=a^{\gamma_\varrho x},$$

wodurch jenen Bedingungen ebenfalls, von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, entsprochen wird, so entsteht für $f_0(x)$ die Form

$$A_0 x^{\eta_0 x} + A_1 x^{\eta_1 x} + A_2 x^{\eta_2 x} + A_3 x^{\eta_3 x} + \ldots + A_r x^{\eta_r x}.$$

6.

In Ansehung der Bedingungen des zweiten Lehrsatzes lassen sich die folgenden Theoreme darthun.

Lehrsatz 6. Bleiben, von $x = A$ bis $x = B$, die Functionen

$$\psi_0(x), \quad \psi_1(x), \quad \psi_2(x), \quad \psi_3(x), \quad \ldots \quad \psi_r(x)$$

continuirlich, unter einander gleichnamig und beständig entweder positiv oder negativ: so wird, wenn die Reihe

$$F_0(x), \quad F_1(x), \quad F_2(x), \quad F_3(x), \quad \ldots \quad F_r(x)$$

die Bedingungen des zweiten Lehrsatzes erfüllt, auch die folgende Reihe:

$$\psi_0(x) F_0(x), \quad \psi_1(x) F_1(x), \quad \psi_2(x) F_2(x), \quad \psi_3(x) F_3(x), \quad \ldots \quad \psi_r(x) F_r(x)$$

denselben Bedingungen entsprechen.

Lehrsatz 7. Bleiben, von $x = A$ bis $x = B$, die Functionen

$$\frac{d.F_0(x)}{dx}, \quad \frac{\partial \varphi(x)}{dx}, \quad \xi(x);$$

$$F_\varrho(x), \quad F_{\varrho+1}(x), \quad F_{\varrho+2}(x)$$

insgesammt continuirlich und $\varphi(x)$ und $\xi(x)$ unter einander gleichnamig; bezeichnen

$$\psi_\varrho^{(\varrho+2)}(x), \qquad \psi_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}(x), \qquad \psi_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}(x),$$

drei andere Functionen von x, der Gleichung

$$\psi_\varrho^{(\varrho+2)}(x) F_\varrho(x) + \psi_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}(x) F_{\varrho+1}(x) + \psi_{\varrho+2}^{(\varrho+2)}(x) F_{\varrho+2}(x) = 0$$

genügend, und überdies so beschaffen, dafs, wenn $c_{\varrho+1}$ irgend einen, zwischen A und B enthaltenen, besondern Werth von x bezeichnet, für welchen man hat:

$$F_{\varrho+1}(x) = 0,$$

alsdann:

$$Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}(x), \quad F_{\varrho+1}(x) = 0,$$

$$Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_\varrho^{(\varrho+2)}(x) F_\varrho(x) \text{ einförmig und angebbar,}$$

$$Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_\varrho^{(\varrho+2)}(x) \text{ und } Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_{\varrho+2}^{(\varrho+2)}(x) \text{ gleichnamig}$$

seien (die sämmtlichen Grenzen entweder mittelst einer zu-, oder einer abnehmenden Reihe als bestimmt gedacht); und setzt man:

$$f_0(x) = F_0(x),$$
$$f_1(x) = \xi(x)\frac{d\varphi(x)f_0(x)}{dx},$$

und von $\varrho = 0$ bis $\varrho = r-2$,

$$f_{\varrho+2}(x) = F_{\varrho+2}(x),$$
$$\psi_{\varrho+2}^{(\varrho+2)}(x)F_{\varrho-1}(x) = -[\psi_{\varrho}^{\varrho+2}(x)F_{\varrho}(x) + \psi_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}(x)F_{\varrho+1}(x)]:$$

so wird die entstehende Reihe

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots.\ f_r(x)$$

den Bedingungen (α.) und (β.) des 2ten Lehrsatzes entsprechen.

Folg. 1. In allen denjenigen Fällen also, wo sich die Hülfsfunctionen

$$\psi_{\varrho}^{(\varrho+2)}(x),\quad \psi_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}(x),\quad \psi_{\varrho+2}^{(\varrho+2)}(x),$$

$3(r-1)$ an der Zahl, nebst $\varphi(x)$ und $\xi(x)$ zugleich so annehmen lassen, dafs man endlich zu einer Function $f_r(x)$ gelange, deren besondere Werthe, von $x = A$ bis $x = B$, keine Zeichen-Änderung erleiden, wird stets eine Reihe

$$f_0(x),\ f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ \ldots.\ f_r(x)$$

angenommen werden können, welche auch der Bedingung (γ.) des 2ten Lehrsatzes entspricht.

Folg. 2. Setzt man, was am einfachsten ist,

$$\varphi(x) = 1,\quad \xi(x) = 1,$$
$$\psi_{\varrho}^{(\varrho+2)}(x) = c_{\varrho}^{\varrho+2},\quad \psi_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}(x) = Q_{\varrho+1}^{(\varrho+2)},\quad \psi_{\varrho+2}^{(\varrho+2)}(x) = c_{\varrho+2}^{(\varrho+2)}x^{2\mu_{\varrho+2}},$$

wo $Q_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}$ irgend eine ganze Function von x, $c_{\varrho}^{(\varrho+2)}$ und $c_{\varrho+2}^{(\varrho+2)}$ irgend zwei gleichnamige Constanten, und $\mu_{\varrho+2}$ irgend eine positive ganze Gröfse, der Null einschliefslich, bezeichnet; so wird den Bedingungen des vorigen Satzes entsprochen, wofern nur $F_0(x)$ und $\frac{dF_0(x)}{dx}$, für keinen zwischen A und B enthaltenen besonderen Werth von x, zugleich Null werden. Da nun in dem besonderen Falle, wo $F_0(x)$ zugleich eine ganze Function von x vom Grade n bildet, wie leicht zu übersehen, stets eine unendliche Anzahl verschiedener Systeme von Werthen für $Q_{\varrho+1}^{(\varrho+2)}$ und $\mu_{\varrho+1}$ möglich ist, mittelst deren man endlich zu einem Gliede (dessen Index die Zahl n

niemals übersteigen wird) gelangt, dessen Werthe von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ keine Zeichen-Änderung erleiden: so folgt, dafs, wofern nur $f_0(x) = F_0(x)$ eine solche ganze Function vom Grade n bildet, dafs $f_0(x)$ und $\frac{df_0(x)}{dx}$ für keinen reellen Werth von x zugleich Null werden, — stets zu $f_0(x)$ eine unendliche Anzahl Reihen, von denen $f_0(x)$ selbst das Anfangsglied bildet, wird gefunden werden können, welche insgesammt den Bedingungen (α.), (β.) und (γ.) des 2ten Lehrsatzes, und zwar von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ entsprechen.

Folg. 3. Setzt man ferner für $\mu_{\varrho+2}$ den einfachsten der hier statthaften Werthe, namentlich Null; so erlangt man für die zur Bestimmung von $f_{\varrho+2}(x)$ aus $f_{\varrho+1}(x)$ und $f_\varrho(x)$ dienende Gleichung

$$c_\varrho^{(\varrho+2)} f_\varrho(x) + Q_{\varrho+1}^{(\varrho+2)} f_{\varrho+1}(x) + c_{\varrho+2}^{(\varrho+2)} f_{\varrho+2}(x) = 0,$$

welche gerade zu der Sturmschen Hülfsreihe führt.

Lehrsatz 8. Bleiben, von $x = A$ bis $x = B$,

$$F_r(x), \quad F_{r+1}(x), \quad \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad \xi x,$$
$$F_{\varrho+2}(x), \quad F_{\varrho+1}(x), \quad F_\varrho(x),$$

insgesammt continuirlich, $\varphi(x)$ und $\varrho(x)$ gleichnamig und $F_r(x)$ beständig entweder positiv oder negativ; bezeichnen

$$\psi_\varrho^{(\varrho)}(x), \quad \psi_{\varrho+1}^{(\varrho)}(x), \quad \psi_{\varrho+2}^{(\varrho)}(x)$$

drei Hülfsfunctionen von x, der Gleichung

$$\psi_{\varrho+2}^{(\varrho)}(x).F_{\varrho+2}(x) + \psi_{\varrho+1}^{(\varrho)}(x).F_{\varrho+1}(x) + \varphi_\varrho^{(\varrho)}(x).F_\varrho(x) = 0$$

genügend, und überdies so beschaffen, dafs, wenn $c_{\varrho+1}$ irgend einen zwischen A und B enthaltenen besondern Werth von x bezeichnet, der Gleichung

$$F_{\varrho+1}(x) = 0$$

entsprechend, alsdann:

$$Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_{\varrho+1}^{(\varrho)}(x) F_{\varrho+1}(x) = 0,$$

$Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_{\varrho+2}^{(\varrho)}(x) F_{\varrho+2}(x)$ einförmig und angebbar,

$Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_{\varrho+2}^{(\varrho)}(x)$ und $Gr^{x=c_{\varrho+1}} \psi_\varrho^{(\varrho)}(x)$ gleichnamig

seien (die sämmtlichen Grenzen entweder mittelst zu — oder mittelst abnehmender Reihen als bestimmt gedacht); und setzt man:

$$f_r(x) = F_r(x),$$
$$f_{r-1}(x) = F_{r-1}(x),$$

wie auch von $\varrho = r-2$ bis $\varrho = 0$,

$$\psi_{\varrho}^{(\varrho)}(x)\, F_{\varrho}(x) = -[\psi_{\varrho+1}^{(\varrho)}(x)\, F_{\varrho+1}(x) + \psi_{\varrho+2}^{(\varrho)}(x)\, F_{\varrho+2}(x),$$
$$f_{\varrho}(x) = F_{\varrho}(x),$$

so wird, in so fern nur zugleich der Gleichung

$$f_0(x) = \varphi(x) \int_{a_\nu}^{x} \xi(x) f_1(x)\, dx$$

entsprochen wird, die so entstehende Reihe

$$f_0(x),\quad f_1(x),\quad f_2(x),\quad f_3(x),\quad \ldots .\quad f_r(x)$$

den Bedingungen (α.), (β.), (γ.) des 2ten Lehrsatzes Genüge leisten.

23.

Summenrechnung der durch einfache Functionen erzeugten Reihen.

(Von dem Herrn Prof. *Oettinger* zu Heidelberg.)

(Fortsetzung von No. 6. und 14. Band XI., No. 24. Band XII., No. 22., 23. und 24. Band XIII., und No. 18. Band. XIV.)

---

§. 78.

Summirung der reciproken Potenzenreihen, deren Glieder mit positiven Zeichen verbunden sind.

Bekanntlich nennt man reciproke Potenzen-Reihen diejenigen Reihen, deren einzelne Glieder Brüche sind, deren Zähler die Einheit, die Nenner aber dieselben Potenzen einer um gleiche Zunahme wachsenden Grundgröfse x sind. Sollen nun die Summen dieser Reihen gefunden werden, so hat man in den Gleichungen (351.—353.) $\frac{1}{x^p}$ statt x zu setzen, und dann die negativen Unterschiede und Aufstufungen dieser Function nach Angabe der vorstehenden Gleichungen einzuführen. Legt man zuerst die reciproken Potenzen-Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind, zu Grunde, so hat man aus der ersten Gleichung No. 350.:

$$\frac{1}{x^p}+\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}+\ldots.+\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$
$$=\Delta^{-1}\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)^p}-\Delta^{-1}\frac{1}{x^p}.$$

Die Darstellung der beiden Ausdrücke auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, in ihrer entwickelten Gestalt, ist nöthig, um die Summen-Ausdrücke für alle Potenzenreihen zu geben. Diese bestimmen sich aus (195.), wenn $\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)}$ und $\frac{1}{x}$ statt y gesetzt wird. Hiernach ist:

372.
$$\frac{1}{x^p}+\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}+\ldots.+\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$
$$=-\frac{1}{(p-1)(x+(n+1)\Delta x)^{p-1}\Delta x}+\frac{1}{(p-1)x^{p+1}\Delta x}$$
$$-\frac{1}{2(x+(n+1)\Delta x)^p}+\frac{1}{2x^p}$$
$$-\frac{p\Delta x}{6.2(x+(n+1)\Delta x)^{p+1}}+\frac{p\Delta x}{6.2x^{p+1}}$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{30.4.1.2.3.(x+(n+1)\Delta x)^{p+3}}-\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{30.4.1.2.3.x^{p+3}}$$
. . . . . .

Das letzte Glied in der Summenreihe stimmt mit den Gliedern der ersten Scheitelreihe nicht überein. Zählt man, um diese Übereinstimmung herbei zu führen, das Glied $\frac{1}{(x+(n+1)\Delta x)^p}$ zu, setzt $n-1$ statt n, und scheidet die den beiden Reihen im Summen-Ausdrucke gemeinschaftlichen Factoren aus, so gewinnt man:

373.
$$\frac{1}{x^p}+\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}+\ldots.+\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$
$$=-\frac{1}{(p-1)\Delta x}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p-1}}-\frac{1}{x^{p-1}}\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}+\frac{1}{x^p}\right]$$
$$-\frac{p\Delta x}{6.2}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+1}}-\frac{1}{x^{p+1}}\right]$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{30.4.1.2.3}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+3}}-\frac{1}{x^{p+3}}\right]$$
$$-\frac{p(p+1)\ldots.(p+4)(\Delta x)^5}{42.6.1.2\ldots.5}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+5}}-\frac{1}{x^{p+5}}\right]$$
. . . . . .

Diese Gleichung gilt für jeden Werth von x, Δx und p; sie hat jedoch die Eigenschaft, dafs die Potenzen von $(x+n\Delta x)$ und von x im Summen-Ausdrucke steigen, und führt deswegen auf eine unendliche Glieder-Anzahl. Berücksichtigt man, dafs, wenn $x+n\Delta x$ nur irgend eine etwas grofse Zahl bedeutet, die Werthe von $\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+q}}$ bald sehr klein werden, und dafs alsdann die Glieder dieser Reihe sehr convergiren: so läfst sich diese Reihe dennoch zur Summirung der reciproken Potenzenreihen

benutzen, weil nur sehr wenige Glieder zur Bestimmung des Summen-Ausdruckes nöthig werden. Bei einer geringen Glieder-Anzahl wird sich die vorliegende Reihe weniger zweckmäfsig gebrauchen lassen.

Bei Aufsuchung der Summen-Ausdrücke für die einzelne Potenzenreihen bietet die zweite Scheitelreihe des Summen-Ausdrucks Schwierigkeit dar. Sie hat, was auch x bedeuten mag, folgende Gestalt:

$$\frac{1}{(p-1)x^{p-1}\Delta x}+\frac{1}{2x^p}+\frac{p\Delta x}{6.2.x^{p+1}}-\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{30.4.1.2.3.x^{p-3}}+\ldots.$$

und ihre Werth-Bestimmung ist wesentlich zur Auffindung des Summen-Ausdruckes nöthig.

Könnte man der Gröfse x einen solchen Werth geben, dafs diese Reihe verschwinde, so wäre dies die einfachste Auflösung der Aufgabe. Setzte man $x=0$, so würden alle einzelnen Glieder dieser Reihe in folgender allgemeinen Form

$$\frac{M}{o}$$

sich wieder finden. Da dieser Ausdruck zu den sogenannten unbestimmten gehört, so mufs sein Werth auf eine andere Weise bestimmt werden. Dies wird am besten dadurch geschehen, dafs man, für die verschiedenen Werthe von p, der Gröfse x irgend einen zur Berechnung dienlichen Werth giebt, und für diesen Fall den Werth der Reihe sucht. Ist er für einen Fall gefunden, so wird er auch für alle in diesem Falle enthaltenen specielle Fälle gelten. Der Werth dieser Reihe für einige Fälle, ist in meinem Differenzial-Calcul §. 150. Pag. 281 u. ff. aufgefunden. Diese Reihe führt gewöhnlich den Namen „Constante," wie sie auch Euler in seiner Differenzialrechnung 2ter Bd. 6tes Cap. (Übersetzung von Michelsen), wo er von der Summirung der Reihen handelt, genannt hat. Der gefundene Summen-Ausdruck ist für den Fall wo $p=1$ bedeutet unbrauchbar, weil dann das erste Glied im Summen-Ausdrucke folgende Gestalt

$$-\frac{1}{0.\Delta x}\left[\frac{1}{x+n\Delta x}-\frac{1}{1^0}\right]$$

erhält, und der Ausdruck aus der vorliegenden Gleichung selbst nicht bestimmt werden kann.

Setzen wir nun $x=1$, $\Delta x=1$ und $n=n-1$, und statt p allmälig die Werthe 2, 3, 4, ..., so erhalten wir die Summen-Ausdrücke für die verschiedenen reciproken Potenzenreihen. Bezeichnen wir die

Werthe der genannten Reihe mit C, so werden wir erhalten, wenn wir uns statt der ausführlichen Summen-Darstellung des folgenden Zeichens bedienen:

$$S\frac{1}{n^p} = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}+\ldots.\frac{1}{n^p}:$$

374. $$S\frac{1}{n^2} = C-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{6n^3}+\frac{1}{30n^5}-\frac{1}{42n^7}+\ldots.,$$

wo

$$C = 1{,}6449370\ldots. = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\frac{1}{30}+\frac{1}{42}-\frac{1}{30}+\ldots.$$

ist. Ferner

$$S\frac{1}{n^3} = C-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{4n^4}+\frac{1}{12n^6}-\ldots.,$$

wo

$$C = 1{,}2020569\ldots. = 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{2}-\frac{1}{30}\cdot\frac{5}{2}+\ldots.$$

ist, u. s. w.

§. 79.

Summirung der reciproken Potenzenreihen, deren Glieder abwechselnde Zeichen haben.

Wir wenden uns nun zur Darstellung der Summen-Ausdrücke für reciproke Potenzenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind. Zu unterscheiden sind Reihen mit ungerader und gerader Glieder-Anzahl. Gehen wir von der ersten Darstellung (351.) aus, so erhalten wir für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl, wenn $X_0 = \frac{1}{x^p}$ gesetzt wird:

$$\frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\ldots.+\frac{1}{(x+n\Delta x)^p} = \zeta^{-1}\frac{1}{[x+(n+1)\Delta x]^p}+\zeta^{-1}\frac{1}{x^p}.$$

Gehen wir aber von der ersten Darstellung (352.) aus, so erhalten wir für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

$$\frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\ldots.-\frac{1}{(x+n\Delta x)^p} = -\zeta^{-1}\frac{1}{[x+(n+1)\Delta x]^p}+\zeta^{-1}\frac{1}{x^p}.$$

Um die Summen-Ausdrücke zu bestimmen, ist in der Gleichung (85.) statt y zuerst $x+(n+1)\Delta x$ und dann x zu setzen. Hiernach wird für eine Summenreihe von ungerader Glieder-Anzahl:

375.
$$\frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\ldots.+\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$
$$=\frac{1}{2[x+(n+1)\Delta x]^p}+\frac{1}{2x^p}$$
$$+\frac{p\Delta x}{4[x+(n+1)\Delta x]^{p+1}}+\frac{p\Delta x}{4x^{p+1}}$$
$$-\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{8.1.2.3.[x+(n+1)\Delta x]^{p+3}}-\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{8.1.2.3x^{p+3}}$$
. . . . . .

und für eine Summenreihe von gerader Glieder-Anzahl:

376.
$$\frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\ldots.-\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$
$$=-\frac{1}{2[x+(n+1)\Delta x]^p}+\frac{1}{2x^p}$$
$$-\frac{p\Delta x}{4[x+(n+1)\Delta x]^{p+1}}+\frac{p\Delta x}{4x^{p+1}}$$
$$+\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{8.1.2.3.[x+(n+1)\Delta x]^{p+3}}-\frac{p(p+1)(p+1)(\Delta x)^3}{8.1.2.3x^{p+3}}$$
. . . . . .

Das letzte Glied der Summenreihe stimmt mit den Gliedern in der Scheitelreihe des Summen-Ausdruckes nicht überein. Zählen wir nun in (375.) das Glied $\frac{1}{[x+(n+1)\Delta x]^p}$ ab, in (376.) aber zu, setzen dann $n-1$ statt n, scheiden die gemeinschaftlichen Factoren der Reihen aus, und bemerken, dafs die ungerade Glieder-Anzahl in eine gerade und umgekehrt übergeht: so fliefst hieraus folgende Darstellung. Für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl:

377.
$$S\frac{1}{x^p}=\frac{1}{x^p}-\frac{1}{(x+\Delta x)^p}+\frac{1}{(x+2\Delta x)^p}-\ldots.-\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$
$$=-\tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^p}-\frac{1}{x^p}\right]$$
$$+\frac{p\Delta x}{4}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+1}}+\frac{1}{x^{p+1}}\right]$$
$$-\frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{8.1.2.3}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+3}}+\frac{1}{x^{p+3}}\right]$$
$$+\frac{p(p+1)\ldots.(p+4)(\Delta x)^5}{4.1.2\ldots.5}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+5}}+\frac{1}{x^{p+5}}\right]$$
. . . . . .

und für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

$$378.\quad S\frac{1}{x^p} = \frac{1}{x^p} - \frac{1}{(x+\Delta x)^p} + \frac{1}{(x+3\Delta x)^p} - \ldots + \frac{1}{(x+n\Delta x)^p}$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^p} + \frac{1}{x^p}\right]$$
$$- \frac{p\Delta x}{4}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+1}} - \frac{1}{x^{p+1}}\right]$$
$$- \frac{p(p+1)(p+2)(\Delta x)^3}{1.2.3....5}\left[\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p+3}} - \frac{1}{x^{p+3}}\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die hier gefundenen Summen-Ausdrücke haben, wie die des vorigen §., das Eigenthümliche, dafs die Exponenten steigen. Sie führen auf eine unendliche Gliederreihe, und lassen sich daher zur Summirung der reciproken Potenzenreihen mit abwechselnden Zeichen gebrauchen; besonders dann sehr zweckmäfsig, wenn p und x grofse Zahlen bedeuten.

Die gefundenen Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken (377.) und (378.) sind ganz allgemein und gelten für jeden Werth von x und Δx, den Fall ausgenommen, wenn $x = 0$ ist. Die Bestimmung des Werthes der zweiten Scheitelreihe ist auch hier wesentlich zur Auffindung des Summen-Ausdrucks nöthig.

Wir wenden uns nun zu einigen speciellen Fällen, behandeln die einfacheren und setzen daher $x = 1$, $\Delta x = 1$, $n = n-1$ und $p = 1$. Dann erhalten wir folgende Darstellung für die harmonische Reihe, mit abwechselnden Zeichen bei gerader Glieder-Anzahl:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{n}$$
$$= -\frac{1}{2n^p} + \frac{1}{4n^2} - \frac{1}{8n^4} + \frac{1}{4n^6} - \ldots.$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \ldots.$$

und für eine ungerade Glieder-Anzahl:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$
$$= \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n^2} + \frac{1}{8n^4} - \frac{1}{4n^6} + \ldots.$$
$$+ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \ldots.$$

In beiden Gleichungen kommt die Reihe

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\ldots.$$

vor. Was auch n für einen Werth haben mag, so mufs ihr Werth immer dem Summen-Ausdrucke zugezählt werden. Dieser Werth aber ist selbst von der Glieder-Anzahl n unabhängig. Er ist unveränderlich derselbe bei einer endlichen, oder bei einer unendlichen Glieder-Anzahl. Setzen wir daher n unendlich grofs, so wird die zu summirende Reihe selbst eine unendlich grofse Glieder-Anzahl haben. Die Glieder des Summen-Ausdruckes $\frac{1}{2n}$, $\frac{1}{4n^2}$ u. s. w. werden aber in 0 übergehen, und es ist dann bei unendlich grofsem n:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}.$$

Nun ist

$$\log(1+x)=1-\frac{x}{2}+\frac{x}{3}-\frac{x}{4}+\ldots.$$

was auch x bedeuten mag. Setzen wir $x=1$, so wird:

$$\log 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\ldots.=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}-\ldots.$$

Nennen wir nun auch hier den Werth der begleitenden beständigen Reihe die Constante, so ergiebt sich, dafs der hyperbolische Logarithme der Zahl 2 die Constante der harmonischen Reihe mit abwechselnden Zeichen, und zugleich die Summe der Coefficienten, welche die Glieder der ersten negativen Aufstufung begleiten, ist. Nun ist bekanntlich $\log 2 = 69314718055\ldots.$; also erhalten wir hieraus, wenn wir uns zur Bezeichnung der Summenreihen mit abwechselnden Zeichen des Ausdrucks

$$S\frac{1}{-n^p}$$

bedienen, für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl:

379.
$$S\frac{1}{-n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.-\frac{1}{n}$$
$$=\log 2-\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}-\frac{1}{8n^4}+\frac{1}{4n^6}-\ldots.$$

und für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

380.
$$S\frac{1}{-n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots.-\frac{1}{n}$$
$$=\log 2+\frac{1}{2n}-\frac{1}{4n^2}+\frac{1}{8n^4}-\frac{1}{4n^6}+\ldots.$$

Den nämlichen Werth würden wir für die Constante erhalten haben, wenn wir $n=10$ gesetzt und daraus den zehn ersten Gliedern der Reihe den Werth berechnet hätten.

Um die reciproke Potenzenreihe des zweiten Grades mit abwechselnden Zeichen zu erhalten, setzen wir in (377.) $x=1$, $\Delta x=1$, $n-1=n$ und $p=2$; dann entsteht für eine gerade Glieder-Anzahl:

$$381.\quad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots.-\frac{1}{n^2}$$
$$=-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}-\frac{1}{2n^5}+\frac{3}{2n^7}-\ldots.$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{17}{2}+\ldots.$$

und für eine ungerade Glieder-Anzahl:

$$382.\quad 1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}-\frac{1}{2^4}+\ldots.+\frac{1}{n^2}$$
$$=+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^5}-\frac{3}{2n^7}-\ldots.$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{17}{2}+\ldots.$$

Auch hier mufs zuerst der Werth der zweiten Horizontalreihe bestimmt werden. Wir nehmen zu dem Ende $n=10$ an, und nennen den Werth der Reihe C; dann ist:

$$383.\quad C=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-\frac{1}{36}+\frac{1}{49}-\frac{1}{64}+\frac{1}{81}-\frac{1}{100}$$
$$+\frac{1}{200}-\frac{1}{2000}+\frac{1}{200000}-\frac{3}{20000000}+\ldots.$$

Werden nun die hier angezeigten Brüche in Decimalstellen dargestellt und untereinander zu- und abgezählt, so findet man:

$$384.\quad C=0{,}8234\,1703\,33=1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{17}{2}+\ldots.$$

und hiernach ergeben sich folgende Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken, und zwar für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl:

$$385.\quad S\frac{1}{-n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\ldots.-\frac{1}{n^2}$$
$$=C-\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^5}+\frac{3}{2n^7}-\ldots.$$

und für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

$$386.\quad S\frac{1}{-n^2}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots.+\frac{1}{n^2}$$
$$=C+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}+\frac{1}{2n^5}-\frac{3}{2n^7}+\ldots.$$

Je gröfser n wird, desto weniger Glieder des Summen-Ausdrucks sind nöthig, um den Werth der Summe zu finden. Ist n unendlich grofs, so wird der Werth der Constante gleich.

Die Aufsuchung der Summen-Ausdrücke für derartige Reihen läfst sich weiter verfolgen. Eben so lassen sich die Summen-Ausdrücke für die reciproken Potenzenreihen mit abwechselnden Zeichen, deren Glieder mit den figurirten Zahlen verbunden sind, nach Anleitung der Gleichungen (351.) und (352.) finden. Wir übergehen jedoch diese Darstellung, da sie uns zu weit führen würde.

§. 80.

Summirung der Facultätenreihen.

Wir wenden uns nun zu der Darstellung der Summen-Ausdrücke für Facultätenreihen und betrachten zuerst diejenigen, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind. Setzen wir in der ersten Darstellung von (350.)

$$X_0+X_1+X_2+\ldots.+X_n = \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta X_0,$$

$X_0 = x^{p\,|\,\Delta x}$, und bestimmen aus der Gleichung (197.) den ersten negativen Unterschied für $[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}$ und $x^{p\,|\,\Delta x}$ dadurch, dafs wir zuerst $x+(n+1)\Delta x$ und dann x statt y setzen, so erhalten wir folgende allgemeine Summenreihe:

$$387.\quad x^{p\,|\,\Delta x}+(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\ldots.+(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}$$
$$=\frac{(x+n\Delta x)^{p+\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x}-\frac{(x-\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x}=\frac{(x+n\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}-(x-\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x},$$

oder, in entwickelter Darstellung:

$$\begin{aligned}388.\quad = {} & x(x+\Delta x)\ (x+2\Delta x)+\ldots.\ [x+(p-1)\Delta x]\\ & +(x+\Delta x)\ (x+2\Delta x)+\ldots.\ [x+p\Delta x]\\ & +(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)+\ldots.\ [x+(p+1)\Delta x]\\ & +(x+3\Delta x)(x+4\Delta x)+\ldots.\ [x+(p+2)\Delta x]\\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ & +(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x]+\ldots.\ [x+(p+n-1)\Delta x]\\ = {} & \frac{(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x]+\ldots.\ [x+(p+n)\Delta x]}{(p+1)\Delta x}\\ & -\frac{(x-\Delta x)x(x+\Delta x)+\ldots.\ [x(p-1)\Delta x]}{(p+1)\Delta x}.\end{aligned}$$

Da x, Δx, p, n von einander unabhängig sind, so ist diese Reihe ganz allgemein. Aus ihr lassen sich sehr leicht specielle Fälle ableiten. Setzt man nämlich $x=0$, $\Delta x=1$, so verschwindet das zweite Glied des Sum-

men-Ausdrucks, weil einer seiner Factoren $1-1=0$ wird, und dann ist:

$$389.\quad 1.2.3....p+2.3.4....(p+1)+....+n(n+1)....(n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)....(n+p)}{p+1}.$$

Wird durch $1.2.3....p$ gemessen, so entsteht:

$$390.\quad 1+\frac{2.3....(p+1)}{1.2....p}+\frac{3.4....(p+2)}{1.2....p}+....+\frac{n(n+1)....(n+p-1)}{1.2,...p} = \frac{n(n+1)....(n+p)}{1.2....(p+1)},$$

wie bekannt. Ist aber $x=1$, $\Delta x=2$, so entsteht:

$$391.\quad 1.3.5....(2p-1)+3.5....+(2p+1)....+(2n+1)(2n+3)....[2(n+p)-1] = \frac{(2n+1)(2n+3)....[2(p+n)+1]-1.3.5....(2p-1)}{2(p+1)}.$$

Legen wir die zweite Reihe in (350.) zum Grunde und führen die nöthigen Werthe aus (197.) ein, so erhalten wir:

$$392.\quad (n+1)x^{p\,|\,\Delta x}+n(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+(n-1)(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+....(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} = \frac{(x+n\Delta x)^{p+2\,|\,\Delta x}}{(p+1)^{2\,|\,1}(\Delta x)^2}-\frac{n+1}{1}\cdot\frac{(x-\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x}-\frac{(x-\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)^{2\,|\,1}(\Delta x)^2},$$

und allgemein, aus (347.):

$$393.\quad \frac{(n+1)^{1-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}x^{p\,|\,\Delta x}+\frac{n^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\frac{(n-1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}....+(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} = \frac{(x+n\Delta x)^{p+r\,|\,\Delta x}}{(p+1)^{r\,|\,1}(\Delta x)^r}-\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}\cdot\frac{(x-\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x}-\frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}}\cdot\frac{(x-\Delta x)^{p+2\,|\,\Delta x}}{(p+1)^{2\,|\,1}(\Delta x)^2}....-\frac{(x-\Delta x)^{p+r\,|\,\Delta x}}{(p+1)^{r\,|\,1}(\Delta x)^r}.$$

Da in dieser allgemeinen Gleichung r, n, x, Δx von einander unabhängig sind, so läfst diese Formel sehr viele Anwendungen zu. Setzen wir z. B. $x=1$ und $\Delta x=1$, $n=n-1$, so verschwinden alle Glieder des Summen-Ausdrucks bis auf eines, und wir erhalten folgende Fälle, für $r=2, 3, ...$:

$$394.\quad \begin{cases} n.1.2.3....p+(n-1).2.3....(p+1)+....+n(n+1)....(n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)....(n+p+1)}{(p+1)(p+2)}, \\ \frac{n(n+1)}{1.2}.1.2....p+\frac{(n-1)n}{1.2}.2.3....(p+1)+....+\frac{2.1}{1.2}n(n+1)....(n+p-1) = \frac{n(n+1)(n+2)....(n+p+2)}{(p+1)(p+2)(p+3)}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

§. 81.

Wir gehen nun zu der Darstellung der Summen-Ausdrücke für Reihen, deren Glieder aus Nennerfacultäten bestehen und mit positiven Zeichen verbunden sind, über, und erhalten sie leicht, wenn in der ersten Gleichung (350.) $X = \frac{1}{x^{p\,|\,\Delta x}}$ gesetzt wird. Dann entsteht:

$$\frac{1}{x^{p\,|\,\Delta x}} + \frac{1}{(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} + \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} + \ldots \frac{1}{(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}$$
$$= \Delta^{-1} \frac{1}{[x+(n+1)\,\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}} - \Delta^{-1} \frac{1}{x^{p\,|\,\Delta x}}.$$

Um den Summen-Ausdruck für die vorliegende Reihe zu erhalten, haben wir die beiden ersten negativen Unterschiede der vorstehenden Functionen auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens darzustellen. Die Gleichung (199.) giebt für den Fall, wo $m = 1$, $y = x + (n+1)\,\Delta x$, und dann $= x$ gesetzt wird:

$$\Delta^{-1} \frac{1}{[x+(n+1)\,\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}} = -\frac{1}{(p-1)\,[x+(n+1)\,\Delta x]^{p-1\,|\,\Delta x}\,\Delta x}$$

und

$$-\Delta^{-1} \frac{1}{x^{p\,|\,\Delta x}} = \frac{1}{(p-1)\,x^{p-1\,|\,\Delta x}\,\Delta x}.$$

Hierdurch gewinnen wir für Reihen der Nenner-Facultäten folgende Darstellung:

395. $$\frac{1}{x^{p\,|\,\Delta x}} + \frac{1}{(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} + \frac{1}{(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} + \ldots + \frac{1}{(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}$$
$$= -\frac{1}{(p-1)\,[x+(n+1)\,\Delta x]^{p-1\,|\,\Delta x}\,\Delta x} + \frac{1}{(p-1)\,x^{p-1\,|\,\Delta x}.\,\Delta x},$$

oder in entwickelter Darstellung:

396. $$\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(p-1)\,\Delta x]}$$
$$+ \frac{1}{(x+\Delta x)(x+2\Delta x)\ldots(x+p\,\Delta x)}$$
$$+ \frac{1}{(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)\ldots[x+(p+1)\,\Delta x]}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+ \frac{1}{(x+n\Delta x)\,[x+(n+1)\,\Delta x]\ldots[x+(n+p-1)\,\Delta x]}$$
$$= \frac{1}{(p-1)\,\Delta x}\left[\frac{1}{x(x+\Delta x)\ldots[x+(p-2)\,\Delta x]} - \frac{1}{[x+(n+1)\,\Delta x]\ldots[x+(n+p-1)\,\Delta x]}\right].$$

Diese Reihe ist für jeden Werth von x und Δx gültig; nur in dem Falle, wenn $p = 1$ ist, führt sie zu keinem Resultate, weil alsdann der Ausdruck $\frac{1}{(p-1)\Delta x} = \frac{1}{o \cdot \Delta x}$ nicht aus der Natur der Reihe selbst bestimmt werden kann.

Die Reihe selbst läfst viele Anwendungen zu. Setzt man $x = 1$ und $\Delta x = 1$, $n = n-1$; so hat man, wenn $p = 2, 3, 4, \ldots$ gesetzt wird, folgende Reihen, mit ihren Summen-Ausdrücken:

$$397.\quad \begin{cases} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \ldots \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}, \\ \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \ldots \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)(n+2)-2}{4.(n+1)(n+2)}, \\ \frac{1}{1.2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \ldots\ldots\ldots \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{n(n+1)(n+2)-6}{3.1.2.3.(n+1)(n+2)(n+3)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{1}{1.2\ldots.p} + \frac{1}{2.3\ldots.(p+1)} + \ldots\ldots \frac{1}{n(n+1)\ldots.(n+p-1)} \\ \qquad = \frac{n(n+1)\ldots.(n+p-2)-1.2.3\ldots.(p-1)}{(p-1)1.2\ldots.(p-1)(n+1)(n+2)\ldots.(n+p-1)}. \end{cases}$$

Eben so, wenn unter den nämlichen Bedingungen $\Delta x = 2$, $n = n$ gesetzt wird:

$$398.\quad \begin{cases} \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}, \\ \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{3.5.7} + \frac{1}{5.7.9} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)} = \frac{1}{2.1.3.(2n+3)(2n+5)}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die zweite Reihe von (350.) führt zu folgender Darstellung, wenn die nöthigen Werthe aus der Gleichung (199.) eingeführt werden:

$$399.\quad \frac{n+1}{x^{p\,|\,\Delta x}} + \frac{n}{(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} + \frac{n-1}{(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} + \ldots \frac{1}{(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}$$
$$= \frac{1}{(p-1)(p-2)[x+(n+2)\Delta x)^{p+2\,|\,\Delta x}.(\Delta x)^2} + \frac{n+1}{(p-1)x^{p-1\,|\,\Delta x}.\Delta x}$$
$$- \frac{1}{(p-1)(p-2)(x+\Delta x)^{p-2\,|\,\Delta x}.(\Delta x)^2};$$

die dritte zu folgender:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2.x^{p\,|\,\Delta x}}+\frac{n(n+1)}{1.2.(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}+\ldots.+\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}$$
$$=-\frac{1}{(p-1)^{3\,|\,-1}(x+(n+3)\Delta x)^{p-3\,|\,\Delta x}.(\Delta x)^3}+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2.(p-1)\Delta x.x^{p-1\,|\,\Delta x}}$$
$$-\frac{n+1}{(p-1)^{2\,|\,-1}(\Delta x)^2(x+\Delta x)^{p-2\,|\,\Delta x}}+\frac{1}{(p-1)^{3\,|\,-1}(\Delta x)^3(x+2\Delta x)^{p-3\,|\,\Delta x}},$$

und allgemein aus (347.):

400.
$$\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}x^{p\,|\,\Delta x}}+\frac{n^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}+\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}(x+2\Delta x)^{p}}+\ldots.+\frac{1}{(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}$$
$$=(-)^r\frac{1}{(p-1)^{r\,|\,-1}(x+(n+r)\Delta x)^{p-r\,|\,\Delta x}}+\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}(p-1)\Delta x.x^{p-1\,|\,\Delta x}}$$
$$-\frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}(p-1)^{2-|\,1}(\Delta x)^2(x+\Delta x)^{p-1\,|\,\Delta x}}+\ldots(-)^{r-1}\frac{1}{(p-1)^{r\,|\,-1}(\Delta x)^r.(x+(r-1)\Delta x)^{p-r\,|\,\Delta x}}$$

Merkwürdig ist, dafs die so eben gefundenen Summen-Ausdrücke nur so lange gelten, als $(p-1)^{r\,|\,-1}$ eine reelle Facultät bedeutet. Sie sind unbrauchbar, wenn $(p-1)^{r\,|\,-1}=0$, also wenn p so grofs oder kleiner als r wird. In diesem Falle erscheint nämlich in dem Nenner des Summen-Ausdrucks 0, und dadurch geht der Summen-Ausdruck in einem sogenannten unbestimmten Ausdruck über. Specielle Fälle lassen sich leicht aus den vorliegenden Reihen ableiten. Wird in (399.) $x=1$, $\Delta x=1$ gesetzt, so gewinnt man:

401.
$$\frac{n+1}{1.2....p}+\frac{n}{2.3....(p+1)}+\frac{n-1}{3.4....(p+2)}+....\frac{1}{(n+1)(n+2)....(n+p)}$$
$$=\frac{1}{(p-1)(p-2)(n+3)....(n+p)}+\frac{n+1}{(p-1).1.2....(p-1)}-\frac{1}{(p-1)(p-2).2.3....(p-1)}.$$

Eben so aus (400.):

402.
$$\frac{(n+1)(n+2)....(n+r-1)}{1.2....(r-1)\,1.2....p}+\frac{n(n+1)....(n+r-2)}{1.2....(r-1)\,2.3....(p+1)}+....+\frac{1}{(n+1)(n+2)....(n+p)}$$
$$=(-)^r\frac{1}{(p-1)....(p-r)(n+r+1)....(n+p)}+\frac{(n+1)(n+2)....(n+r-1)}{(p-1)1.2....(p-1)1.2....(r-1)}$$
$$-\frac{(n+1)(n+2)...(n+r-2)}{(p-1)(p-2)2.3....(p-1)1.2....(r-2)}+....$$

§. 82.

Wenden wir uns nun zur Darstellung der Summen-Ausdrücke der Facultätenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind: so lassen sich die Summen-Ausdrücke nicht auf so einfachem Wege gewinnen; denn die negativen Aufstufungen, die zur Summirung der Facul-

tätenreihen mit abwechselnden Zeichen nöthig werden, haben zu keinen so einfachen Darstellungen wie die negativen Unterschiede geführt, wie aus §. 9. und §. 14. hervorgeht.

Da jedoch die Analysis die Summen-Ausdrücke der genannten Reihen noch nicht gegeben hat, so versuchen wir, sie auf folgendem Wege aufzufinden.

Die Reihe, deren Summirung uns nun beschäftigt, ist in entwickelter Darstellung folgende:

$$\begin{aligned} & x(x+\Delta x)(x+2\Delta x) \quad \ldots . (x+p\Delta x) \\ -- & (x+\Delta x)(x+2\Delta x) \quad \ldots . (x+(p+1)\Delta x) \\ + & (x+2\Delta x)(x+3\Delta x) \quad \ldots . (x+(p+2)\Delta x) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \pm & (x+n\Delta x)(x+(n+1)\Delta x) \ldots . (x+(n+p)\Delta x). \end{aligned}$$

Das letzte Glied hat das negative Zeichen, wenn die Glieder-Anzahl gerade, das positive, wenn die Glieder-Anzahl ungerade ist. Um die vorliegende Reihe durch die §. 73. Pag. 351 und 352 aufgefundenen Gleichungen summiren zu können, wird es nur nöthig sein, das allgemeine Glied dieser Reihe in Partialproducte zu zerlegen und so die Summirung dieser Reihe auf die Summen-Ausdrücke der Potenzialgröfsen zurück zu führen, und sie dann durch diese zu summiren.

Das angezeigte Verfahren wird ausführbar, wenn wir die Facultät:

$$y(y+\Delta x)(y+2\Delta x) \ldots . (y+p\Delta x)$$

in eine Reihe nach den Potenzen von y entwickeln. Diese Entwickelung giebt nach §. 42. Pag. 101 meiner Forschungen in der Analysis folgende Darstellung:

403.
$$\begin{aligned} y(y+\Delta x)(y+2\Delta x)\ldots.(y+p\Delta x) = y^{p+1} & + C(1;1,2,3,\ldots.p)y^p\Delta x \\ & + C(2;1,2,3,\ldots.p)y^{p-1}(\Delta x)^2 \\ & + C(3;1,2,3,\ldots.p)y^{p-2}(\Delta x)^3 \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + C(p;1,2,3,\ldots.p)y(\Delta x)^p. \end{aligned}$$

Wenn $C(1;1,2,3,\ldots.p)$ die Summe der Producte bezeichnet, welche durch die Verbindungen aus p Elementen zu r Elementen entstehen. Setzen wir nun der Kürze wegen C_1 statt $C(1;1,2,3,\ldots.p)$, C_2 statt $C(2;1,2,3,\ldots.p)$ u. s. w., und wenden diese Darstellung auf die Facultät $(x+n\Delta x)(x+(n+1)\Delta x)\ldots.(x+(n+p)\Delta x)$ an, indem wir $y = x+n\Delta x$ setzen, so ziehen wir hieraus folgende Darstellung:

$$404. \qquad (x+n\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}$$
$$= (x+n\Delta x)^{p+1} + C_1(x+n\Delta x)^p\Delta x + C_2(x+n\Delta x)^{p-1}(\Delta x)^2 + \ldots.$$
$$\ldots. + C_p(x+n\Delta x).(\Delta x)^p.$$

Diese Gleichung zerlegt das allgemeine Glied der Reihe in Partialproducte, die in ihrer Gesammtheit dasselbe wieder erzeugen. Werden daher für die einzelnen Theile die Summen gesucht und vereinigt, so hat man auch dadurch die Summe der erzeugenden Function. Deuten wir das Aufsuchen des Summen-Ausdruckes durch S an, so entsteht hieraus folgende allgemeine Gleichung:

$$S(x+n\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}$$
$$= S(x+n\Delta x)^{p+1} + C_1 S(x+n\Delta x)^p.\Delta x + C_2(\Delta x)^2 S(x+n\Delta x)^{p-1} + \ldots.$$
$$\ldots. + C_p(\Delta x)^p S(x+n\Delta x)$$

Da aber die Glieder der erzeugenden Summenreihe mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, so müssen die Summen der vorliegenden Partialproducte nach den Gleichungen (351.) und (352.), also durch Aufstufungen gesucht werden. Nun ist, für eine gerade Glieder-Anzahl, bei abwechselnden Zeichen:

$$S(x+n\Delta x)^p = -\zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^p + \zeta^{-1}x^p,$$

und für eine ungerade Glieder-Anzahl, bei abwechselnden Zeichen:

$$S(x+n\Delta x)^p = \zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^p + \zeta^{-1}x^p.$$

Folglich erhalten wir hieraus folgende Summirungsmethode für Facultätenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind:

$$405. \quad S\mp(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x][x+(n+2)\Delta x]\ldots.+[x+(n+p)\Delta x]$$
$$= \mp\zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^{p+1} \mp C_1\zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^p\Delta x \mp C_2\zeta^{-1}[x+(n+2)\Delta x]^{p-1}(\Delta x)^2.\ldots.$$
$$+\zeta^{-1}x^p + C_1\Delta x\,\zeta^{-1}x^p + C_2(\Delta x)^2\zeta^{-1}x^{p-1} + \ldots.$$

Die Reihe bricht ab, wenn der Exponent von $(x+n\Delta x)$ gleich 0 werden sollte. Die Summen-Ausdrücke für die Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens sind schon in den Gleichungen (360. — 363.) gefunden. Daher ist es nur nöthig, sie aus jenen Gleichungen hier einzuführen. Führen wir diese wirklich aus, so erhalten wir, da

$$S(n+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x] = S(x+n\Delta x)^2 + \Delta x\,S(x+n\Delta x)$$
$$S(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x][x+(n+2)\Delta x]$$
$$= S(x+n\Delta x)^3 + 3\Delta x\,S(x+n\Delta x)^2 + (\Delta x)^2 S(x+n\Delta x)$$

u. s. w. ist; für Facultätenreihen mit abwechselnden Zeichen, bei gerader Gliederzahl:

406.
$$\begin{cases} x(x+\Delta x)-(x+\Delta x)(x+2\Delta x)+(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)\ldots.-(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x] \\ \qquad = -\frac{1}{2}(x+n\Delta x)^2-(x+n\Delta x)\Delta x+\frac{x^2}{2}-\frac{(\Delta x)^2}{2}, \\ x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)-(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)+\ldots.-(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x][x+(n+2)\Delta x] \\ \qquad = -\frac{1}{2}(x+n\Delta x)^3-\frac{9}{4}(x+n\Delta x)^2\Delta x-\frac{5}{4}(x+n\Delta x)(\Delta x)^2 \\ \qquad\qquad +\frac{x^3}{2}+\frac{3x}{4}\Delta x-\frac{x(\Delta x)^2}{2}-\frac{3(\Delta x)^3}{4}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

bei ungerader Glieder-Anzahl aber:

407.
$$\begin{cases} x(x+2\Delta x)-(x+\Delta x)(x+2\Delta x)+\ldots.+(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x] \\ \qquad = \frac{1}{2}(x+n\Delta x)^2+(x+n\Delta x)\Delta x+\frac{x}{2}, \\ x(x+\Delta x)(x+2\Delta x)-(x+\Delta x)(x+2\Delta x)(x+3\Delta x)+\ldots.+(x+n\Delta x)[x+(n+1)\Delta x][x+(n+2)\Delta x] \\ \qquad = \frac{1}{2}(x+n\Delta x)^3+\frac{9}{4}(x+n\Delta x)^2\Delta x+\frac{5}{2}(x+n\Delta x)(\Delta x)^2 \\ \qquad\qquad +\frac{x^3}{2}+\frac{3x^2\Delta x}{4}-\frac{x(\Delta x)^2}{2}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Nach dieser Methode lassen sich die weitern Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken finden. Da x und Δx ganz unabhängig von einander sind und willkürlich angenommen werden können, so ist leicht einzusehen, dafs diese Reihen von grofser Allgemeinheit und Anwendbarkeit sind. Setzt man $x=1$ und $\Delta x=1$, so lassen ihre Summen-Ausdrücke bedeutende Reductionen zu, und es wird:

408.
$$\begin{cases} 1.2-2.3+3.4\ldots.-(n+1)(n+2) = -\frac{(n+1)^2}{2}-(n+1), \\ 1.2.3-2.3.4+3.4.5\ldots.-(n+1)(n+2)(n+3) = -\frac{(n+1)^3}{2}-\frac{9}{4}(n+1)^2-\frac{5}{2}(n+1)+\frac{3}{4}, \end{cases}$$

u. s. w.

409.
$$\begin{cases} 1.2-2.3+2.4\ldots.+(n+1)(n+2) = \frac{(n+1)^2}{2}+n+\frac{6}{2}, \\ 1.2.3-2.3.4+3.4.5\ldots.+(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{(n+1)^3}{2}-\frac{9}{4}(n+1)^2-\frac{5}{2}(n+1)+\frac{3}{4}. \end{cases}$$

Diese Reihen lassen sich auch durch die Facultäten von der erforderlichen Anzahl messen, und dann entstehen die Zahlen-Ausdrücke für die verschiedenen Verbindungsclassen. Hiervon wird später §. 95. eine bequemere Summirungsreihe mitgetheilt werden.

Auf die angegebene Weise lassen sich überhaupt alle möglichen Functionen, welche Summenreihen mit abwechselnden Zeichen bilden, sum-

miren. Auch kann man hiernach die Reihen für Nenner-Facultäten, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, summiren.

§. 83.

Eine andere Methode für die Summirung der Facultätenreihen mit abwechselnden Zeichen finden wir, wenn die Gleichung (342.), welche die Aufstufungen auf die Unterschiede zurückführt, zu Grunde gelegt wird. Die Gleichung

$$x^{p\,|\,\Delta x} - (x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} \ldots . \mp (x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}$$
$$= \mp \zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x} + \zeta x^{p\,|\,\Delta x}$$

verlangt, dafs die erste negative Aufstufung von $[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}$ und von $x^{p\,|\,\Delta x}$ bestimmt werde, um den Summen-Ausdruck der vorliegenden Reihe zu finden. Die Gleichung (342.) zeigt, dafs dies mittelst der positiven Unterschiede geschehen könne. Diese Unterschiede führen nach §. 30. bei den Facultäten im Wiederholungsfalle endlich auf 0. Daher können die negativen Aufstufungen durch eine endliche Reihe dargestellt werden. Stellen wir sie dadurch, dafs in (342.) $m=1$, $X=[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}$ und dann $X=x^{p\,|\,\Delta x}$ gesetzt wird, dar; so ist:

$$\zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x} = \frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}}{2} - \frac{\Delta[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}}{2^2} + \ldots .$$

und

$$\zeta^{-1}x^{p\,|\,\Delta x} = \frac{x^{p\,|\,\Delta x}}{2} - \frac{\Delta x^{p\,|\,\Delta x}}{2^2} + \frac{\Delta^2 x^{p\,|\,\Delta x}}{2^3} + \ldots .$$

Dies führt zu folgender allgemeinen Darstellung:

410. $$x^{p\,|\,\Delta x} - (x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} - \ldots . \mp (x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}$$
$$= \mp\left[\frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}}{2} - \frac{\Delta[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}}{2^2} + \ldots .\right]$$
$$+ \frac{x^{p\,|\,\Delta x}}{2} - \frac{\Delta x^{p\,|\,\Delta x}}{2^2} + \frac{\Delta^2 x^{x\,|\,\Delta x}}{2^3} - \ldots .$$

Die entwickelte Darstellung der positiven Unterschiede, und eine Reihe von einer geraden Glieder-Anzahl erfordert, folgende Gleichung:

411. $$x^{p\,|\,\Delta x} - (x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} + (x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} \ldots . - (x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}$$
$$= -\frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}}{2} + \frac{p[x+(n+2)\Delta x]^{p-1\,|\,\Delta x}\Delta x}{2^2} - \frac{p(p-1)[x+(n+3)\Delta x]^{p-2\,|\,\Delta x}(\Delta x)^2}{2^3} + \ldots .$$
$$+ \frac{x^{p\,|\,\Delta x}}{2} - \frac{p(x+\Delta x)^{p-1\,|\,\Delta x}\Delta x}{2^2} + \frac{p(p-1)(x+2\Delta x)^{p-2\,|\,\Delta x}(\Delta x)^2}{2^3} - \ldots .$$

eine Reihe von einer ungeraden Glieder-Anzahl folgende:

$$412.\quad x^{p\,|\,\Delta x}-(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}\ldots.+(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}$$
$$=\frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}}{2}-p\frac{[x+(n+2)\Delta x]^{p-1\,|\,\Delta x}}{2^2}-p(p-1)\frac{[x+(n+3)\Delta x]^{p-2\,|\,\Delta x}}{2^3}+\ldots.$$
$$+\frac{x^{p\,|\,\Delta x}}{2}-\frac{p(x+\Delta x)^{p-1\,|\,\Delta x}\Delta x}{2^2}+\frac{p(p-1)(x+2\Delta x)^{p-2\,|\,\Delta x}(\Delta x)^2}{2^3}-\ldots.$$

diese Reihen brechen ab, wenn ein Glied in 0 übergeht, und lassen sich ganz zweckmäfsig gebrauchen. Ist p im Verhältnisse zu n eine kleine Zahl, so werden sie sehr gute Dienste leisten. Aus ihnen leiten sich folgende specielle Fälle ab, für Reihen von gerader Glieder-Anzahl, wenn $x=1$ und $\Delta x=1$, $n=n-1$ und $p=1.2.3....$ gesetzt wird:

$$413.\quad\begin{cases}1.2-2.3+3.4-\ldots.-n(n+1)\\ \quad=-\frac{(n+1)(n+2)-1.2}{2}+2.\frac{n}{2^2}=\frac{n(n+2)}{2},\\ 1.2.3-2.3.4+3.4.5\ldots.-n(n+1)(n+2)\\ \quad=-\frac{(n+1)^{3\,|\,1}-1^{3\,|\,1}}{2}+3.\frac{(n+2)^{2\,|\,1}-2^{2\,|\,1}}{2^2}-3.2.\frac{(n+3)^{1\,|\,1}-3^{1\,|\,1}}{2^3},\\ 1.2.3.4-2.3.4.5+3.4.5.6\ldots.-n(n+1)(n+2)(n+3)\\ \quad=-\frac{(n+1)^{4\,|\,1}-1^{4\,|\,1}}{2}+4.\frac{(n+2)^{3\,|\,1}-2^{3\,|\,1}}{2^2}+12.\frac{(n+3)^{2\,|\,1}-3^{2\,|\,1}}{2^3}-24.\frac{(n+4)^{1\,|\,1}-4^{1\,|\,1}}{2^4},\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

und für eine Facultätenreihe von ungerader Glieder-Anzahl:

$$414.\quad\begin{cases}1.2-2.3+3.4-\ldots.+n(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)+1.2}{2}-2\frac{n+4}{2^2}+\frac{1}{2},\\ 1.2.3-2.3.4+3.4.5-\ldots.+n(n+1)(n+2)\\ \quad=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)+1.2.3}{2}-3\frac{(n+2)(n+3)+2.3}{2^2}+6\frac{n+6}{2^3}-\frac{6}{2^3},\\ \text{u. s. w.}\end{cases}$$

§. 84.

Summirung der Reihen, die durch Exponential-Gröfsen erzeugt werden.

Die Summen der Reihen, welche durch Exponentialgröfsen erzeugt werden, lassen sich auf eine ganz einfache Weise darstellen. Betrachten wir zuerst diejenigen Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind, so erhalten wir aus der ersten Reihe von No. 350., wenn dort $X_0=a^x$ gesetzt wird, folgende Reihe:

$$a^x+a^{x+\Delta x}+a^{x+2\Delta x}+\ldots.+a^{x+n\Delta x}=\Delta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x}-\Delta^{-1}a^x.$$

Zur Bestimmung der Glieder des Summen-Ausdruckes sind die ersten negativen Unterschiede der Exponentialgröfsen $a^{x+(n+1)\Delta x}$ und a^x nöthig. Sie

bestimmen sich aus der Gleichung (202.) §. 39., wenn $x+(n+1)\Delta x$ und dann x statt y und $m=1$ gesetzt wird. Hieraus wird:

$$415. \quad a^x + a^{x+\Delta x} + a^{x+2\Delta x} + \ldots + a^{x+n\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1} - \frac{a^x}{a^{\Delta x}-1} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x} - a^x}{a^{\Delta x}-1}.$$

Wird hierin $x=1$ und $n=n-1$ gesetzt, so gewinnt man hieraus die bekannte geometrische Reihe mit ihrem Summen-Ausdruck, und es ist:

$$416. \quad a + a^2 + a^3 + \ldots + a^n = \frac{a^{n+1}-a}{a-1}.$$

Wird die zweite Reihe der Darstellung (350.) zu Grunde gelegt und $X_0 = a^x$ gesetzt, so erhält man hieraus:

$$(n+1)a^x + n.a^{x+\Delta x} + (n-1)a^{x+2\Delta x} + \ldots + a^{x+n\Delta x} = \Delta^{-2} a^{x+(n+2)\Delta x} - (n+1)\Delta^{-1} a^x - \Delta^{-2} a^{x+\Delta x}.$$

Werden nach derselben Gleichung die nöthigen Werthe des Summen-Ausdrucks bestimmt und eingeführt, so ziehen wir hieraus:

$$(n+1)a^x + n.a^{x+\Delta x} + (n-1)a^{x+2\Delta x} + \ldots + a^{x+n\Delta x} = \frac{a^{x+(n+2)\Delta x} - a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2} - \frac{(n+1)a^x}{a^{\Delta x}-1}.$$

Durch ein ähnliches Verfahren erhalten wir auch folgende Reihe, nebst ihrem Summen-Ausdrucke:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}a^x + \frac{n(n+1)}{1.2}a^{x+\Delta x} + \frac{(n-1)n}{1.2}a^{x+2\Delta x} + \ldots + a^{x+n\Delta x} = \frac{a^{x+(n+3)\Delta x} - a^{x+2\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3} - \frac{(n+1)a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2} - \frac{(n+1)(n+2)a^x}{1.2.(a^{\Delta x}-1)}$$

u. s. w. Allgemein

$$417. \quad \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^x + \frac{n^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+\Delta x} + \frac{(n-1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+2\Delta x} \ldots + a^x = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x} - a^{x+(r-1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^r} - \frac{(n+1)a^{x+(r-2)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^{r-1}} - \ldots - \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}(a^{\Delta x}-1)}.$$

§. 85.

Eben so leicht bestimmen sich die Summen-Ausdrücke der Exponentialreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind. Gehen wir von der ersten Gleichung in (351.), so erhalten wir für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl, wenn wir dort $X_0 = a^x$ setzen:

$$a^x - a^{x+\Delta x} + a^{x+2\Delta x} - a^{x+3\Delta x} + \ldots + a^{x+n\Delta x} = \zeta^{-1} a^{x+(n+1)\Delta x} + \zeta^{-1} a^x.$$

Der Summen-Ausdruck beruht auf der Darstellung der beiden negativen Aufstufungen der Exponentialgröfsen $a^{x+(n+1)\Delta x}$ und a^x. Sie finden wir aus der Gleichung 87. §. 14., wenn wir dort $x+(n+1)\Delta x$ und x statt y und $m=1$ setzen. Hieraus entsteht:

418. $$a^x - a^{x+\Delta x} + a^{x+2\Delta x} - a^{x+3\Delta x} + \ldots + a^{x+n\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x} + a^x}{1+a^{\Delta x}}.$$

Eben so erhalten wir für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl aus (352.):

$$a^x - a^{x+\Delta x} + a^{x+2\Delta x} - \ldots - a^{x+n\Delta x} = -\zeta^{-1} a^{x+(n+1)\Delta x} + \zeta a^x,$$

oder, wenn die negativen Aufstufungen eingeführt werden,

419. $$a^x - a^{x+\Delta x} + a^{x+2\Delta x} - \ldots - a^{x+n\Delta x} = -\frac{a^{x+(n+1)\Delta x} - a^x}{1+a^{\Delta x}}.$$

Für zusammengesetztere Reihen dieser Art erhalten wir aus der zweiten Reihe von (351.):

$$(n+1)\Delta^x - n a^{x+\Delta x} + (n-1) a^{x+2\Delta x} - \ldots + a^{x+n\Delta x}$$
$$= \zeta^{-2} a^{x+(n+2)\Delta x} + \frac{n+1}{1} \zeta^{-1} a^x + \zeta^{-2} a^{x+\Delta x},$$

und hieraus, wenn die angezeigten negativen Aufstufungen eingeführt werden:

$$(n+1) a^x - n a^{x+\Delta x} + (n-1) a^{x+2\Delta x} - \ldots + a^{x+n\Delta x}$$
$$= \frac{a^{x+(n+2)\Delta x} + a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2} + \frac{(n+1) a^x}{1+a^{\Delta x}}.$$

Eben so

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2} a^x - \frac{n(n+1)}{1.2} a^{x+\Delta x} + \frac{(n-1)n}{1.2} a^{x+2\Delta x} - \ldots + a^{x+n\Delta x}$$
$$= \frac{a^{x+(n+3)\Delta x} + a^{x+2\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^3} + \frac{(n+1) a^{x+\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^2} + \frac{(n+1)(n+2) a^x}{1.2.(1+a^{\Delta x})}$$

u. s. w.; allgemein:

420. $$\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} a^x - \frac{n^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} a^{x+\Delta x} + \frac{(n-1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} a^{x+2\Delta x} - \ldots a^{x+n\Delta x}$$
$$= \frac{a^{x+(n+1)\Delta x} - a^{x+(r-1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^r} + \frac{(n+1) a^{x+(r-2)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^{r-1}} + \ldots + \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1} a^x}{1^{r-1\,|\,1}(1+a^{\Delta x})}.$$

Eben so erhalten wir für eine Reihe von gerader Glieder-Anzahl:

421.. $$\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} a^x - \frac{n^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} a^{x+\Delta x} + \frac{(n-1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} a^{x+2\Delta x} - \ldots - a^{x+n\Delta x}$$
$$= -\frac{a^{x+(n+1)\Delta x} - a^{x+(r-1)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^r} + \frac{(n+1) a^{x+(r-2)\Delta x}}{(1+a^{\Delta x})^{r-1}} + \ldots + \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1} a^x}{1^{r-1\,|\,1}(1+a^{\Delta x})}.$$

Einzelne Fälle leiten sich leicht aus den vorstehenden Reihen ab.

§. 86.

Summirung der Reihen für Winkelfunctionen.

Zuerst suchen wir die Summen-Ausdrücke für Sinus-Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind. Legen wir die erste Gleichung von (350.) zu Grunde, und setzen dort $X_0 = \sin x$, so erhalten wir:

$$\sin x + \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) + \ldots + \sin(x+n\Delta x) = \Delta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] - \Delta^{-1}\sin x,$$

die ersten negativen Unterschiede, die uns nach den Gliedern auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens nöthig werden, finden wir, wenn in der 2ten Gleichung von (206.) $y = x+(n+1)\Delta x$, $y = x$ gesetzt, und $m = 0$ in unsere Gleichung eingeführt wird. Darnach entsteht:

422. $$\sin x + \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) + \ldots + \sin(x+n\Delta x) = -\frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Die beiden Zähler des Summen-Ausdruckes können selbst wieder nach der Gleichung:

423. $$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2},$$

wenn $q = x+(n+\frac{1}{2})\Delta x$ und $p = x-\frac{1}{2}\Delta x$ gesetzt wird, in einen Ausdruck zusammengezogen werden. Es wird alsdann:

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}[-\cos(x+(n+\tfrac{1}{2})\Delta x) + \cos(x-\tfrac{1}{2}\Delta x)] = \frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}\left[-2\sin\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right).\sin\left(-\frac{n+1}{2}(\Delta x)\right)\right],$$

oder, da $\sin\left(-\frac{n+1}{2}\Delta x\right) = -\sin\frac{n+1}{2}\Delta x$ ist,

$$\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}[-\cos(x+(n+\tfrac{1}{2})\Delta x) + \cos(x-\tfrac{1}{2}\Delta x)] = \frac{\sin\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Dies führt zu folgender Gleichung:

424. $$\sin x + \sin(x+2\Delta x) + \sin(x+3\Delta x) \ldots + \sin(x+n\Delta x) = \frac{\sin\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{\sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

Für die Auffindung der weitern Summen-Ausdrücke für die in (350.) enthaltenen Reihen werden uns die nachstehenden Bestimmungen nöthig,

$$\Delta^{-2}X_{n+2} = \Delta^{-2}\sin[x+(n+2)\Delta x] = -\frac{\sin[x+(n+1)\Delta x]}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}X_{n+3} = \Delta^{-3}\sin[x+(n+3)\Delta x] = +\frac{\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

$$\Delta^{-4}X_{n+4} = \Delta^{-4}\sin[x+(n+4)\Delta x] = +\frac{\sin[x+(n+2)\Delta x]}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4},$$

u. s. w.

$$\Delta^{-2}X_1 = \Delta^{-2}\sin(x+\Delta x) = -\frac{\sin x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}X_2 = \Delta^{-3}\sin(x+2\Delta x) = +\frac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

$$\Delta^{-4}X_3 = \Delta^{-4}\sin(x+3\Delta x) = +\frac{\sin(x+\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4},$$

u. s. w. Benutzen wir diese Bestimmungen, so entsteht:

$$(n+1)\sin x + n\sin(x+\Delta x) + (n-1)\sin(x+2\Delta x) \ldots + \sin(x+n\Delta x)$$
$$= \Delta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x] - \frac{n+1}{1}\Delta^{-1}\sin x - \Delta^{-2}\sin(x+\Delta x)$$
$$= -\frac{\sin[x+(n+1)\Delta x]-\sin x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{(n+1)\cos\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

Oder, wenn die Zähler im ersten Ausdrucke zusammengezählt werden, nach der Gleichung

424. $$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}.\sin\frac{p-q}{2},$$

so fliefst hieraus:

425. $$(n+1)\sin x + n\sin(x+\Delta x) + (n-1)\sin(x+2\Delta x) \ldots + \sin(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos\left(x+\frac{n+1}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n+1}{2}\Delta x - (n+1)\cos\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{2\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2},$$

Auf gleiche Weise erhalten wir die nachstehenden Gleichungen:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\sin x + \frac{n(n+1)}{1.2}\sin(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\sin(x+2\Delta x) + \ldots + \sin(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \frac{(n+1)(n+2)\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{1.2.2\sin\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{(x+1)\sin x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2} - \frac{\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^3},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\sin x + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\sin(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.2.3}\sin(x+2\Delta x) + \ldots$$
$$\ldots + \sin(x+n\Delta x) = \frac{\sin[x+(n+2)\Delta x]}{2^4\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^4} + \frac{(n+1)(n+2)(n+3)\cos\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.2.3.2\sin\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{(n+1)(n+2)\sin x}{1.2.2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$- \frac{(n+1)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3} - \frac{\sin(x+\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4},$$

u. s. w. Die beiden ersten und letzten Glieder dieser Summen-Ausdrücke lassen sich in einen zusammen ziehen. Das allgemeine Gesetz, wonach diese Gebilde fortschreiten, läfst sich leicht erkennen.

§. 87.

Nun bestimmen wir die Summen-Ausdrücke für Cosinusreihen, deren Glieder mit positiven Zeichen verbunden sind. Führen wir zu dem Ende in den Gleichungen (350.) $X_0 = \cos x$ ein, so erhalten wir:

$$\cos x + \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) + \ldots + \cos(x+n\Delta x) = \Delta^{-1}\cos[x+(n+1)\Delta x] - \Delta^{-1}\cos x,$$

$$(n+1)\cos x + n\cos(x+\Delta x) + (n-1)\cos(x+2\Delta x) + \ldots + \cos(x+n\Delta x) = \Delta^{-2}\cos[x+(n+2)\Delta x] - \frac{n+1}{1}\Delta^{-1}\cos x - \Delta^{-2}\cos(x+\Delta x),$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cos x + \frac{n(n+1)}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\cos(x+2\Delta x) + \ldots + \cos(x+n\Delta x) = \Delta^{-3}\cos[x+(n+3)\Delta x] - \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-1}\cos x - \frac{n+1}{1}\Delta^{-2}\cos(x+\Delta x) - \Delta^{-3}\cos(x+2\Delta x)$$

u. s. w. Wir sehen, dafs zur Darstellung der zu findenden Summen-Ausdrücke die negativen Unterschiede der Functionen des Cosinus nöthig sind. Die Gleichungen (207.) geben diese, und wir erhalten aus ihnen

$$\Delta^{-1}\cos[x+(n+1)\Delta x] = +\frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\Delta^{-2}\cos[x+(n+2)\Delta x] = -\frac{\cos[x+(n+1)\Delta x]}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}\cos[x+(n+3)\Delta x] = -\frac{\sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w.

$$\Delta^{-1}\cos x = +\frac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\Delta^{-2}\cos(x+\Delta x) = -\frac{\cos x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}\cos(x+2\Delta x) = -\frac{\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w. Hiernach erhalten wir:

$$\cos x + \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) + \ldots + \cos(x+n\Delta x) = \frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x} - \frac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}},$$

oder, wenn die beiden Glieder des Summen-Ausdruckes nach (423.) zusammengezählt werden,

426. $$\cos x+\cos(x+\Delta x)+\cos(x+2\Delta x)+\ldots.+\cos(x+n\Delta x)$$
$$=\frac{\cos\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right).\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{\sin\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Hieran schliefsen sich folgende Darstellungen:

$$(n+1)\cos x+n\cos(x+\Delta x)+(n-1)\cos(x+2\Delta x)+\ldots.+\cos(x+n\Delta x)$$
$$=-\frac{\cos[x+(n+1)\Delta x]-\cos x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}-(n+1)\frac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

Oder wenn die Zähler des ersten Gliedes nach (423.) zusammengezählt werden:

427. $$(n+1)\cos x+n\cos(x+\Delta x)+\ldots.+\cos(x+n\Delta x)$$
$$=-\frac{\sin\left(x+\frac{n+1}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{2\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2}-\frac{(n+1)\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}.$$

Eben so wird:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cos x+\frac{n(n+1)}{1.2}\cos(x+\Delta x)+\ldots.+\cos(x+n\Delta x)$$
$$=-\frac{\sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]-\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^2}-\frac{(n+1)(n+2)\sin\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.2.2\sin\frac{1}{2}\Delta x}$$
$$+\frac{(n+1)\cos x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)},$$

u. s. w. Auch hieraus läfst sich das allgemeine Gesetz und die Ähnlichkeit dieser Gebilde mit denen des vorhergehenden §. erkennen.

§. 88.

Wir beschäftigen uns nun mit der Darstellung der Summen für Reihen der Winkelfunctionen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind. Zu dem Ende stellen wir zuerst die für die Reihen des Sinus, und dann die des Cosinus dar. Gehen wir von den Gleichungen (351.) aus und setzen dort $X_0=\sin x$, so erhalten wir für Reihen von einer ungeraden Glieder-Anzahl folgende Darstellungen:

428.
$$\begin{cases}\sin x-\sin(x+\Delta x)+\sin(x+2\Delta x)-\ldots.+\sin(x+n\Delta x)\\ \quad=\zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x]+\zeta^{-1}\sin x,\\ (n+1)\sin x-n\sin(x+\Delta x)+(n-1)\sin(x+2\Delta x)-\ldots.+\sin(x+n\Delta x)\\ \quad=\zeta^{-2}\sin[x+(n+2)\Delta x]+\zeta^{-2}\sin(x+\Delta x)+\frac{n-1}{1}\zeta^{-1}\sin x,\end{cases}$$

428.
$$\begin{cases} \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\sin x - \frac{n(n+1)}{1.2}\sin(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\sin(x+2\Delta x) - \ldots + \sin(x+n\Delta x) \\ = \zeta^{-3}\sin[x+(n+3)\Delta x] + \zeta^{-3}\sin(x+2\Delta x) + \frac{n+1}{1}\zeta^{-2}\sin(x+\Delta x) + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}\sin x, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Nach diesen Gleichungen sind uns die negativen Aufstufungen der angezeigten Sinusfunctionen nöthig. Wir erhalten sie, wenn wir in der Gleichung (91.) die gehörigen Werthe statt y einsetzen.

Dies führt zu folgender Zusammenstellung:

$$\zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{\Delta x}{2}},$$

$$\zeta^{-2}\sin[x+(n+2)\Delta x] = \frac{\sin[x+(n+1)\Delta x]}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\zeta^{-3}\sin[x+(n+3)\Delta x] = \frac{\sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w.

$$\zeta^{-1}\sin x = \frac{\sin\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\zeta^{-2}\sin(x+\Delta x) = \frac{\sin x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\zeta^{-3}\sin(x+\Delta x) = \frac{\sin(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w.

Die Substitution der vorstehenden Werthe erzeugt für Reihen von ungerader Glieder-Anzahl:

$$\sin x - \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) - \ldots + \sin(x+n\Delta x) = \frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] + \sin\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Der Zähler des Summen-Ausdrucks läfst sich nach der Gleichung

429. $$\sin p + \sin q = 2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

in einen einzigen Ausdruck vereinigen, wenn $p = x+(n+\frac{1}{2})\Delta x$ und $q = x-\frac{1}{2}\Delta x$ gesetzt wird. Dies führt zu folgender Darstellung:

430. $$\sin x - \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x - \ldots + (x+n\Delta x) = \frac{\sin\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right)\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{\cos\frac{\Delta x}{2}}.$$

Auf gleiche Weise erhalten wir folgende Gleichungen:

$$431.\quad \begin{cases} (n+1)\sin x - n.\sin(x+\Delta x) + (n-1)\sin(x+2\Delta x) \ldots + \sin(x+n\Delta x) \\ \quad = \dfrac{\sin[x+(n+1)\Delta x]+\sin x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \dfrac{n+1}{1}\cdot\dfrac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x} \\ \quad = \dfrac{\sin\left(x+\frac{n+1}{2}\Delta x\right).\cos\frac{n+1}{2}\Delta x}{2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \dfrac{n+1}{1}\cdot\dfrac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}, \\ \dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2}.\sin x - \dfrac{n(n+1)}{1.2}.\sin(x+\Delta x) + \dfrac{(n-1)n}{1.2}.\sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x) \\ \quad = \dfrac{\sin[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]+\sin(x+\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \dfrac{(n+1)\sin x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \dfrac{(n+1)(n+2)\sin\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{1.2.2\cos\frac{1}{2}\Delta x}, \end{cases}$$

u. s. w. Für Sinus-Reihen mit abwechselnden Zeichen, die eine gerade Glieder-Anzahl haben, ergeben sich aus (352.) folgende Darstellungen:

$$432.\quad \begin{cases} \sin x - \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x) \\ = -\zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] + \zeta^{-1}\sin x, \\ (n+1)\sin x - n\sin(x+\Delta x) + (n-1)\sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x) \\ = -\zeta^{-2}\sin[x+(n+2)\Delta x] + \zeta^{-2}\sin(x+\Delta x) + \dfrac{n+1}{1}\zeta^{-1}\sin x, \\ \dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2}\sin x - \dfrac{n(n+1)}{1.2}\sin(x+\Delta x) + \dfrac{(n-1)n}{1.2}\sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x) \\ = -\zeta^{-3}\sin[x+(n+3)\Delta x] + \zeta^{-3}\sin(x+2\Delta x) + \dfrac{n+1}{1}\zeta^{-2}\sin(x+\Delta x) + \dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}\sin x. \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Werthe, die uns zur Bestimmung der Summen-Ausdrücke der vorliegenden Reihe nöthig sind, werden aus der obigen Darstellung entnommen und geben Folgendes:

$$\sin x - \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{-\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]+\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x} = -\frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]-\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Der Zähler des vorstehenden Summen-Ausdrucks läfst sich nach der Gleichung (425.) einfacher durch einen einzigen darstellen, und dann erhalten wir:

$$433.\quad \sin x - \sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right).\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Eben so entsteht:

$$(n+1)\sin x - n(\sin(x+\Delta x) + \sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\sin[x+(n+1)\Delta x]-\sin x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\sin x - \frac{n(n+1)}{1.2}\sin(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\sin(x+2\Delta x) - \ldots - \sin(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] - \sin(x+\Delta x)}{2^3\cos\frac{\Delta x}{2}} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{\sin x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{(n+1)(n+2)\sin(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{1.2.2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

u. s. w.

§. 89.

Wir gehen nun über zur Darstellung der Summen-Ausdrücke für Reihen des Cosinus, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind. Legen wir zuerst die Reihen für eine ungerade Glieder-Anzahl zum Grunde, so erhalten wir, wenn in den Gleichungen (351.) $X_0 = \cos x$ gesetzt wird:

434.
$$\begin{cases} \cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) - \ldots\ldots + \cos(x+n\Delta x) \\ \qquad = \zeta^{-1}\cos[x+(n+1)\Delta x] + \zeta^{-1}\cos x, \\ (n+1)\cos x - n\cos(x+\Delta x) + (n-1)\cos(x+2\Delta x) - \ldots + \cos(x+n\Delta x) \\ \qquad = \zeta^{-2}\cos[x+(n+2)\Delta x] + \zeta^{-2}\cos(x+\Delta x) + \frac{n+1}{1}\zeta^{-1}\cos x, \\ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cos x - \frac{n(n+1)}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\cos(x+2\Delta x) - \ldots + \cos(x+n\Delta x) \\ \qquad = \zeta^{-3}\cos[x+(n+3)\Delta x] + \zeta^{-3}\cos(x+2\Delta x) + \frac{n+1}{1}\zeta^{-2}\cos(x+\Delta x) \\ \qquad\qquad + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}\cos x, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die negativen Aufstufungen der Cosinus-Functionen, die uns zur Darstellung der Summen-Ausdrücke nöthig werden, entnehmen wir aus der Gleichung (95.). Sie sind:

$$\zeta^{-1}\cos[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$
$$\zeta^{-2}\cos[x+(n+2)\Delta x] = \frac{\cos[x+(n+1)\Delta x]}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$
$$\zeta^{-3}\cos[x+(n+3)\Delta x] = \frac{\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w.

$$\zeta^{-1}\cos x = \frac{\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$
$$\zeta^{-2}\cos(x+\Delta x) = \frac{\cos x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$
$$\zeta^{-3}\cos(x+2\Delta x) = \frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w.

Führen wir nun die angezeigten Werthe in die Gleichungen (434.) ein, so entsteht für Cosinusreihen von ungerader Glieder-Anzahl:

$$\cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) - \ldots + \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x] + \cos\left(x-\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Werden die beiden Glieder im Zähler des Summen-Ausdruckes nach der Gleichung

$$435. \qquad \cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}$$

in eines zusammengezogen, so erhalten wir einen einfacheren Summen-Ausdruck, und es ist

$$436. \qquad \cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) - \ldots + \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\cos\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right).\cos\frac{n+1}{2}\Delta x}{\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Eben so entsteht:

$$(n+1)\cos x - n\cos(x+\Delta x) + (n-1)\cos(x+2\Delta x) \ldots + \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\cos[x+(n+1)\Delta x]+\cos x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{(n+1)\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cos x - \frac{n(n+1)}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\cos(x+2\Delta x) \ldots + \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x]+\cos(x+\frac{1}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{\cos x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{(n+1)(n+2)\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2.\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

u. s. w.

Legen wir Cosinus-Reihen von gerader Glieder-Anzahl zum Grunde, so erhalten wir aus den Gleichungen (352.) folgende:

$$437. \begin{cases} \cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) \ldots - \cos(x+n\Delta x) \\ \quad = -\zeta^{-1}\cos[x+(n+1)\Delta x] + \zeta^{-1}\cos x, \\ (n+1)\cos x - n\cos(x+\Delta x) + (n-1)\cos(x+2\Delta x) \ldots - \cos(x+n\Delta x) \\ \quad = -\zeta^{-2}\cos[x+(n+2)\Delta x] + \zeta^{-2}\cos(x+\Delta x) + \frac{n+1}{1}\zeta^{-1}\cos x, \\ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cos x - \frac{n(n+1)}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\cos(x+2\Delta x) \ldots - \cos(x+n\Delta x) \\ =-\zeta^{-3}\cos[x+(n+3)\Delta x] + \zeta^{-3}\cos(x+2\Delta x) + \frac{n+1}{1}\zeta^{-2}\cos(x+\Delta x) + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}\cos x \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Die Einführung der angezeigten Werthe aus der oben angeführten Zusammenstellung giebt folgende Resultate:

$$\cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x + \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x} = -\frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x) - \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Werden die beiden Glieder im Zähler des Summen-Ausdruckes in ein einziges nach der Gleichung (423.) zusammengezogen, so erhalten wir:

438. $$\cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\sin\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right).\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Eben so entsteht:

$$(n+1)\cos x - n\cos(x+\Delta x) + (n-1)\cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos[x+(n+1)\Delta x] - \cos x}{2^2\cos\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cos x - \frac{n(n+1)}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x] - \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{\cos x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

u. s. w.

Das allgemeine Gesetz, welches den in §. 86. — 89. gefundenen Summen-Ausdrücken zu Grunde liegt, läfst sich leicht erkennen.

B.

§. 90.

Wir haben uns in den §§. 72. — 89. mit der Summirung solcher Reihen beschäftigt, deren Glieder mit den figurirten Zahlen oder mit den numerischen Ausdrücken der verschiedenen Verbindungsklassen verbunden und mit gleichen oder abwechselnden Zeichen versehen sind. Diese Zahlen-Ausdrücke sind so mit den Gliedern der Reihe verbunden, dafs die Glieder der Reihen ihrem veränderlichen Theile nach zunehmen, wie die figurirten Zahlen abnehmen. An dieser Form ist nichts zu ändern, ohne die Gültigkeit der Reihe selbst aufzuheben.

Im Folgenden suchen wir den veränderlichen Theil der Glieder der Reihe und die figurirten Zahlen mit einander in Einklang zu setzen, und

lassen die Vorzahlen in gleichem Maafse wie die veränderliche Gröfse zunehmen.

Die Reihen, deren Summirung uns im Folgenden beschäftigt, haben im Allgemeinen folgende Form:

$$\frac{1^{r-1|1}X_0}{1^{r-1|1}} \pm \frac{2^{r-1|1}X_1}{1^{r-1|1}} + \frac{3^{r-1|1}X_2}{1^{r-1|1}} \pm \ldots. \pm \frac{(n+1)^{r-1|1}X_n}{1^{r-1|1}}.$$

Um den Summen-Ausdruck im Allgemeinen zu finden, betrachten wir zuerst solche Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind, und legen die erste Reihe von (351.)

439. $$X_0+X_1+X_2+X_3+\ldots.+X_n = \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_0$$

zu Grunde, behandeln sie aber auf eine andere Weise, als früher.

Wir haben in §. 25. gesehen, dafs die Zahl der Glieder dieser Reihe nach Willkühr bestimmt und nach Gutdünken vergröfsert und verkleinert werden kann. Eine zu dem Ende vorzunehmende Veränderung hängt davon ab, dafs das Substitutionsgeschäft, wodurch sie erzeugt wird, abgebrochen werden kann. Sie wird $n+1$ Glieder erhalten, wann wir das Substitutionsgeschäft bei dem Gliede X_0 beendigen: für diesen Fall wird der Ausdruck $\Delta^{-1}X_0$ als Schlufsglied erscheinen. Sie wird n Glieder erhalten, wenn wir das Substitutionsgeschäft bei X_1 beendigen. Dann wird $\Delta^{-1}X_1$ als Schlufsglied erscheinen. Sie wird $n-1$ Glieder erhalten, wenn wir das Substitutionsgeschäft bei X_2 abbrechen, und dann wird $\Delta^{-1}X_2$ als Schlufsglied erscheinen, u. s. w. Stellen wir die abgekürzten Reihen zusammen, so gewinnen wir folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
X_0+X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots.+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_0,\\
X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots.+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_1,\\
X_2+X_3+X_4+\ldots.+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_2,\\
X_3+X_4+\ldots.+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_3,\\
X_4+\ldots.+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_n.
\end{aligned}$$

Jede dieser Horizontalreihen drückt eine nach demselben Grundgesetze gebildete Summenreihe mit ihrem Summen-Ausdrucke aus. Die vorliegende Darstellung giebt uns den Vortheil, dafs wir alle frei erhaltenen Summenreihen in eine vereinigen können, wenn wir sie in verticaler Richtung zusammenzählen. Bei dieser Vereinigung haben wir zu berücksichtigen, dafs das erste Glied einmal, das zweite zweimal, das dritte drei-

$$\cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x + \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x} = -\frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x) - \cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Werden die beiden Glieder im Zähler des Summen-Ausdruckes in ein einziges nach der Gleichung (423.) zusammengezogen, so erhalten wir:

438. $$\cos x - \cos(x+\Delta x) + \cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= \frac{\sin\left(x+\frac{n\Delta x}{2}\right).\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{\cos\frac{1}{2}\Delta x}.$$

Eben so entsteht:

$$(n+1)\cos x - n\cos(x+\Delta x) + (n-1)\cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos[x+(n+1)\Delta x] - \cos x}{2^2\cos\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cos x - \frac{n(n+1)}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \frac{(n-1)n}{1.2}\cos(x+2\Delta x) - \ldots - \cos(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{\cos[x+(n+\frac{3}{2})\Delta x] - \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \frac{n+1}{1}\cdot\frac{\cos x}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{\cos(x-\frac{1}{2}\Delta x)}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}$$

u. s. w.

Das allgemeine Gesetz, welches den in §. 86. — 89. gefundenen Summen-Ausdrücken zu Grunde liegt, läfst sich leicht erkennen.

B.

§. 90.

Wir haben uns in den §§. 72. — 89. mit der Summirung solcher Reihen beschäftigt, deren Glieder mit den figurirten Zahlen oder mit den numerischen Ausdrücken der verschiedenen Verbindungsklassen verbunden und mit gleichen oder abwechselnden Zeichen versehen sind. Diese Zahlen-Ausdrücke sind so mit den Gliedern der Reihe verbunden, dafs die Glieder der Reihen ihrem veränderlichen Theile nach zunehmen, wie die figurirten Zahlen abnehmen. An dieser Form ist nichts zu ändern, ohne die Gültigkeit der Reihe selbst aufzuheben.

Im Folgenden suchen wir den veränderlichen Theil der Glieder der Reihe und die figurirten Zahlen mit einander in Einklang zu setzen, und

lassen die Vorzahlen in gleichem Maafse wie die veränderliche Gröfse zunehmen.

Die Reihen, deren Summirung uns im Folgenden beschäftigt, haben im Allgemeinen folgende Form:

$$\frac{1^{r-1\,|\,1}X_0}{1^{r-1\,|\,1}} \pm \frac{2^{r-1\,|\,1}X_1}{1^{r-1\,|\,1}} + \frac{3^{r-1\,|\,1}X_2}{1^{r-1\,|\,1}} \pm \ldots\ldots \pm \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}X_n}{1^{r-1\,|\,1}}.$$

Um den Summen-Ausdruck im Allgemeinen zu finden, betrachten wir zuerst solche Reihen, deren Glieder mit positiven Zeichen versehen sind, und legen die erste Reihe von (351.)

439. $$X_0+X_1+X_2+X_3+\ldots\ldots+X_n = \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_0$$

zu Grunde, behandeln sie aber auf eine andere Weise, als früher.

Wir haben in §. 25. gesehen, dafs die Zahl der Glieder dieser Reihe nach Willkühr bestimmt und nach Gutdünken vergröfsert und verkleinert werden kann. Eine zu dem Ende vorzunehmende Veränderung hängt davon ab, dafs das Substitutionsgeschäft, wodurch sie erzeugt wird, abgebrochen werden kann. Sie wird $n+1$ Glieder erhalten, wann wir das Substitutionsgeschäft bei dem Gliede X_0 beendigen: für diesen Fall wird der Ausdruck $\Delta^{-1}X_0$ als Schlufsglied erscheinen. Sie wird n Glieder erhalten, wenn wir das Substitutionsgeschäft bei X_1 beendigen. Dann wird $\Delta^{-1}X_1$ als Schlufsglied erscheinen. Sie wird $n-1$ Glieder erhalten, wenn wir das Substitutionsgeschäft bei X_2 abbrechen, und dann wird $\Delta^{-1}X_2$ als Schlufsglied erscheinen, u. s. w. Stellen wir die abgekürzten Reihen zusammen, so gewinnen wir folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
X_0+X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots\ldots+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_0,\\
X_1+X_2+X_3+X_4+\ldots\ldots+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_1,\\
X_2+X_3+X_4+\ldots\ldots+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_2,\\
X_3+X_4+\ldots\ldots+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_3,\\
X_4+\ldots\ldots+X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_4,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_n &= \Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-1}X_n.
\end{aligned}$$

Jede dieser Horizontalreihen drückt eine nach demselben Grundgesetze gebildete Summenreihe mit ihrem Summen-Ausdrucke aus. Die vorliegende Darstellung giebt uns den Vortheil, dafs wir alle frei erhaltenen Summenreihen in eine vereinigen können, wenn wir sie in verticaler Richtung zusammenzählen. Bei dieser Vereinigung haben wir zu berücksichtigen, dafs das erste Glied einmal, das zweite zweimal, das dritte drei-

mal, u. s. f., das $(n+1)$te Glied X_n, und eben so $\Delta^{-1}X_{n+1}$ $(n+1)$ mal vorkommt. Hieraus ziehen wir folgende Darstellung:

$$X_0+2X_1+3X_2+4X_3+\ldots.+(n+1)X_n$$
$$=(n+1)\Delta^{-1}X_{n+1}-(\Delta^{-1}X_0+\Delta^{-1}X_1+\Delta^{-1}X_2+\Delta^{-1}X_3+\ldots.+\Delta^{-1}X_n).$$

Mit dem Ausdrucke $(n+1)\Delta^{-1}X_{n+1}$ ist eine negative Reihe verbunden, deren Glieder sämmtlich mit Δ^{-1} verbunden erscheinen. Sie fesselt unsere Aufmerksamkeit. Gelingt es uns, sie zu entfernen und durch einen einfacheren Ausdruck zu ersetzen, so werden wir auch den Summen-Ausdruck der vorliegenden Reihe einfacher darstellen können. Die einfachere Darstellung fliefst aus der Gleichung (439.) ganz leicht, wenn wir jene mit Δ^{-1} vervielfachen. Denn alsdann ist:

$$\Delta^{-1}X_0+\Delta^{-1}X_1+\Delta^{-1}X_2+\Delta^{-1}X_3+\ldots.+\Delta^{-1}X_n=\Delta^{-2}X_{n+1}-\Delta^{-2}X_0.$$

Führen wir diesen Werth als einen negativen ein, so gewinnen wir die gesuchte Darstellung und es ist:

440. $$X_0+2X_1+3X_2+4X_3+\ldots.+(n+1)X_n$$
$$=(n+1)\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-2}X_{n+2}+\Delta^{-2}X_0.$$

Diese Gleichung wird uns nun dienen, um auf dem betretenen Wege andere und zusammengesetztere abzuleiten. Wie im vorhergehenden Falle, so werden auch alle Reihen der vorliegenden Gestalt auf gleiche Weise gebildet werden, wie sich auch die Zahl ihrer Glieder ändert. Lassen wir nun das höchste Glied unverändert, und vermindern die Glieder-Anzahl, der Reihe nach von vorne herein um 1, 2, 3, ... Glieder, so gewinnen wir folgende Zusammenstellung:

$$\begin{aligned}
X_0+2X_1+3X_2+4X_3+\ldots.+(n+1)X_0 &= (n+1)\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-2}X_0,\\
1X_1+2X_2+3X_3+\ldots.+\quad nX_0 &= \quad n\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-2}X_1,\\
+1X_2+2X_3+\ldots.+(n-1)X_0 &= (n-1)\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-2}X_2,\\
1X_3+\ldots.+(n-2)X_0 &= (n-2)\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-2}X_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
X_n &= \quad 1.\Delta^{-1}X_{n+1}-\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-2}X_n.
\end{aligned}$$

Zählt man die erhaltenen Reihen in verticaler Richtung zusammen und berücksichtigt, dafs sich die Vorzahlen der Glieder nach der Gleichung

$$1+2+3+4+\ldots.+x=\frac{x(x+1)}{1.2}$$

zusammenzählen lassen, und dafs der Ausdruck $\Delta^{-2}X_{n+1}$ in der zweiten Scheitel-Reihe $(n+1)$ mal vorkommt, so erhalten wir:

$$X_0+\frac{2.3}{1.2}X_1+\frac{3.4}{1.2}X_2+\frac{4.5}{1.2}X_3+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-1}X_{n+1}-\frac{n+1}{1}\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-2}X_0+\Delta^{-2}X_1+\Delta^{-2}X_2+\ldots+\Delta^{-2}X_n.$$

Im Summen-Ausdrucke erscheint eine Reihe von der Form (439.), deren Glieder sämmtlich mit dem zweiten negativen Unterschiede verbunden sind. Ihre Summe erhält man, wenn (439.) mit Δ^{-2} vervielfacht wird. Hiernach ist:

$$\Delta^{-2}X_0+\Delta^{-2}X_1+\Delta^{-2}X_2+\Delta^{-2}X_3+\ldots.+\Delta^{-2}X_n=\Delta^{-3}X_{n+1}-\Delta^{-3}X_0.$$

Wird dieser Werth eingeführt, so gewinnen wir:

441. $$X_0+\frac{2.3}{1.2}X_1+\frac{3.4}{1.2}X_2+\frac{4.5}{1.2}X_3+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-1}X_{n+1}-\frac{n+1}{1}\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-3}X_{n+1}-\Delta^{-3}X_0.$$

Auf gleiche Weise finden wir:

$$X_0+\frac{2.3.4}{1.2.3}X_1+\frac{3.4.5}{1.2.3}X_2+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}X_n$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\Delta^{-1}X_{n+1}-\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-2}X_{n+1}+\frac{n+1}{1}\Delta^{-3}X_{n+1}-\Delta^{-4}X_{n+1}+\Delta^{-4}X_0,$$

und allgemein:

442. $$\frac{1^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_0+\frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_1+\frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_2+\ldots.+\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}X_n$$

$$=\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}\Delta^{-1}X_{n+1}-\frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}}\Delta^{-2}X_{n+1}+\ldots.(-)^{r-1}\Delta^{-r}X_{n+1}(-)^r\Delta^{-r}X_0.$$

§. 91.

Den nämlichen Gang, wie in dem vorhergehenden §., befolgen wir, um Summen-Ausdrücke für Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen verbunden sind, zu erhalten, worin die figurirten Zahlen mit der veränderlichen Gröfse in den Gliedern der Reihe wachsen.

Wir gehen von der Reihe

443. $$\zeta^{-1}X_{n+1}(-)^n\zeta^{-1}X_0=X_n-X_{n-1}+X_{n-2}-\ldots.(-)X_0,$$

die aus der Gleichung (18.) §. 4. durch Erhöhung der Stellenzahlen entnommen ist, aus, verkürzen die Glieder dieser Reihe allmälig, und lassen das Glied X_n unverändert. Hieraus entsteht:

$$\begin{aligned}
\zeta^{-1}X_{n+1}(-)^n\ \zeta^{-1}X_0 &= X_n - X_{n-1} - \ldots . (-)^{n-3}X_3(-)^{n-2}X_2(-)^{n-1}X_1(-)^n X_0,\\
\zeta^{-1}X_{n+1}(-)^{n-1}\zeta^{-1}X_1 &= X_n - X_{n-1} - \ldots . (-)^{n-3}X_3(-)^{n-2}X_2(-)^{n-1}X_1,\\
\zeta^{-1}X_{n+1}(-)^{n-2}\zeta^{-1}X_2 &= X_n - X_{n-1} - \ldots . (-)^{n-3}X_3(-)^{n-2}X_2,\\
\zeta^{-1}X_{n+1}(-)^{n-3}\zeta^{-1}X_3 &= X_n - X_{n-1} - \ldots . (-)^{n-3}X_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\zeta^{-1}X_{n+1} - \zeta^{-1}X_{n-1} &= X_n - X_{n-1},\\
\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-1}X_n &= X_n.
\end{aligned}$$

Zählen wir hier in verticaler Richtung zusammen, so gewinnen wir:

$$\begin{aligned}
&(n+1)X_n - nX_{n-1} + (n-1)X_{n-2} - \ldots . (-)^n X_0\\
&= (n+1)\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-1}X_n - \zeta^{-1}X_{n-1} + \zeta^{-1}X_{n-2} - \ldots . (-)^n \zeta^{-1}X_0 .
\end{aligned}$$

Die Reihe auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens, deren Glieder sämmtlich mit den ersten negativen Aufstufungen verbunden sind, summirt sich nach (443.) selbst, wenn dort allenthalben mit ζ^{-1} vervielfacht wird. Es ist demnach:

$$\zeta^{-1}X_n - \zeta^{-1}X_{n-1} + \zeta^{-1}X_{n-2} - \ldots . (-)^n \zeta^{-1}X_0 = \zeta^{-2}X_{n+1}(-)^n \zeta^{-2}X_0 .$$

Durch Einführung des Summen-Ausdruckes entsteht:

444.
$$\begin{aligned}
&(n+1)X_n - nX_{n-1} + (n-1)X_{n-2} - \ldots . (-)^n X_0\\
&= (n+1)\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_{n+1}(-)^n \zeta^{-2}X_0 .
\end{aligned}$$

Benutzen wir auch diese Gleichung zu einer weitern Ableitung, so entsteht:

$$\begin{aligned}
&(n+1)\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_{n+1}(-)^n\ \zeta^{-2}X_0\\
&\quad = (n+1)X_n -\ \ nX_{n-1} + (n-1)X_{n-2} \ldots . (-)^{n-2}3.X_2(-)^{n-1}2.X_1(-)^n X_0,\\
&n\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_{n+1}(-)^{n-1}\zeta^{-2}X_1\\
&\quad = \ \ nX_n - (n-1)X_{n-1} + (n-2)X_{n-2} \ldots . (-)^{n-2}2.X_2(-)^{n-1}1.X_1,\\
&(n-1)\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_{n+1}(-)^{n-2}\zeta^{-2}X_2\\
&\quad = (n-1)X_n - (n-2)X_{n-1} + (n-3)X_{n-2} \ldots . -1.X_2\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&2\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_{n+1} - \zeta^{-2}X_{n-1} = 2X_n - X_{n-1},\\
&\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_n = X_n .
\end{aligned}$$

Die Vereinigung in verticaler Richtung erzeugt folgende Darstellung, wenn die Gleichung

$$1 + 2 + 3 + \ldots . + x = \frac{x(x+1)}{1.2}$$

berücksichtigt wird:

$$\begin{aligned}
&\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n - \frac{n(n+1)}{1.2}X_{n-1} + \frac{(n-1)n}{1.2}X_{n-2} - \ldots . (-)^n X_0 .\\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}X_{n+1} + \frac{n+1}{1}\zeta^{-1}X_{n+1} + \zeta^{-2}X_n - \zeta^{-2}X_{n-1} + \zeta^{-1}X_{n-2} - \ldots . (-)^n \zeta^{-2}X_0 .
\end{aligned}$$

Wird die den Summen-Ausdruck begleitende Reihe nach (443.) zusammengezählt, was durch Vervielfachen mit ζ^{-2} geschieht, so erhalten wir:

$$445. \quad \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} X_n - \frac{n(n+1)}{1.2} X_{n-1} + \frac{(n-1)n}{1.2} X_{n-2} \ldots . (-)^n X_0$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} \zeta^{-1} X_{n+1} + \frac{n+1}{1} \zeta^{-2} X_{n+1} + \zeta^{-3} X_{n+1} (-)^n \zeta^{-3} X_0 .$$

Der Ableitungsgang bleibt unverändert derselbe. Er führt zu folgendem allgemeinen Gesetze:

$$446. \quad \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_n - \frac{n^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_{n-1} + \frac{(n-1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_{n-2} \ldots . (-)^n X_0$$
$$= \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} \zeta^{-1} X_{n+1} + \frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}} \zeta^{-2} X_{n+1} + \frac{(n+1)^{r-3\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}} \zeta^{-3} X_{n+1} \ldots . + \zeta^{-r} X_{u+1} (-)^n \zeta^{-r} X_0 .$$

Hier lassen sich zwei Fälle unterscheiden. Die Reihe hat nämlich eine gerade oder eine ungerade Glieder-Anzahl. Für eine ungerade Glieder-Anzahl wird n gerade und dann erhalten wir folgende Darstellung:

$$447. \quad X_0 - \frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_1 + \frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_2 + \frac{4^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_3 \ldots . + \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_n$$
$$= \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} \zeta^{-1} X_{n+1} + \frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}} \zeta^{-1} X_{n+1} + \ldots . + \zeta^{-r} X_{n+1} + \zeta^{-r} X_0 .$$

Ist die Glieder-Anzahl gerade, so wird n ungerade, und dann wird das mindeste Glied X_0 mit dem negativen Zeichen versehen sein. Um auch in dem Falle mit diesem als einem positiven beginnen zu können, müssen die Zeichen der Gleichung in die entgegengesetzten verwandelt werden. Diese Bemerkung erzeugt folgende veränderte Darstellung:

$$448. \quad X_0 - \frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_1 - \frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_2 - \ldots . - \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} X_n$$
$$= - \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}} \zeta^{-1} X_{n+1} - \frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}}{1^{r-2\,|\,1}} \zeta^{-2} X_{n+1} \ldots . - \zeta^{-r} X_{n+1} + \zeta^{-r} X_0 .$$

§. 92.

Da wir im Folgenden die Gleichungen (442.), (447.), (448.) öfters benutzen werden, so stellen wir zur bequemern Übersicht hier einige specielle Fälle zusammen. Wir erhalten aus (442.):

$$449. \quad \begin{cases} X_0 + X_1 + X_2 + X_3 + \ldots . + X_n = \Delta^{-1} X_{n+1} - \Delta^{-1} X_0 , \\ X_0 + 2X_1 + 3X_2 + 4X_3 + \ldots . + (n+1) X_n = (n+1) \Delta^{-1} X_{n+1} - \Delta^{-2} X_{n+1} + \Delta^2 X_0 , \end{cases}$$

449.
$$\begin{cases} X_0+\frac{2.3}{1.2}X_1+\frac{3.4}{1.2}X_2+\frac{4.5}{1.2}X_3+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n \\ =\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-1}X_{n+1}+\frac{n+1}{1}\Delta^{-2}X_{n+1}+\Delta^{-3}X_{n+1}-\Delta^{-3}X_0 \\ X_0+\frac{2\,3.4}{1.2.3}X_1+\frac{3.4.5}{1.2.3}X_2+\ldots\ldots\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}X_n \\ =\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\Delta^{-1}X_{n+1}-\frac{(n+1)(n+2)}{1.3.3}\Delta^{-2}X_{n+1}+\frac{n+1}{1}\Delta^{-3}X_{n+1}-\Delta^{-4}X_{n+1}+\Delta^{-4}X_0 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Aus (447.) erhalten wir für Reihen von einer ungeraden Glieder-Anzahl:

450.
$$\begin{cases} X_0-X_1+X_2-X_3\ldots.+X_n=\zeta^{-1}X_{n+1}+\zeta^{-1}X_0 \\ X_0-2X_1+3X_2-4X_3\ldots.+(n+1)X_n=\frac{n+1}{1}\zeta^{-1}X_{n+1}+\zeta^{-2}X_{n+1}+\zeta^{-2}X_0, \\ X_0-\frac{2.3}{1.2}X_1+\frac{3\,4}{1.2}X_2-\frac{4.5}{1.2}X_3\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n \\ =\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}X_{n+1}+\frac{n+1}{1}\zeta^{-2}X_{n+1}+\zeta^{-3}X_{n+1}+\zeta^{-3}X_0, \\ X_0-\frac{2.3.4}{1.2.3}X_1+\frac{3.4.5}{1.2.3}X_2-\ldots\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}X_n \\ =\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\zeta^{-1}X_{n+1}+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-2}X_{n+1}+\frac{n+1}{1}\zeta^{-3}X_{n+1}+\zeta^{-4}X_{n+1}+\zeta^{-4}X_0 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Aus (448.) aber erhalten wir, für Reihen von einer geraden Glieder-Anzahl:

451.
$$\begin{cases} X_0-X_1+X_2-X_3\ldots.-X=-\zeta^{-1}X_{n+1}+\zeta^{-1}X_0, \\ X_0-2X_1+3X_2-4X_3\ldots.-(n+1)X_n=-\frac{n+1}{1}\zeta^{-1}X_{n+1}-\zeta^{-2}X_{n+1}+\zeta^{-2}X_0, \\ X_0-\frac{2.3}{1.2}X_1+\frac{3.4}{1.2}X_2-\frac{4.5}{1.2}X_3\ldots.-\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}X_n \\ =-\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}X_{n+1}-\frac{n+1}{1}\zeta^{-2}X_{n+1}-\zeta^{-3}X_{n+1}+\zeta^{-3}X_0, \\ X_0-\frac{2.3.4}{1.2.3}X_1+\frac{3.4.5}{1.2\,3}X_2-\ldots\ldots.-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}X_n \\ =-\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\zeta^{-1}X_{n+1}-\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-2}X_{n+1}-\frac{n+1}{1}\zeta^{-3}X_{n+1}-\zeta^{-4}X_{n+1}+\zeta^{-4}X_0 \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Eine Vergleichung der Gleichungen (449.), (450.), (451.) mit (350.), (351.) und (352.) zeigt die wesentliche Verschiedenheit der Summen-Reihen und ihrer Summen-Ausdrücke.

§. 93.

Wir wenden uns nun zu Anwendungen. Die ersten Gleichungen in (449.), (450.) und (451.) fallen mit denen von (350.), (351.) und (352.) zusammen Daher benutzen wir sie nicht, indem sie schon an den gehörigen Orten benutzt und die Summen-Ausdrücke zu denen sie führen aufgestellt wurden, sondern gehen zur Auffindung der Summen-Ausdrücke für Reihen, deren Glieder mit den figurirten Zahlen verbunden sind, über, und betrachten zuerst Reihen der Potenzial-Gröfsen.

Wir legen zu dem Zwecke die zweite Gleichung von (449.) zu Grunde, und setzen in ihr $X_0 = x^p$. Dadurch wird:

$$x^p + 2(x+\Delta x)^p + 3(x+2\Delta x)^p + 4(x+3\Delta x)^p + \ldots + (n+1)(x+n\Delta x)^p$$
$$= (n+1)\Delta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^p - \Delta^{-2}[x+(n+1)\Delta x]^p + \Delta^{-2}x^p.$$

zur Darstellung des Summen-Ausdruckes der vorliegenden Reihe ist nur der erste und zweite negative Unterschied von $[x+(n+1)\Delta x]^p$ und der zweite von x^p nöthig. Diese finden wir nach gehöriger Substitution aus den Gleichungen (192.) und (193.). Ihre Einführung nach der Angabe der vorstehenden Gleichung giebt:

452.
$$x^p + 2(x+\Delta x)^p + 3(x+2\Delta x)^p + \ldots + (n+1)(x+n\Delta x)^p$$
$$= \frac{(n+1)[x+(n+1)\Delta x]^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - \frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p+2}}{p(p+1)(\Delta x)^2} + \frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}$$
$$- \frac{n+1}{1}\frac{[x+(n+1)\Delta x]^p}{2} + \frac{[x+(n+1)\Delta x]^{p+1}}{(p+1)\Delta x} - \frac{x^{p+1}}{(p+1)\Delta x}$$
$$+ \frac{(n+1)p}{6.2}[x+(n+1)\Delta x]^{p-1}\Delta x - \frac{5[x+(n+1)\Delta x]^p}{12} + \frac{5x^p}{12}$$
$$- \frac{(n+1)[p(p-1)(p-2)]}{4.30.1.2.3}[x+(n+1)\Delta x]^{p-3}(\Delta x)^3 + \frac{p}{12}[x+(n+1)\Delta x]^{p-1}(\Delta x) - \frac{px^{p-1}\Delta x}{12}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Setzen wir hierin überall $n-1$ statt n und ziehen die Ausdrücke der beiden ersten Scheitelreihen, wo es möglich ist, in einen zusammen, so gewinnen wir hieraus folgende Reihe nebst ihrem Summen-Ausdrucke:

453.
$$x^p+2(x+\Delta x)^p+3(x+2\Delta x)^p+\ldots.+n[x+(n-1)\Delta x]^p$$
$$=-\frac{(x+n\Delta x)^{p+2}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}+\frac{x^{p+2}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}$$
$$+\frac{(n+1)(x+n\Delta x)^{p+1}}{(p+1)\Delta x}-\frac{x^{p+1}}{(p+1)\Delta x}$$
$$-\frac{6n+5}{12}(x+n\Delta x)^p+\frac{5x^p}{12}$$
$$+\frac{(n+1)p}{12}(x+n\Delta x)^{p-1}\Delta x-\frac{px^{p-1}\Delta x}{12}$$
$$-\frac{p(p-1)}{1.2.120}(x+n\Delta x)^{p-2}(\Delta x)^2+\frac{p(p-1)x^{p-2}(\Delta x)^2}{120.1.2}$$
$$-\frac{n+1}{120}\cdot\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(x+n\Delta x)^{p-3}(\Delta x)^3+\frac{p(p-1)(p-2)x^{p-3}(\Delta x)^2}{120.1.2.3}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Specielle Fälle leiten sich leicht aus dieser Gleichung ab. Wird statt p allmälig $1.2.3\ldots.$ gesetzt, so hat man:

$$x+2(x+\Delta x)+3(x+2\Delta x)+\ldots.+n[x+(n-1)\Delta x]$$
$$=-\frac{(x+n\Delta x)^3}{2.3.(\Delta x)^2}+\frac{(n+1)(x+n\Delta x)^2}{2\Delta x}-\frac{6n+5}{12}(x+n\Delta x)$$
$$+\frac{x^3}{2.3.(\Delta x)^2}-\frac{x^2}{2\Delta x}+\frac{5x}{12},$$

454.
$$x^2+2(x+\Delta x)^2+3(x+\Delta x)^3+\ldots.+n[x+(n-1)\Delta x]^2$$
$$=-\frac{(x+n\Delta x)^4}{3.4.(\Delta x)^2}+\frac{(n+1)(x+n\Delta x)^3}{3\Delta x}-\frac{5n+5}{12}(x+n\Delta x)^2+\frac{n+1}{6}(x+n\Delta x)\Delta x$$
$$+\frac{x^4}{3.4.(\Delta x)^2}-\frac{x^3}{3\Delta x}+\frac{5x^2}{12}-\frac{x\Delta x}{6},$$

u. s. w.

Legen wir die dritte Gleichung (449.) zu Grunde, und setzen $X_0=x^p$ und $n-1$ statt n, so entsteht:

$$x^p+\frac{2.3}{1.2}(x+\Delta x)^p+\frac{3.4}{1.2}(x+2\Delta x)^p+\ldots.+\frac{n(n+2)}{1.2}[x+(n-1)\Delta x]^p$$
$$=\frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^{-1}(x+n\Delta x)^p-n\Delta^{-2}(x+n\Delta x)^p+\Delta^{-3}(x+n\Delta x)^p-\Delta^{-3}x^p.$$

Zur Bestimmung des Summen-Ausdruckes der vorliegenden Reihe ist uns der erste, zweite und dritte negative Unterschied von $(x+n\Delta x)^p$ und der dritte von x^p nöthig. Entwickeln wir diese aus den Gleichungen (192.), (193.) und (194.) dadurch, dafs wir $(x+n\Delta x)$ und x statt y setzen, so erhalten wir, nach gehöriger Ordnung und Reduction, folgende Gleichung:

455.
$$x^p+\frac{2.3}{1.2}(x+\Delta x)^p+\frac{3.4}{1.2}(x+2\Delta x)^p+\ldots.+\frac{n(n+1)}{1.2}[x+(n-1)\Delta x]^p$$
$$=\frac{1}{(p+1)(p+2)(p+3)(\Delta x)^3}[(x+n\Delta x)^{p+3}-x^{p+3}]$$
$$-\frac{1}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}\left[\left(n+\frac{3}{2}\right)(x+n\Delta x)^{p+2}-\frac{3}{2}x^{p+2}\right]$$
$$+\frac{1}{(p+1)\Delta x}\left[\left(\frac{n(n+1)}{1.2}+n+1\right)(x+n\Delta x)^{p+1}-x^{p+1}\right]$$
$$-\left[\left(\frac{n(n+1)}{1.2.2}+\frac{5n}{12}+\frac{3}{8}\right)(x+n\Delta x)^p-\frac{3x^p}{8}\right]$$
$$+\frac{p}{1}\Delta x\left[\left(\frac{n(n+1)}{12.1.2}+\frac{n}{12}+\frac{19}{240}\right)(x+n\Delta x)^{p-1}-\frac{19x^{p-1}}{240}\right]$$
$$-\frac{p(p-1)}{1.2}(\Delta x)^2\left[\left(\frac{n}{120}+\frac{1}{80}\right)(x+n\Delta x)^{p-2}-\frac{x^{p-2}}{80}\right]$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\Delta x)^3\left[\left(\frac{n(n+1)}{120.1.2}+\frac{n}{120}+\frac{2}{315}\right)(x+n\Delta x)^{p-3}-\frac{2x^{p-3}}{315}\right]$$
. . . . . .

Die Summirung der hier angedeuteten Arten von Reihen läfst sich leicht weiter fortsetzen.

§. 94.

Ähnliche Anwendungen, wie wir auf die Summirung der Potenzenreihen, deren Glieder mit einerlei Zeichen versehen sind, gamacht haben, lassen sich auch auf die Potenzenreihen machen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind. Legen wir die zweite Gleichung von (450.) zu Grunde und setzen $x_0=x^p$, so erhalten wir für eine Reihe von ungerader Glieder-Anzahl:

$$x^p-2(x+\Delta x)^p+3(x+2\Delta x)^p-\ldots.+(n+1)(x+n\Delta x)^p$$
$$=\frac{n+1}{1}\zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^p+\zeta^{-2}[x+(n+1)\Delta x]^p+\zeta^{-2}x^p.$$

Werden nun die angezeigten negativen Aufstufungen aus den Gleichungen (82.) und (83.) eingeführt, $n-1$ statt n gesetzt und gehörig geordnet, so gewinnen wir folgende Summenreihe:

456.
$$x^p-2(x+\Delta x)^p+3(x+2\Delta x)^p-\ldots.+n[x+(n-1)\Delta x]^p$$
$$=\frac{1}{4}[(2n+1)(x+n\Delta x)^p+x]$$
$$-\frac{p\Delta x}{n}[(n+1)(x+n\Delta x)^{p-1}+x^{p-1}]$$
$$+\frac{p(p-1)}{8.1.2}(\Delta x)^2[(x+n\Delta x)^{p-2}+x^{p-2}]$$
$$+\frac{p(p-1)(p-2)}{8.1.2.3}(\Delta x)^3[(x+n\Delta x)^{p-3}+x^{p-3}]$$
$$-\frac{p(p-1)(p-2)(p-3)}{4.1.2.3.4}(\Delta x)^4[(x+n\Delta x)^{p-4}+x^{p-4}]$$
. . . . . .

Wird die dritte Gleichung in (450.) zu Grunde gelegt und in ihr $X_0 = x^p$ gesetzt, so entsteht:

$$x^p - \frac{2.3}{1.2}(x+\Delta x)^p + \frac{3.4}{1.2}(x+2\Delta x)^p - \ldots + \frac{n(n+1)}{1.2}(x+n\Delta x)^p$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^p + \frac{n+1}{1}\zeta^{-2}[x+(n+1)\Delta x]^p + \zeta^{-3}[x+(n+1)\Delta x]^p + \zeta^{-3}x^p.$$

Werden auch hier die angezeigten Geschäfte ausgeführt, $n-1$ statt n gesetzt, und zweckmäfsig geordnet, so gewinnt man:

457.
$$x^p - \frac{2.3}{1.2}(x+\Delta x)^p + \frac{3.4}{1.2}(x+2\Delta x)^p - \frac{4.5}{1.2}(x+3\Delta x)^p + \ldots + n[x+(n-1)\Delta x]^p$$
$$= \left(\frac{n(n+1)}{1.2.2} + \frac{n}{4} + \frac{1}{8}\right)(x+n\Delta x)^p + \frac{x^p}{8}$$
$$- p\Delta x\left[\left(\frac{n(n+1)}{8} + \frac{n}{4} + \frac{3}{16}\right)(x+n\Delta x)^{p-1} + \frac{3}{16}x^{p-1}\right]$$
$$+ \frac{p(p-1)}{1.2}(\Delta x)^2\left[\left(\frac{n}{8} + \frac{3}{16}\right)(x+nnx)^{p-2} + \frac{3x^{p-2}}{16}\right]$$
$$+ \frac{p(p-1)(p-2)}{1.2.3}(\Delta x)^3\left[\left(\frac{n(n+1)}{16} + \frac{n}{8}\right)(x+n\Delta x)^{p-3}\right]$$
$$- \frac{p\ldots(p-3)}{1.2.3.4}(\Delta x)^4\left[\left(\frac{n}{4} + \frac{3}{8}\right)(x+n\Delta x)^{p-4} + \frac{3x^{p-4}}{8}\right]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Die Anwendung auf specielle Fälle, so wie die weitere Aufsuchung der Summen-Ausdrücke derartiger Reihen ergiebt sich aus dem Bisherigen leicht. Die Summen-Ausdrücke für Reihen von gerader Glieder-Anzahl folgen sich leicht, wenn man berücksichtigt, dafs die Glieder aller negativen Aufstufungen, mit Ausnahme derer der letzten, mit dem entgegengesetzten Zeichen versehen sind. Eben so lassen sich nun die Summen-Ausdrücke für reciproke Potenzenreihen, deren Glieder mit den steigenden figurirten Zahlen versehen sind, leicht auffinden.

§. 95.

Eine andere Anwendung, die wir aus den im vorhergehenden §. gefundenen Resultaten ziehen, besteht in der Summirung der figurirten Zahlenreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind.

Die Summen-Ausdrücke des vorigen §. gelten nicht nur für die Fälle, wenn p eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, ..., sondern auch dann, wenn $p = 0$ bedeutet. Setzt man aber $p = 0$, so verschwinden die Glieder aller Scheitelreihen in den gefundenen Summen-Ausdrücken, mit Ausnahme der ersten, und die Glieder die 0 zum Exponenten haben, gehen

in die Einheit über, dies ist bei den übrig bleibenden der Fall. Wir haben daher nur die Coefficienten des ersten Gliedes aller höheren negativen Aufstufungen, welche die Potenzen von $\frac{1}{2}$ sind, der Reihe nach nöthig, und ferner die Coefficienten, welche nach den Gleichungen (450.) und (451.) mit den negativen Aufstufungen der Potenzialfunctionen verbunden sind. Nach diesen Bemerkungen gewinnen wir unmittelbar aus (450.) für die numerischen Ausdrücke der verschiedenen Combinations-Classen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen versehen sind, und die eine ungerade Glieder-Anzahl haben, folgende Resultate:

$$1-2+3-4+5\ldots+n=\frac{n+1}{2},$$

$$1-\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}-\frac{4.5}{1.2}+\ldots+\frac{n(n+1)}{1.2}=\frac{n(n+1)}{2.1.2}+\frac{n+1}{4},$$

$$1-\frac{2.3.4}{1.2.3}+\frac{3.4.5}{1.2.3}-\frac{4.5.6}{1.2.3}+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{n(n+1)(n+2)}{2.1.2.3}+\frac{n(n+1)}{1.2}+\frac{n+1}{8},$$

$$1-\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}+\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}-\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4}+\ldots+\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$
$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.1.2.3.4}+\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3.4}+\frac{n(n+1)}{1.2.8}+\frac{n+1}{16},$$

u. s. w., allgemein:

458.
$$1-\frac{2.3\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.r}+\frac{3.4\ldots.(r+2)}{1.2\ldots.r}-\ldots+\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-1)}{1.2\ldots.r}$$
$$=\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-1)}{2.1.2\ldots.r}+\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-2)}{2^2.1.2\ldots.(r-1)}+\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-3)}{2^3.1.2\ldots.(r-2)}\ldots.\frac{n+1}{2^r}.$$

Aus (451.) findet man die Summen-Ausdrücke für Reihen von derselben Art bei gerader Anzahl der Glieder:

$$1-2+3-4+5-\ldots.-n=-\frac{n}{2},$$

$$1-\frac{2.3}{1.2}+\frac{3.4}{1.2}-\frac{4.5}{1.2}+\ldots.-\frac{n(n+1)}{1.2}=-\frac{n(n+1)}{2.1.2},$$

$$1-\frac{2.3.4}{1.2.3}+\frac{3.4.5}{1.2.3}-\frac{4.5.6}{1.2.3}+\ldots.-\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=-\frac{n(n+1)(n+2)}{2.1.2.3}-\frac{n(n+1)}{4.1.2}-\frac{n}{8},$$

$$1-\frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}+\frac{3.4.5.6}{1.2.3.4}-\frac{4.5.6.7}{1.2.3.4}+\ldots.-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$$
$$=-\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{2.1.2.3.4}-\frac{n(n+1)(n+2)}{2^2.1.2.3}-\frac{n(n+1)}{1.2.2^3}-\frac{n}{2^4},$$

u. s. w., allgemein:

459.
$$1-\frac{2.3\ldots.(r+1)}{1.2\ldots.r}+\frac{2.3\ldots.(r+2)}{1.2\ldots.r}-\frac{4.5\ldots.(r+3)}{1.2\ldots.r}+\ldots-\frac{n(n+1)(n+2)\ldots.(n+r-1)}{1.2.3\ldots.r}$$
$$=-\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-1)}{2.1.2\ldots.r}-\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-2)}{2^2.1.2\ldots.(r-1)}-\frac{n(n+1)\ldots.(n+r-3)}{2^3.1.2\ldots.(r-2)}\ldots.-\frac{n}{2^r}.$$

§. 96.

Sehr leicht lassen sich die Summen-Ausdrücke für Facultätenreihen gewinnen, deren Glieder mit positiven Zeichen und mit den steigenden figurirten Zahlen verbunden sind. Setzen wir in der zweiten und den folgenden Gleichungen von (449.) $X_0 = x^{p\,|\,\Delta x}$, so erhalten wir:

$$x^{p\,|\,\Delta x}+2(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+3(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\ldots.+(n+1)(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}$$
$$=(n+1)\Delta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}-\Delta^{-2}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}+\Delta^{-2}x^{p\,|\,\Delta x},$$
$$x^{p\,|\,\Delta x}+\frac{2.3}{1.2}(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\frac{3.4}{1.2}(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}-\frac{n+1}{1}\Delta^{-2}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}$$
$$+\Delta^{-3}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}-\Delta^{-3}x^{p\,|\,\Delta x},$$

u. s. w. Die Ausdrücke, welche zur Bestimmung des Summen-Ausdruckes nöthig sind, werden aus der Gleichung (197.) entnommen. Sie sind:

$$\Delta^{-1}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}=\frac{(x+n\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)(\Delta x)},$$
$$\Delta^{-2}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}=\frac{[x+(n-1)\Delta x]^{p+2\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2},$$
$$\Delta^{-3}[x+(n+1)\Delta x]^{p\,|\,\Delta x}=\frac{[x+(n-2)\Delta x]^{p+3\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(p+3)(\Delta x)^3},$$

u. s. w.

$$\Delta^{-1}x^{p\,|\,\Delta x}=\frac{(x-\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x},$$
$$\Delta^{-2}x^{p\,|\,\Delta x}=\frac{(x-2\Delta x)^{p+2\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2},$$
$$\Delta^{-3}x^{p\,|\,\Delta x}=\frac{(x-3\Delta x)^{p+3\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(p+3)(\Delta x)^3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ihre Einführung führt zu folgenden Resultaten:

460.
$$\begin{cases} x^{p\,|\,\Delta x}+2(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+3(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\ldots.+(n+1)(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} \\ \quad=\frac{n+1}{1}\cdot\frac{(x+n\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x}-\frac{[x+(n-1)\Delta x]^{p+2\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}+\frac{(x-2\Delta x)^{p+2\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}, \\ x^{p\,|\,\Delta x}+\frac{2.3}{1.2}(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\frac{3.4}{1.2}(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x} \\ =\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\cdot\frac{(x+n\Delta x)^{p+1\,|\,\Delta x}}{(p+1)\Delta x)}-\frac{n+1}{1}\cdot\frac{[x+(n-1)\Delta x]^{p+2\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(\Delta x)^2}+\frac{[x+n-2)\Delta x]^{p+3\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(p+3)(\Delta x)^3} \\ \qquad+\frac{(x-3\Delta x)^{p+3\,|\,\Delta x}}{(p+1)(p+2)(p+3)(\Delta x)^3}, \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Behandelt man die Nennerfacultäten auf gleiche Weise nach (449.), so gewinnt man folgende Reihen nebst ihren Summen-Ausdrücken:

461.
$$\left\{\begin{array}{l}
\dfrac{1}{x^{p\,|\,\Delta x}}+\dfrac{2}{(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}+\dfrac{3}{(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}+\ldots.+\dfrac{n+1}{(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} \\
\quad=-\dfrac{n+1}{(p-1)\,[x+(n+1)\Delta x]^{p-1\,|\,\Delta x}\,\Delta x}-\dfrac{1}{(p-1)(p-2)\,[x+(n+1)\Delta x]^{p-2\,|\,\Delta x}\,(\Delta x)^2} \\
\quad+\dfrac{1}{(p-1)(p-2)\,x^{p-2\,|\,\Delta x}\,(\Delta x)^2}, \\
\dfrac{1}{x^{p\,|\,\Delta x}}+\dfrac{2.3}{1.2.(x+\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}+\dfrac{3.4}{1.2.(x+2\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}}+\ldots.+\dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2.(x+n\Delta x)^{p\,|\,\Delta x}} \\
=-\dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2.(p-1)\,[x+(n+1)\Delta x]^{p-1\,|\,\Delta x}\,\Delta x}-\dfrac{n+1}{(p-1)(p-2)\,[x+(n+1)\Delta x]^{p-2\,|\,\Delta x}\,(\Delta x)^2} \\
-\dfrac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)[x+(n+1)\Delta x]^{p-3\,|\,\Delta x}(\Delta x)^3}+\dfrac{1}{(p-1)(p-2)(p-3)[x+(n+1)\Delta x]^{p-3\,|\,\Delta x}(\Delta x)^3} \\
\text{u. s. w.}
\end{array}\right.$$

Sollen die Summen-Ausdrücke für Facultätenreihen mit abwechselnden Zeichen aufgesucht werden, so führt eine der in §. 82. und 83. ähnliche Behandlungsweise zum Ziele.

§. 97.

Die Anwendungen auf Exponentialgröfsen und die durch sie erzeugten Reihen sind sehr leicht. Setzt man nämlich in (449.) $X_0 = a^x$, so zieht man aus der zweiten und dritten Gleichung folgende Darstellung:

$$a^x+\ 2\,a^{x+\Delta x}+\ 3\,a^{x+2\Delta x}+\ldots.+\frac{n+1}{1}\,a^{x+n\Delta x}$$
$$=(n+1)\,\Delta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x}-\Delta^{-2}a^{x+(n+1)\Delta x}+\Delta^{-2}a^x,$$
$$a^x+\frac{2.3}{1.2}\,a^{x+\Delta x}+\frac{3.4}{1.2}\,a^{x+2\Delta x}+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\,a^{x+n\Delta x}$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\,\Delta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x}-(n+1)\,\Delta^{-2}a^{x+(n+1)\Delta x}+\Delta^{-3}a^{x+(n+1)\Delta x}-\Delta^{-3}a^x$$

u. s. w. Die zur Construirung des Summen-Ausdruckes nöthig werdenden negativen Unterschiede gewinnen wir aus (202.), wenn wir die erforderlichen Werthe substituiren. Sie sind:

$$\Delta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x}=\frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1},\qquad \Delta^{-2}a^x=\frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^2},$$
$$\Delta^{-2}a^{x+(n+1)\Delta x}=\frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2},\qquad \Delta^{-3}a^x=\frac{a^x}{(a^{\Delta x}-1)^3},$$
$$\Delta^{-3}a^{x+(n+1)\Delta x}=\frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^3},$$

u. s. w. u. s. w.

Die Substitution der angezeigten Werthe führt zu folgender Darstellung:

$$462.\quad \begin{cases} a^x + 2a^{x+\Delta x} + 3a^{x+2\Delta x} + \ldots + (n+1)a^{x+n\Delta x} \\ \qquad = \dfrac{(n+1)a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}-1} - \dfrac{a^{x+(n+1)\Delta x}-a^x}{(a^{\Delta x}-1)^2}, \\ a^x + \dfrac{2.3}{1.2}a^{x+\Delta x} + \dfrac{3.4}{1.2}a^{x+2\Delta x} + \ldots + \dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2}a^{x+n\Delta x} \\ = \dfrac{(n+1)(n+2)a^{x+(n+1)\Delta x}}{1.2.(a^{\Delta x}-1)} - \dfrac{(n+1)a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}-1)^2} + \dfrac{a^{x+(n+1)\Delta x}-a^x}{(a^{\Delta x}-1)^3}, \end{cases}$$

und allgemein:

$$a^x + \frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+\Delta x} + \frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+2\Delta x} + \ldots + \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+n\Delta x}$$
$$= \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}a^{x+(n+1)\Delta x}}{1^{r-1\,|\,1}(a^{\Delta x}-1)} - \frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}a^{x+(n+1)\Delta x}}{1^{r-2\,|\,1}(a^{\Delta x}-1)^2} + \ldots + \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}-a^x}{(a^{\Delta x}-1)^r}.$$

Diese Arten von Reihen haben wir schon in der dritten Untersuchung unserer Forschungen in der Analysis und in der 3ten Abhandlung unseres Differenzial-Calculs gegeben, und wir verweisen deswegen auf die dort gefundenen Resultate.

Auf ähnliche Weise, wie die vorstehenden Gleichungen, finden wir aus (449.) und (203.) die Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken von folgender Art:

$$463.\quad \begin{cases} \dfrac{1}{a^x} + \dfrac{2}{a^{x+\Delta x}} + \dfrac{3}{a^{x+2\Delta x}} + \ldots + \dfrac{n+1}{a^{x+n\Delta x}} \\ \qquad = \dfrac{(n+1)a^{\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})a^{x+(n+1)\Delta x}} - \dfrac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2 a^{x+(n+1)\Delta x}} + \dfrac{a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})a^x}, \\ \dfrac{1}{a^x} + \dfrac{2.3}{1.2a^{x+\Delta x}} + \dfrac{3.4}{1.2a^{x+2\Delta x}} + \ldots + \dfrac{(n+1)(n+2)}{1.2a^{x+n\Delta x}} \\ = \dfrac{(n+1)(n+2)a^{\Delta x}}{1.2(1-a^{\Delta x})a^{x+(n+1)\Delta x}} - \dfrac{(n+1)a^{2\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^2 a^{x+(n+1)\Delta x}} + \dfrac{a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3 a^{x+(n+1)\Delta x}} - \dfrac{a^{3\Delta x}}{(1-a^{\Delta x})^3 a^x} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das allgemeine Gesetz läfst sich hieraus sehr leicht erkennen.

§. 98.

Wenden wir die in (450.) und (451.) mitgetheilten Formeln auf Exponentialgröfsen an, so erhalten wir für jedes beliebige n:

$$a^x - 2a^{x+\Delta x} + 3a^{x+2\Delta x} - \ldots \pm (n+1)a^{x+n\Delta x}$$
$$= \pm[(n+1)\zeta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x} + \zeta^{-2}a^{x+(n+1)\Delta x}] + \zeta^{-2}a^x,$$

$$a^x - \frac{2.3}{1.2}a^{x+\Delta x} + \frac{3.4}{1.2}a^{x+2\Delta x} - \frac{4.5}{1.2}a^{x+3\Delta x} + \ldots. \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}a^{x+n\Delta x}$$

$$= \pm\left[\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x} + (n+1)\zeta^{-2}a^{x+(n+1)\Delta x} + \zeta^{-3}a^{x+(n+1)\Delta x}\right] + \zeta^{-3}a^x$$

u. s. w. Die zur Bestimmung der gesuchten Summen-Ausdrücke nöthigen Ausdrücke ziehen wir aus der Gleichung (87.). Sie sind:

$$\zeta^{-1}a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{a^{\Delta x}+1}, \qquad \zeta^{-2}a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}+1)^2},$$

$$\zeta^{-2}a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^2}, \qquad \zeta^{-3}a^x = \frac{a^x}{(a^{\Delta x}+1)^3}$$

$$\zeta^{-3}a^{x+(n+1)\Delta x} = \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^3}$$

u. s. w. **u. s. w.**

Ihre Einführung erzeugt folgende Summenreihen mit abwechselnden Zeichen:

464.

$$a^x - 2a^{x+\Delta x} + 3a^{x+2\Delta x} - \ldots. \pm (n+1)a^{x+n\Delta x}$$
$$= \pm\left(\frac{(n+1)a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)} + \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^2}\right) + \frac{a^x}{a^{\Delta x}+1},$$

$$a^x - \frac{2.3}{1.2}a^{x+\Delta x} + \frac{3.4}{1.2}a^{x+2\Delta x} - \ldots. \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}a^{x+n\Delta x}$$
$$= \pm\left[\frac{(n+1)(n+2)a^{x+(n+1)\Delta x}}{1.2.(a^{\Delta x}+1)} + \frac{(n+1)a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^2} + \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^3}\right] + \frac{a^x}{(a^{\Delta x}+1)^3},$$

u. s. w.,

allgemein:

$$a^x - \frac{2^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+\Delta x} + \frac{3^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+2\Delta x} - \ldots. \pm \frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}}{1^{r-1\,|\,1}}a^{x+(n+1)\Delta x}$$

$$= \pm\left[\frac{(n+1)^{r-1\,|\,1}a^{x+(n+1)\Delta x}}{1^{r-1\,|\,1}(a^{\Delta x}+1)} + \frac{(n+1)^{r-2\,|\,1}a^{x+(n+1)\Delta x}}{1^{r-2\,|\,1}(a^{\Delta x}+1)^2} + \ldots + \frac{a^{x+(n+1)\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^r}\right] + \frac{a^{x+\Delta x}}{(a^{\Delta x}+1)^r}.$$

Das positive Zeichen gilt für ein gerades, das negative für ein ungerades n.

§. 99.

Legen wir nun die Sinusfunction zu Grunde, und suchen Reihen mit ihren Summen-Ausdrücken für sie auf, so haben wir zu berücksichtigen, dafs nach (449.) zur Auffindung der Summenformeln folgende Ausdrücke aus (206.) nöthig werden:

$$\Delta^{-1}X_{n+1} = \Delta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x) = -\frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\Delta^{-2}X_{n+1} = \Delta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x) = -\frac{\sin(x+n\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}X_{n+1} = \Delta^{-3}\sin[x+(n+1)\Delta x) = \frac{\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

$$\Delta^{-4}X_{n+1} = \Delta^{-4}\sin[x+(n+1)\Delta x) = \frac{\sin[x+(n-1)\Delta x]}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4},$$

u. s. w.

$$\Delta^{-2}\sin x = \Delta^{-2}\sin x = -\frac{\sin(x-\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}\sin x = \Delta^{-3}\sin x = \frac{\cos(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

$$\Delta^{-4}\sin x = \Delta^{-4}\sin x = \frac{\sin(x-2\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4},$$

u. s. w.

Durch gehöriges Substituiren erhalten wir:

465.
$$\sin x+2\sin(x+\Delta x)+3\sin(x+2\Delta x)+\ldots.+(n+1)\sin(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{(n+1)\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{\sin(x+n\Delta x)}{2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}-\frac{\sin(x-\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}$$
$$= -\frac{(n+1)\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{\cos\left(x+\frac{n-1}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}.$$

Die letzte Gleichung entsteht, wenn die zwei letzten Glieder des Summen-Ausdrucks nach (425.) in eins vereinigt werden:

$$\sin x+\frac{2.3}{1.2}\sin(x+\Delta x)+\frac{3.4}{1.2}\sin(x+2\Delta x)+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\sin(x+n\Delta x)$$
$$= -\frac{(n+1)(n+2)\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{1.2.2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{\sin(x+n\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}+\frac{\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}-\frac{\cos(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$= -\frac{(n+1)(n+2)\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{1.2.2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{n+1}{1}\cdot\frac{\sin(x+n\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}-\frac{\sin\left(x+\frac{n-2}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n+2}{2}\Delta x}{2^2\left(\sin\frac{\Delta x}{2}\right)^3}.$$

Die zweite Gleichung entsteht, wenn die beiden letzten Ausdrücke nach (423.) in einen vereinigt werden:

$$\sin x+\frac{2.3.4}{1.2.3}\sin(x+\Delta x)+\frac{3.4.5}{1.2.3}\sin(x+2\Delta x)+\ldots.+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3}\sin(x+n\Delta x)$$

$$=-\frac{(n+1)^{3|1}\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{1.2.3.2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{(n+1)^{2|1}\sin(x+n\Delta x)}{1.2.2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}+\frac{(n+1)\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

$$-\frac{\sin[x+(n-1)\Delta x]}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}+\frac{\sin(x-2\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}$$

$$=-\frac{(n+1)^{3|1}\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{1.2.3.2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{(n+1)^{2|1}\sin(x+n\Delta x)}{1.2.2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}+\frac{(n+1)\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

$$-\frac{\cos\left(x+\frac{n-3}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n+3}{2}\Delta x}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4},$$

u. s. w. Das Gesetz, welches diesen Summen-Ausdrücken zu Grunde liegt, ist einfach, und läfst sich leicht aus der Analogie der einzelnen Fälle erschliefsen.

§. 100.

Wir gewinnen die Reihen für die Function des Cosinus, deren Glieder mit positiven Zeichen verbunden sind, wenn wir die Gleichungen (449.) zu Grunde legen. Es werden uns dann die Unterschiede des Cosinus nöthig. Sie sind nach (207.) folgende:

$$\Delta^{-1}X_{n+1}=\Delta^{-1}\cos[x+(n+1)\Delta x]=\frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\Delta^{-2}X_{n+1}=\Delta^{-2}\cos[x+(n+1)\Delta x]=-\frac{\cos(x+n\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}X_{n+1}=\Delta^{-3}\cos[x+(n+1)\Delta x]=-\frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3},$$

u. s. w.

$$\Delta^{-2}X=\Delta^{-2}\cos x=-\frac{\cos(x-\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\Delta^{-3}X=\Delta^{-3}\cos x=-\frac{\sin(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

u. s. w.

Das Einführen der in (449.) angezeigten Werthe erzeugt folgende Resultate:

466.
$$\begin{cases}\cos x+2\cos(x+\Delta x)+3\cos(x+2\Delta x)+\ldots.+(n+1)\cos(x+n\Delta x)\\ =\frac{(n+1)\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{\cos(x+n\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}-\frac{\cos(x-\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)}\\ =\frac{(n+1)\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}-\frac{\sin\left(x+\frac{n-1}{2}\Delta x\right)\sin\frac{n+1}{2}\Delta x}{2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2},\end{cases}$$

466.
$$\begin{cases} \cos x + \frac{2.3}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \frac{3.4}{1.2}\cos(x+2\Delta x) + \ldots + (n+1)\cos(x+n\Delta x) \\ = \frac{(n+1\ (n+2)\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x)}{1.2.2\sin\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{(n+1)\cos(x+n\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2} - \frac{\sin[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \frac{\sin(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3} \\ = \frac{(n+1)(n+2)\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{1.2.2\sin\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{(n+1)\cos(x+n\Delta x)}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2} - \frac{\cos\left(x+\frac{n-2}{2}\Delta x\right).\sin\frac{n+2}{2}\Delta x}{2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Das Gesetz, welchem die Bildungsweise dieser Summen-Ausdrücke unterliegt, läfst sich leicht hieraus erkennen.

§. 101.

Um die Summen-Ausdrücke für Sinusreihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen und figurirten Zahlen verbunden sind, zu finden, sind uns nach den Gleichungen (450.) und (451.) die negativen Aufstufungen für die Function des Sinus nöthig. Aus der Gleichung (91.) erhalten wir:

$$\zeta^{-1}X_{n+1} = \zeta^{-1}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\zeta^{-2}X_{n+1} = \zeta^{-2}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\sin(x+n\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\zeta^{-3}X_{n+1} = \zeta^{-3}\sin[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\sin[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

u. s. w.,

und

$$\zeta^{-2}X_0 = \zeta^{-2}\sin x = \frac{\sin(x-\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\zeta^{-3}X_0 = \zeta^{-3}\sin x = \frac{\sin\left(x-\frac{3\Delta x}{2}\right)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

u. s. w.

Ziehen wir die Reihen von gerader und ungerader Glieder-Anzahl zusammen, so erhalten wir:

467.
$$\begin{cases} \sin x - 2\sin(x+2\Delta x) + 3\sin(x+2\Delta x) - \ldots \pm (n+1)\sin[x+(n+1)\Delta x] \\ \quad = \pm\left[\frac{(n+1)\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x} + \frac{\sin(x+n\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}\right] + \frac{\sin(x-\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}, \\ \sin x - \frac{2.3}{1.2}\sin(x+2\Delta x) + \frac{3.4}{1.2}\sin(x+2\Delta x) - \ldots \pm \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\sin(x+n\Delta x) \\ \quad = \pm\frac{(n+1)(n+2)\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{1.2.2\cos\frac{1}{2}\Delta x} \pm \frac{(n+1)\sin(x+n\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} \\ \quad \pm\frac{\sin[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \frac{\sin(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} \\ \text{u. s. w.} \end{cases}$$

Aus den vorstehenden speciellen Fällen läfst sich leicht das allgemeine Ableitungsgesetz für die weitern Reihen erkennen. Das positive Zeichen gilt für Reihen von ungerader, das negative für solche von gerader Glieder-Anzahl.

§. 102.

Um Summen-Ausdrücke für Cosinus-Reihen, deren Glieder mit abwechselnden Zeichen und figurirten Zahlen verbunden sind, zu finden, werden die negativen Aufstufungen des Cosinus nöthig. Sie sind nach der Gleichung (95.) in Übereinstimmung mit den Gleichungen (450.) und (451.) folgende:

$$\zeta^{-1} X_{n+1} = \zeta^{-1} \cos[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x},$$

$$\zeta^{-2} X_{n+1} = \zeta^{-2} \cos[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\cos(x+n\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\zeta^{-3} X_{n+1} = \zeta^{-3} \cos[x+(n+1)\Delta x] = \frac{\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{n^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

u. s. w.

und

$$\zeta^{-2} X_0 = \zeta^{-2} \cos x = \frac{\cos(x-\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2},$$

$$\zeta^{-3} X_0 = \zeta^{-3} \cos x = \frac{\cos(x+\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$

u. s. w.

Die Einführung dieser Werthe erzeugt für Reihen von ungerader und gerader Glieder-Anzahl folgende Darstellungen:

468.
$$\left\{\begin{array}{l} \cos x - 2\cos(x+\Delta x) + 3\cos(x+2\Delta x) - \ldots \pm (n+1)\cos(x+n\Delta x) \\ \quad = \pm\dfrac{(n+1)\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x} \pm \dfrac{\cos(x+n\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} + \dfrac{\cos(x-\Delta x)}{2^2\cos\frac{1}{2}\Delta x}, \\ \cos x - \dfrac{2.3}{1.2}\cos(x+\Delta x) + \dfrac{3.4}{1.2}\cos(x+2\Delta x) - \ldots \pm \dfrac{(n+1)(n+2)\cos(x+n\Delta x)}{1.2} \\ = \pm\dfrac{(n+1)(n+2)\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x} \pm \dfrac{(n+1)\cos(x+n\Delta x)}{2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2} \pm \dfrac{\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} + \dfrac{\cos(x-\frac{3}{2}\Delta x)}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3} \\ \text{u. s. w.} \end{array}\right.$$

Das positive Zeichen gilt für eine Reihe von ungerader, das negative für eine von gerader Glieder-Anzahl.

§. 103.

Bis jetzt haben wir in der Summenrechnung solche Reihen behandelt, deren Glieder mit den figurirten Zahlen verbunden sind. Es

lassen sich aber auch Reihen aufstellen, deren Glieder mit andern, regelmäfsig fortlaufenden, Coefficienten, wie z. B. mit den Potenzen der natürlichen Zahlen, verbunden sind. Durch schickliches Anreihen der Grundgleichungen würde man z. B. folgende für die Summirung aller durch einfache Functionen erzeugten Reihen geltende Gleichungen finden:

469. $$X_0+2^2X_1+3^2X_2-4^2X_3+\ldots.+(n+1)^2X_n$$
$$=(n+1)^2\Delta^{-1}X_{n+1}-\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\Delta^{-2}X_{n+1}+\frac{n+1}{1}\Delta^{-3}X_{n+1}-\Delta^{-4}X_{n+1}+\Delta^{-4}X_0,$$

470. $$X_0-2^2X_1+3^2X_2-4^2X_3+\ldots.\pm(n+1)^2X_n$$
$$=\pm\left[(n+1)^2\zeta^{-1}X_{n+1}+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\zeta^{-2}X_{n+1}+\frac{n+1}{1}\zeta^{-3}X_{n+1}+\zeta^{-4}X_{n+1}\right]+\zeta^{-4}X_0.$$

Eine Anwendung auf die Sinusreihen würde folgendes Resultat erzeugen:

471. $$\sin x+4\sin(x+\Delta x)+9\sin(x+2\Delta x)+\ldots.+(n+1)^2\sin(x+n\Delta x)$$
$$=-\frac{(n+1)^2\cos[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\sin\frac{1}{2}\Delta x}+\frac{(n+1)(n+2)\sin(x+n\Delta x)}{1.2.2^2(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^2}+\frac{(n+1)\cos[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$-\frac{\sin[x+(n-1)\Delta x]}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4}+\frac{\sin(x-2\Delta x)}{2^4(\sin\frac{1}{2}\Delta x)^4},$$

472. $$\sin x-4\sin(x+\Delta x)+9\sin(x+2\Delta x)-\ldots.\pm(n+1)^2\sin(x+n\Delta x)$$
$$=\pm\frac{(n+1)^2\sin[x+(n+\frac{1}{2})\Delta x]}{2\cos\frac{1}{2}\Delta x}\pm\frac{(n+1)(1+2)\sin(x+n\Delta x)}{1.2.2^2(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}\pm\frac{(n+1)\sin[x+(n-\frac{1}{2})\Delta x]}{2^3(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^3}$$
$$\pm\frac{\sin[x+(n-1)\Delta x]}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^4}+\frac{\sin(x-2\Delta x)}{2^4(\cos\frac{1}{2}\Delta x)^2}.$$

Es ist einleuchtend, dafs sich diese Idee noch weiter verfolgen läfst; und dafs sich Reihen nebst ihren Summen-Ausdrücken gewinnen lassen, deren Glieder mit ganz allgemeinen Vorzahlen verbunden sind, und die folgende Gestalt haben:

$$(K_1+r+1)X_0+(K_1+2r+1)X_1+(K_1+3r+1)X_2+\ldots.+[K_1+(n+1)r+1]X_n$$
$$=S_n[K_1+(n+1)r+1]X_n,$$

$$(K_1+r+1)(K_2+r+1)X_0+(K_1+2r+1)(K_2+2r+1)X_1+\ldots.$$
$$\ldots.+[K_1+(n+1)r+1][K_2+(n+1)r+1]X_n$$
$$=S_n[K_1+(n+1)r+1][K_2+(n+1)r+1]X_n$$

u. s. w.

Eben so für Reihen, die mit abwechselnden Zeichen verbunden sind. Hier mag es genügen, auf sie aufmerksam gemacht, und gezeigt zu ha-

ben, dafs allen Functionen, welche die Mathematik bisher aufgefunden hat, gleiche Gesetze, gleiche Behandlungsweise zu Grunde liegen; dafs auf Kreisfunctionen die nämliche Ableitungs- und Entwickelungsgesetze ausgedehnt werden können, wie auf andere, welche die Analysis aufgefunden hat; dafs unter ihnen gleicher Algorithmus herrscht. Ferner sind wir durch die vorgelegten Entwickelungen auf den Zusammenhang geführt, der zwischen der Summirung der Reihen für Progressionen, Potenzialgröfsen, Facultäten, deren Glieder mit figurirten Zahlen verbunden sind, und denen der Kreisfunctionen, die gleichen Gesetzen unterliegen, Statt findet, und wonach schon Spaun in seiner Trigonometrie und Arithmetik der Sinus und Cosinns forschte.

(Die Fortsetzung folgt.)

Einige Druckfehler im 13. Bande d. J.

S. 235 Z. 16 v. u. lies 10. Bd. statt 8. Bd.

— 257 — 11 v. u. l. $+\frac{\lfloor n+r}{\lfloor n \lfloor r}$ st. $=\frac{\lfloor n+r}{\lfloor n \lfloor r}$

— — — 8 v. u. l. $\frac{r+1}{1}$ st. $\frac{r+1}{r}$

Im 14. Bande d. J.

— 51 — 20 loco adiicis lege adiicio

— 52 — 2 loco $\int_{x_n}^{n-1}$ lege $\int^{n-1}$

— 53 — 3 loco secundum lege secundum $a_{\varkappa,\lambda}$

— — in formulis (5.) loco $\frac{n}{2^{n-1}S}$ lege $\frac{1}{2^{n-1}nS}$; et in prima earum loco y_2 lege y_1.

— 55 in theoremate proposito loco $\frac{n}{2^{n-1}S}$ lege $\frac{1}{2^{n-1}nS}$

— 56 lin. 17 loco J_1 lege P_1

— 64 — 12 loco A_{n-1} lege A_n

Fig. 1.

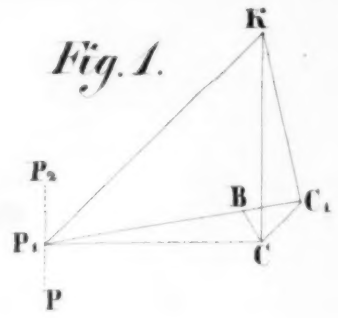


Fig. 2.

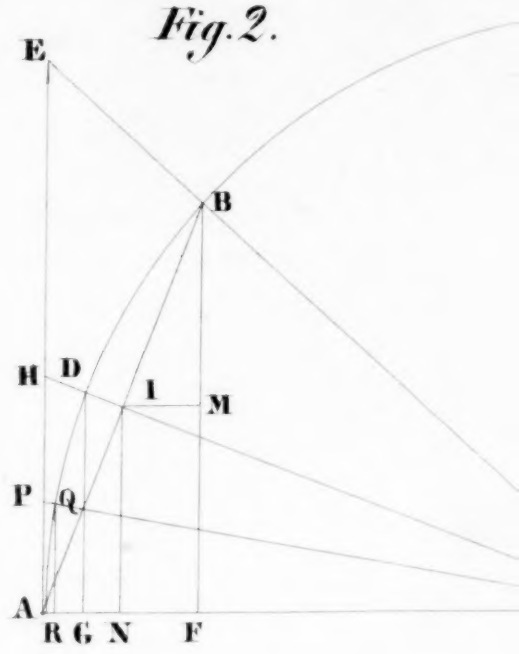
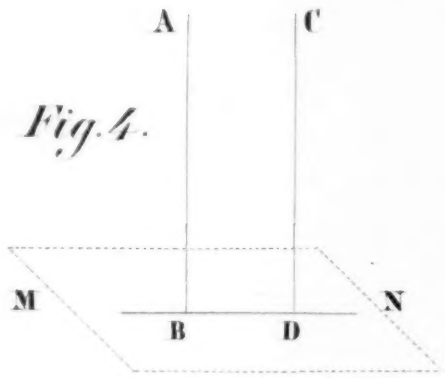
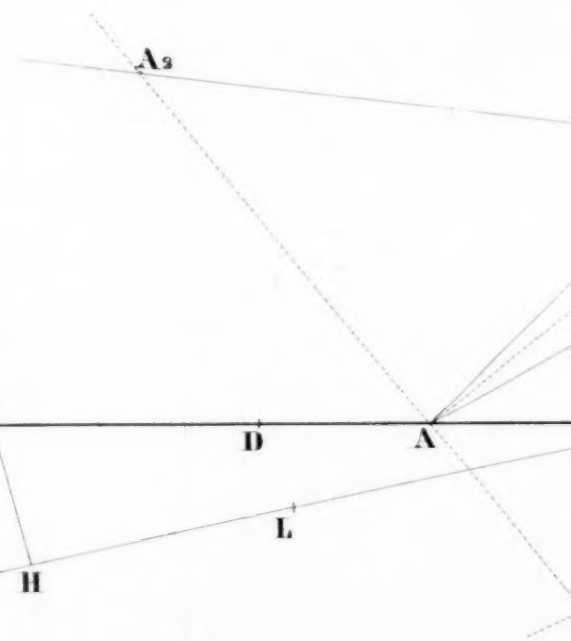


Fig. 4.





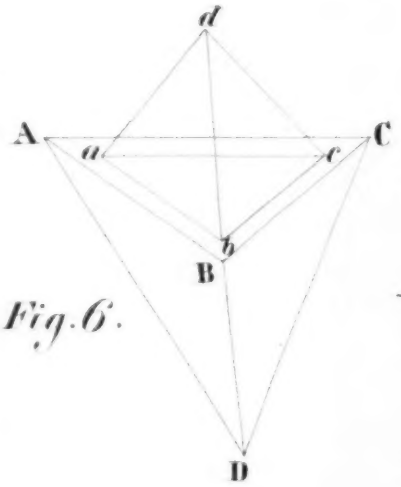


Fig. 6.

Fig. 7.

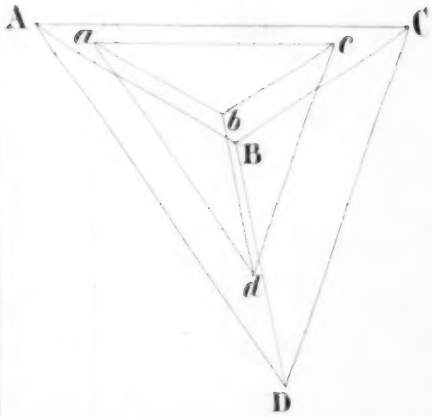


Fig. 8.

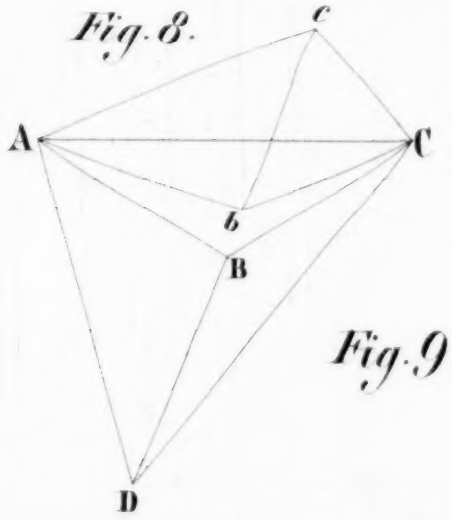


Fig. 9.

Fig. 3.

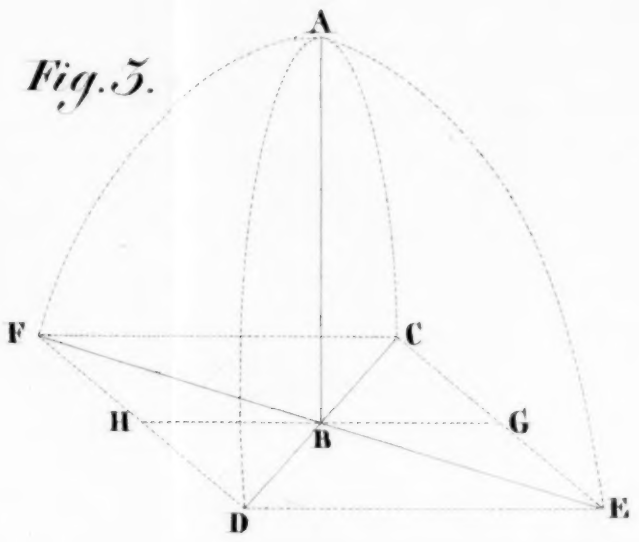


Fig. 5.

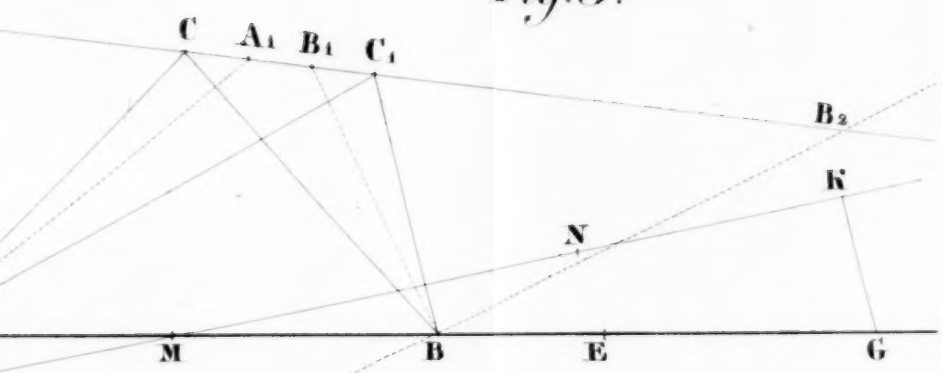
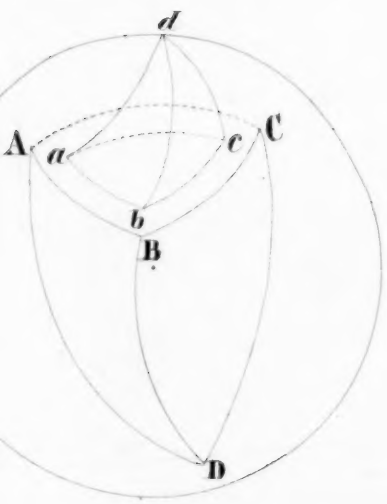
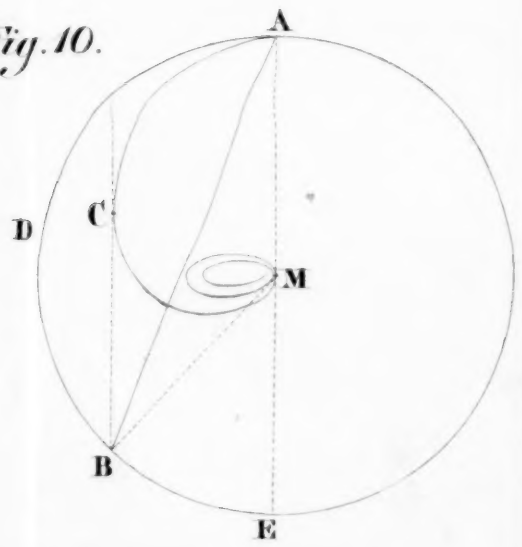
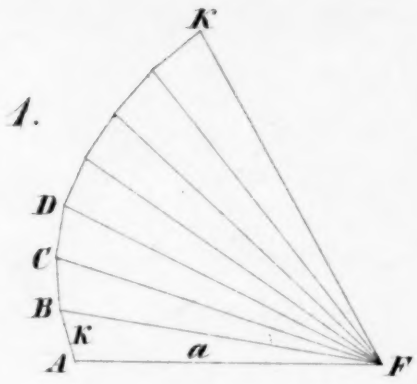


Fig. 10.

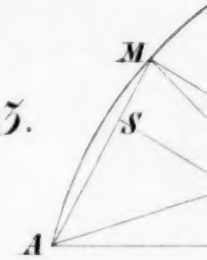




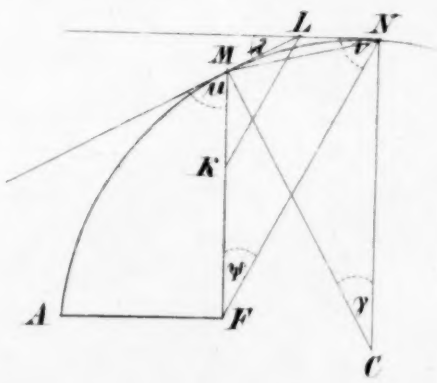
1.



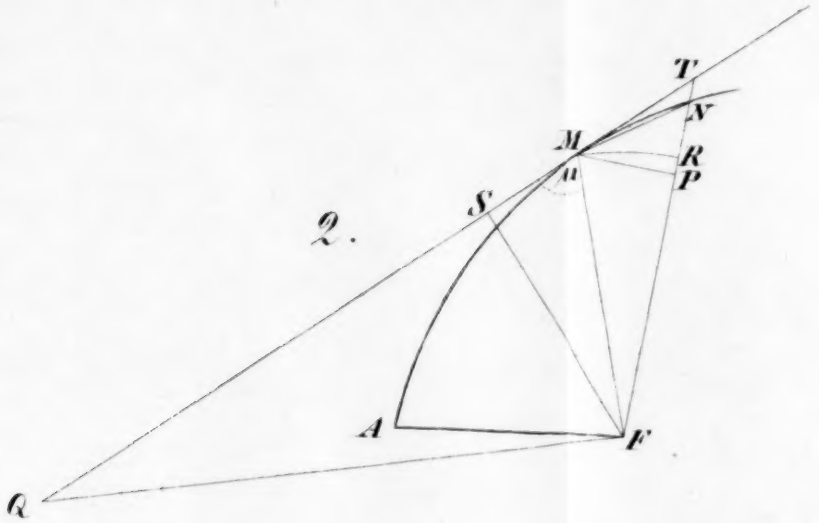
3.



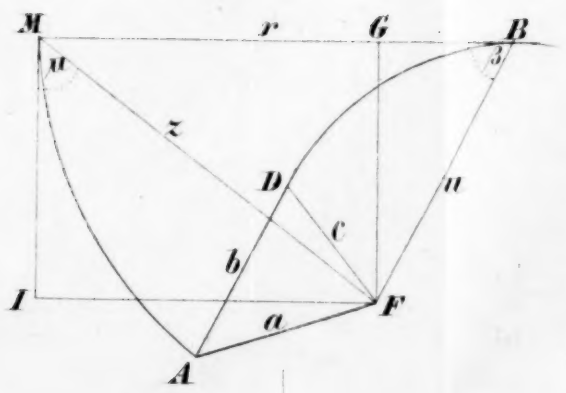
4.

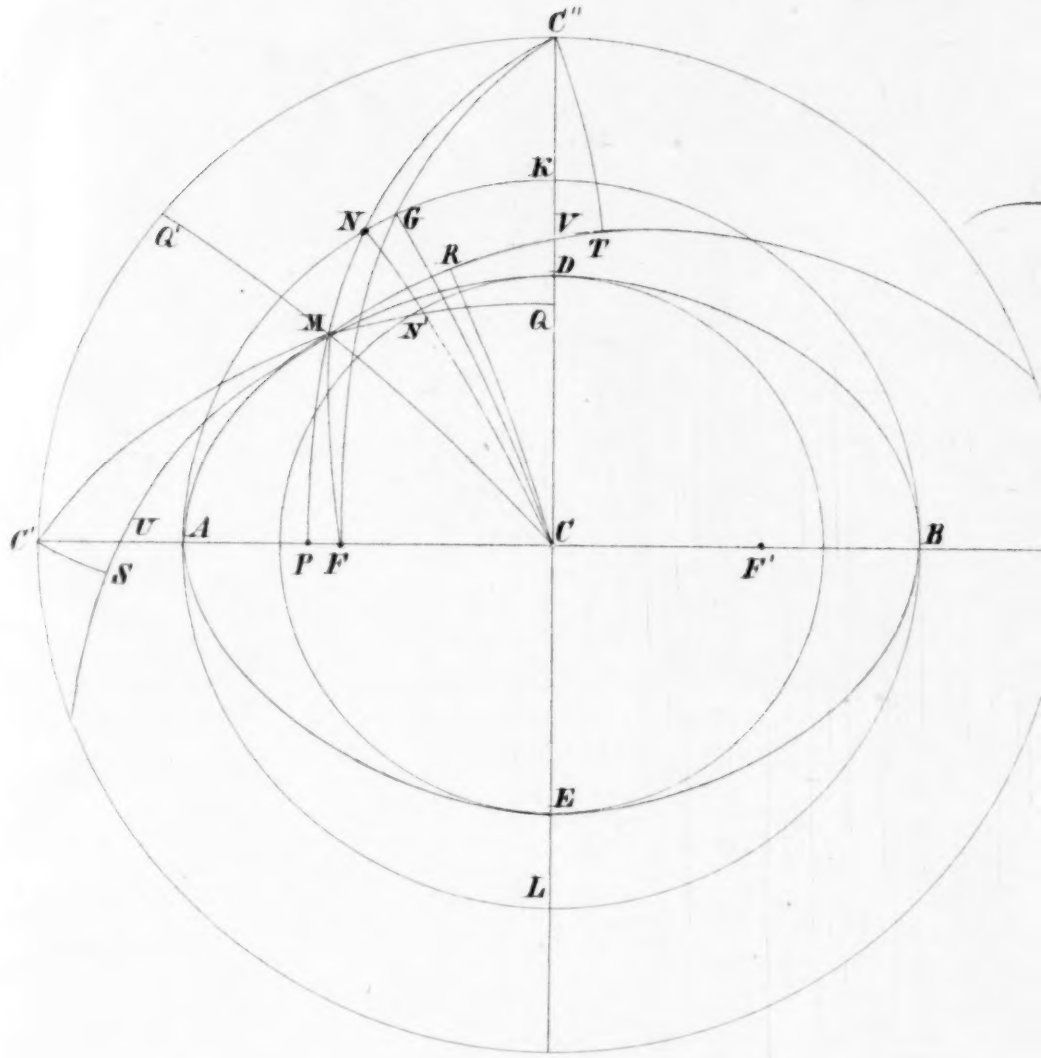
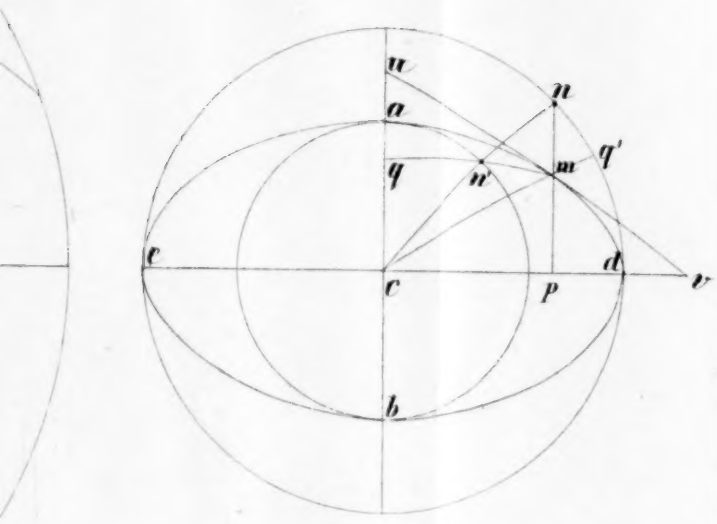


2.



3.




C''
K
N
G
V
Q'
R
D
T
M
N'
Q
C'
U
A
C
B
P
F
F'
S
E
L

1